Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Глухов, О матрицах переходов разностей при использовании некоторых модулярных групп, *Матем. вопр. криптогр.*, 2013, том 4, выпуск 4, 27–47

DOI: <https://doi.org/10.4213/mvk98>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 12:56:20

УДК 512.542.74

О матрицах переходов разностей при использовании некоторых модулярных групп

М. М. Глухов

Академия криптографии Российской Федерации, Москва

Получено 22.IV.2013

В работе изучаются матрицы переходов биграмм для систем $G_t h G_s$ подстановок степени 2^n , где G_t — группа сдвигов в прямой сумме групп $(Z/2^t, +)$. Частично подтверждена известная гипотеза об отсутствии APN-подстановок поля $GF(2^n)$ при четном n , предложены способы построения разностно-4-однородных подстановок.

Ключевые слова: модулярная группа, разностная характеристика системы подстановок, APN-функция

On the matrices of transitions of differences for some modular groups

M. M. Glukhov

Academy of Cryptography of the Russian Federation, Moscow

Abstract. Let G_t be a translation group in a direct sum of groups $(Z/2^t, +)$. For the system of substitutions $G_t h G_s$ of order 2^n the matrices of digram transitions are investigated. A well-known hypothesis on the nonexistence of APN-substitutions of the field $GF(2^n)$ for even n is partly verified. Some methods of construction of differentially 4-uniform substitutions are suggested.

Key words: modular group, difference characteristics, systems of substitutions, APN-functions

Citation: *Mathematical Aspects of Cryptography*, 2013, vol. 4, no. 4, pp. 27–47 (Russian).

© 2013 Глухов М. М.

Введение

Под модулярной группой будем понимать аддитивную группу прямой суммы любого числа экземпляров кольца вычетов $Z/m = \{0, 1, \dots, m-1\}$ по модулю $m > 1$. Прямую сумму k экземпляров кольца Z/m будем обозначать $(Z/m)^k$. Здесь мы будем рассматривать такие группы лишь при условии, что m есть степень числа 2. Операции сложения и вычитания в кольце $Z/2^r$ и в прямой сумме таких колец будем обозначать соответственно знаками $+_r$ и $-_r$ при $r > 1$ и знаком $\oplus$ при $r = 1$.

Зафиксируем целое число $n > 0$, два делителя 2^r , 2^s числа 2^n и построим две модулярные группы $G_r = (Z/2^r)^{n-r}$, $G_s = (Z/2^s)^{n-s}$ порядка 2^n . Записав элементы групп $Z/2^r$ и $Z/2^s$ в двоичной системе, представим элементы групп двоичными векторами длины n . Множество всех таких векторов обозначим через V_n . В конкретных случаях двоичный вектор $a = (a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$ будем отождествлять с записью числа $a_{n-1}2^{n-1} + \dots + a_12 + a_0$ в двоичной системе счисления или с набором коэффициентов элемента $a_{n-1}\theta^{n-1} + \dots + a_1\theta + a_0$ поля $GF(2^n)$ при некотором примитивном элементе θ . Всюду далее поле $GF(2^n)$ для краткости будем обозначать через F_n , а его мультипликативную группу через F_n^* .

Таким образом, можно считать, что группы G_r и G_s определены на одном и том же множестве векторов V_n и имеют один и тот же нулевой элемент $0 = (0, \dots, 0)$. Для сложения векторов $a, b \in V_n$ в группе G_r (G_s) нужно их разбить на подвекторы длины r (s) и, сложив соответствующие подвекторы как числа по модулю 2^r (2^s), записать результаты в виде двоичных векторов.

С точки зрения криптографических приложений представляет интерес задача изучения матриц переходов ненулевых разностей G_r в разности элементов группы G_s при различных r, s под действием подстановок системы $G_r h G_s$ при некоторых подстановках h из симметрической группы $S(V_n)$ всех подстановок множества V_n . Обозначим эту матрицу через $Q_{r,s}^{(n,h)} = (q_{a,b}^{(n,h,r,s)})$, $a, b \in V_n$. Ее элемент $q_{a,b}^{(n,h,r,s)}$ равен числу решений уравнения

$$(a +_r x)h -_s xh = b \quad (1)$$

относительно неизвестного x , принимающего значения из V_n .

В общем случае указанная задача является сложной. В данной работе мы ограничимся рассмотрением лишь некоторых частных случаев.

В большинстве общих рассуждений данной работы n будет произвольным фиксированным целым числом и в индексах будет опускаться. С точки зрения криптографических приложений более интересным является случай, когда n четно. Поэтому некоторые вопросы будут рассматриваться лишь при четном n . Во всех таких случаях будем считать, что $n = 2k > 4$.

Максимальный элемент матрицы $Q_{r,s}^{(h)}$ назовем *разностной характеристикой* системы подстановок $G_r h G_s$ и обозначим через $\Delta(G_r h G_s)$. В случае $r = s = 1$ эту величину будем обозначать через $\Delta(h)$. Если уравнение (1) имеет решения и один из элементов a, b равен 0, то и второй равен 0. При этом уравнению (1) удовлетворяет любой элемент из V_n . Поэтому далее будем предполагать, что $a \neq 0$ и $b \neq 0$. В связи с этим матрица $Q_{r,s}^{(n,h)}$ имеет размеры $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$. При изучении матриц $Q_{r,s}^{(h)} = (q_{a,b}^{(h,r,s)})$ будем сравнивать их с матрицей для системы подстановок $G_1 h G_1$. Поэтому рассмотрим сначала матрицы $Q_{1,1}^{(h)}$.

1. О свойствах матриц $Q_{1,1}^{(h)}$

В этом крайнем частном случае для матрицы переходов ненулевых разностей введем особое обозначение $Q_{1,1}^{(h)} = P^{(h)} = (p_{a,b}^{(h)})$. Ее элемент $p_{a,b}^{(h)}$ равен числу решений уравнения

$$(a \oplus x)h \oplus xh = b. \quad (2)$$

Приведем некоторые известные факты о матрицах $P^{(h)}$, включая для полноты чтения и их краткие доказательства.

1. Если h — подстановка 2-го порядка, то матрица $P^{(h)}$ симметрична.

Действительно, уравнение (2) в этом случае можно преобразовать к виду $(b \oplus xh)h = a \oplus x$, и при замене переменных $xh = y$ получим уравнение

$$(b \oplus y)h \oplus yh = a,$$

имеющее столько же решений, сколько и уравнение (2). Следовательно, $p_{a,b}^{(h)} = p_{b,a}^{(h)}$.

2. При любой подстановке h если x_1 — решение уравнения (2), то его решением является и $x_2 = a \oplus x_1$.

Условимся решения x_1 и $a \oplus x_1$ уравнения (2) называть *связанными*. Таким образом, все решения уравнения (2) (если они существуют) разбиваются

на пары связанных решений, причем очевидно, что разные связанные пары не пересекаются. Отсюда, в частности, получаем следующее свойство.

3. Все элементы матрицы $P^{(h)}$ четны, и потому число ненулевых элементов в каждой ее строке не превосходит 2^{n-1} (поскольку сумма элементов каждой ее строки равна 2^n).

4. Если подстановка g поля F линейно эквивалентна подстановке h , т. е. $g = \varphi h \psi$ при некоторых $\varphi, \psi \in \text{Aut}(F_n, \oplus)$, то матрица $P^{(g)}$ получается из матрицы $P^{(h)}$ перестановкой строк по подстановке φ и столбцов по подстановке ψ^{-1} .

Действительно, уравнение $(a \oplus x)g \oplus xg = b$ преобразуется к виду

$$(a_1 \oplus y)h \oplus yh = b_1, \text{ где } a_1 = a\varphi, y = x\varphi, b_1 = b\psi^{-1}.$$

Следовательно, $p_{a,b}^{(g)} = p_{a_1,b_1}^{(h)}$, что и влечет свойство 4.

Укажем еще свойства матриц $P^{(h)}$ при степенных подстановках h .

Утверждение 1. Пусть $m = 2^t m_1 > 4$, $0 \leq t < n$, $(m_1, 2^n - 1) = 1$ и h, h_1 — степенные подстановки поля $F_n: h(x) = x^m$, $h_1(x) = x^{m_1}$. Тогда:

1) матрица $P^{(h_1)}$ отличается от матрицы $P^{(h)}$ лишь перестановкой строк;

2) все строки матрицы $P^{(h)}$ получаются перестановкой элементов одной ее строки.

Доказательство. Утверждение 1) есть частный случай свойства 4, поскольку возведение элементов поля F_n во вторую степень является автоморфизмом группы $(F_n, \oplus)$.

Докажем утверждение 2). Пусть $a, b \in F_n^*$, $p_{a,b}^{(h)} = c > 0$ и x_1 — решение уравнения

$$(a \oplus x)^m \oplus x^m = b. \quad (3)$$

Уравнение (3) приводится к виду

$$\sum_{i=1}^m C_m^i a^i x^{m-i} = b. \quad (4)$$

Так как x_1 — решение уравнения (4), то имеем равенство

$$\sum_{i=1}^m C_m^i a^i x_1^{m-i} = b. \quad (5)$$

Любой элемент $a_1 \in F_n^*$, отличный от 0 и a , можно представить в виде $a_1 = a\theta^r$, где θ — примитивный элемент поля F_n и $0 < r < 2^n - 1$. Подставив в (5) $a = a_1\theta^{-r}$ и $x_1 = x_2\theta^{-r}$, получим равенство

$$\sum_{i=1}^m C_m^i a_1^i x_2^{m-i} = b\theta^{mr},$$

которое означает, что $x_2 = x_1\theta^r$ есть решение уравнения

$$\sum_{i=1}^m C_m^i a_1^i x^{m-i} = b\theta^{mr}.$$

Так как неравенство $x_1 \neq x_1'$ влечет $x_1\theta^r \neq x_1'\theta^r$, то имеем: $p_{a_1, b\theta^{mr}}^{(h)} \geq p_{a, b}^{(h)}$.

И это неравенство имеет место при любом b , при котором $p_{a, b}^{(h)} > 0$. Теперь учитывая, что сумма всех элементов по строкам матрицы одна и та же, получаем $p_{a_1, b\theta^{mr}}^{(h)} = p_{a, b}^{(h)}$, и значит, состав элементов в строках с номерами a и a_1 один и тот же, т. е. любая строка матрицы $P^{(h)}$ получается перестановкой элементов строки с номером a , и утверждение 2) верно. В итоге утверждение 1 полностью доказано.

Далее линейно эквивалентные подстановки будем называть просто эквивалентными.

Из свойства 4 следует, что для эквивалентных подстановок g, h выполняется равенство

$$\Delta(G_1 g G_1) = \Delta(G_1 h G_1).$$

В силу утверждения 1) далее при рассмотрении степенных подстановок $h(x) = x^m$, не теряя общности, можно считать, что m нечетно.

2. О системах подстановок с разностной характеристикой 2

Строение матрицы $P^{(h)}$ полностью определяется подстановкой h и изучалось при различных подстановках h многими авторами. Известны примеры подстановок, при которых $\Delta(h) = 2$ и $\Delta(h) = 2^{n-2}$. Для подстановки h , выбираемой случайно и равновероятно из симметрической группы подстановок пространства V_n , В. Н. Сачков [1] указал интервал, содержащий максимальный элемент матрицы переходных вероятностей ненулевых разностей с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \rightarrow \infty$, и улучшил асимптотическую оценку математического ожидания величины $\Delta(h)$ из [10].

Для криптографических приложений наибольший интерес представляют подстановки с минимальным значением величины $\Delta(h)$, которое равно 2. Заметим, что отображения $h: V_n \rightarrow V_n$, при которых уравнение (2) имеет ровно 2 решения при любых $a, b \in V_n$, в работе [7] были названы почти совершенно нелинейными функциями, короче, *APN*-функциями. К настоящему времени имеется большой цикл работ, посвященных поиску *APN*-функций, в основном, для случая, когда V_n совпадает с аддитивной группой поля F_n . Построен ряд степенных *APN*-функций и *APN*-функций, не эквивалентных степенным функциям (краткий обзор работ по *APN*-функциям см. в [3]). Далее нас будут интересовать лишь функции $h: V_n \rightarrow V_n$, являющиеся подстановками. Такие *APN*-функции будем называть *APN*-подстановками. К сожалению, ни одна из найденных до сих пор *APN*-функций не является подстановкой поля F_n при четном n , и, как отмечено в [5], известные специалисты (Cantenaut, Carlet, Sharpin, Dobbertin, Zinoviev) считают справедливой гипотезу об отсутствии *APN*-подстановок поля F_n при четном n .

Частичным подтверждением этой гипотезы является следующее утверждение. Заметим предварительно, что каждая подстановка поля F_n представляется многочленом степени, меньшей 2^n над полем F_n .

Утверждение 2. Если n четно и h — подстановка поля F_n , представляемая многочленом

$$h(x) = a_m x^m \oplus \dots \oplus a_1 x \oplus a_0, \quad a_m \neq 0, \quad (6)$$

в котором сумма коэффициентов при степенях x , кратных трем, равна 0, то h не является *APN*-подстановкой.

Доказательство. Пусть $h \in S(V_n)$. Рассмотрим сначала случай, когда h — степенная подстановка, т. е. $h(x) = x^m$, $(m, 2^n - 1) = 1$, и возведение в степень производится в поле F . Из доказательства утверждения 1 следует, что, не теряя общности, можно считать число m нечетным. Для доказательства утверждения 2 в рассматриваемом случае достаточно доказать существование таких $a, b \in V_n$, при которых уравнение (2) имеет более двух решений. Пусть $a = b = 1$. Тогда уравнение (2) запишется в виде

$$(x \oplus 1)^m \oplus x^m = 1. \quad (7)$$

Очевидно, что ему удовлетворяют 0 и 1. Покажем, что его корнями являются также все элементы порядка 3 поля F_n . Так как n четно, то $2^n - 1$ кратно 3, и элементами порядка 3 являются лишь два элемента $\alpha = \theta^d$ и $\alpha^2 = \theta^{2d}$, где θ — примитивный элемент поля F_n и $d = (2^n - 1)/3$. Заме-

тим, что $0, 1, \alpha, \alpha^2$ образуют подполе порядка 4 поля F , и в нем $\alpha \oplus \alpha^2 = 1$. Подставим α вместо x в уравнение (7) и докажем, что верно равенство

$$(\alpha \oplus 1)^m \oplus \alpha^m = 1. \quad (8)$$

Так как $(m, 2^n - 1) = 1$, то m не кратно трем, и значит, $m \equiv 1 \pmod{3}$ или $m \equiv 2 \pmod{3}$.

Пусть $m \equiv 1 \pmod{3}$. Так как $\alpha \oplus 1 = \alpha^2$, то равенство (8) можно записать в виде $\alpha^{2m} \oplus \alpha^m = 1$. Так как $m \equiv 1 \pmod{3}$, то $\alpha^m = \alpha$, $\alpha^{2m} = \alpha^2$, и равенство (8) следует из равенства $\alpha \oplus \alpha^2 = 1$. В случае $m \equiv 2 \pmod{3}$ равенство (8) доказывается аналогично. Этим утверждение для степенных подстановок доказано. Очевидно, что тогда оно верно и для подстановок $h(x) = cx^m$ при любом $c \in F_n \setminus \{0\}$.

Пусть теперь h — любая подстановка поля F_n , представленная многочленом (6) над F_n . Тогда уравнение (2) запишется в следующем виде:

$$(a_m(a \oplus x)^m \oplus a_m x^m) \oplus \dots \oplus (a_1(a \oplus x) \oplus a_1 x) = b. \quad (9)$$

Положим $a = 1$, а b равным сумме всех коэффициентов многочлена $h(x)$, отличных от a_0 . Заметим, что $b \neq 0$, так как в противном случае многочлен $h(x)$ принимал бы значение a_0 при $x = 0$ и $x = 1$, т. е. не был бы подстановочным. Учитывая условие на коэффициенты многочлена h , равенство (8) при $(m, 3) = 1$ и равенство $A_l = a_l(1 \oplus \alpha)^l \oplus a_l \alpha^l = 0$ при l , кратном трем, нетрудно убедиться в том, что уравнению (9) удовлетворяют все элементы $0, 1, \alpha, \alpha^2$. Следовательно, подстановка h не является APN -подстановкой, и утверждение 2 доказано.

3. О системах подстановок с разностной характеристикой 4

В связи с отсутствием примеров APN -подстановок поля F_n при четном n представляют интерес подстановки h , при которых максимальный элемент матрицы $P^{(h)}$ равен 4, т. е. $\Delta(h) = 4$.

В работе [8] для конечных абелевых групп G, G' отображение $h: G \rightarrow G'$ названо *разностно- δ -однородным*, если $\Delta(GhG') \leq \delta$.

К разностно-4-однородным подстановкам группы $(F_n, \oplus)$ при четных $n > 4$ относятся все подстановки, эквивалентные подстановке τ обращения ненулевых элементов поля, доопределенной равенством $0\tau = 0$. Матрица

переходов разностей при действии системы подстановок $G_1\tau G_1$ хорошо известна. Подстановку τ при любом n впервые рассмотрел Б.А. Егоров в 1969 году. Им было замечено, что она при любом $n > 4$ лучше других известных подстановок h с точки зрения близости матрицы $P^{(h)}$ к равномерной матрице. Из его результатов следовало, что при нечетном n подстановка τ является APN -функцией, а при четном n в каждой строке матрицы $P^{(\tau)}$ находится 2^{n-1} нулей, $2^{n-1} - 2$ двоек и лишь одна четверка. Отметим, что система подстановок $G_1\tau G_1$ при $n = 8$ использована в шифрсистеме AES.

Укажем еще некоторые свойства матрицы $P^{(\tau)}$. Предварительно заметим, что аддитивная группа поля F_n имеет $2^n - 1$ максимальных подгрупп, и любая из них имеет вид aH , где $a \in F_n^*$, $H = \{c \in F_n : \text{tr}(c) = 0\}$, tr — функция-след из поля F_n в поле $GF(2)$. Очевидно, что H — группа по сложению.

Утверждение 3. Если n четно, то в строке с номером $a \neq 0$ матрицы $P^{(\tau)}$ ненулевые элементы находятся в столбцах, номера которых образуют множество элементов, обратных к ненулевым элементам подгруппы aH .

Доказательство. Пусть $p_{a,b} \neq 0$, т. е. уравнение

$$(a \oplus x)\tau \oplus x\tau = b \quad (10)$$

имеет решения. Если среди решений есть 0, а значит, и a , то $a\tau = b$, т. е. $b = a^{-1}$. Следовательно, в этом случае $b \in (aH)^{-1}$, и утверждение верно. Если же среди решений есть элементы, отличные от 0 и a , то уравнение (10) с помощью подстановки $x = ay$ преобразуется к уравнению

$$y^2 \oplus y \oplus 1/ab = 0. \quad (11)$$

Известно (см., например, [2], стр. 32), что уравнение (11) имеет решение в том и только том случае, когда $(1/ab) \in H$, т. е. $b \in (aH)^{-1}$. Следовательно, и в этом случае утверждение верно.

Замечание. Доказательство утверждения 3 приведено здесь лишь для полноты чтения. В действительности, оно является следствием формул для элементов $p_{a,b}^{(\tau)}$ матрицы $P^{(\tau)}$, доказанных Б. В. Березиным (1984 г.):

$$p_{a,b} = 0, \text{ если } \text{tr}(1/ab) = 1,$$

$$p_{a,b} = 2, \text{ если } \text{tr}(1/ab) = 0, b \neq a^{-1},$$

$$p_{a,b} = 4, \text{ если } \operatorname{tr}(1/ab) = 0, b = a^{-1}.$$

Следствие. При любом $n > 1$ матрица $(P^{(\tau)})^2$ не имеет нулевых элементов, т. е. множество подстановок $G_1\tau G_1\tau G_1$ дважды транзитивно.

Доказательство. Так как τ — подстановка 2-го порядка, то матрица $P^{(\tau)}$ симметрична, и в силу утверждения 3 при четном n ненулевые элементы столбца с номером b матрицы $P^{(\tau)}$ находятся в строках, номера которых являются элементами, обратными к элементам подгруппы bH . Теперь наше утверждение при четном n следует из очевидного соотношения $aH \cap bH \neq \emptyset$ при любых $a, b \in F_n^*$. Для нечетного n утверждение следствия выводится непосредственно из правила умножения матриц, если учесть, что в этом случае в каждой строке и в каждом столбце матрицы $P^{(\tau)}$ содержится более половины ненулевых элементов.

Б. В. Березин (1984 г.) доказал также, что система подстановок $G_1\tau$ при $n > 4$ порождает знакопеременную группу подстановок поля F_n .

Из приведенных свойств подстановки τ следует, что система подстановок $G_1\tau G_1$ обладает хорошим перемешивающим свойством.

Отметим и некоторые недостатки подстановки τ при ее использовании в боксах шифрсистем. Так как τ — подстановка 2-го порядка, то матрица переходов разностей для системы $G_1\tau G_1$ при одинаковой нумерации ее строк и столбцов симметрична и четверки в ней расположены по некоторой побочной диагонали. Отсюда, в частности, следует, что в квадрате этой матрицы диагональные элементы равны $2^{n+1} + 16$, а каждый из остальных элементов равен 2^n или $2^n + 4$. И эта неравномерность довольно долго сохраняется при возведении матрицы в степени 3, 4, ...

Кроме того, при действии подстановки τ имеется достаточно простая связь $xu = 1$ выхода u со входом x , что облегчает применение XSL-метода анализа соответствующих блочных шифров.

Свойство матрицы $P^{(\tau)}$, указанное в утверждении 3, также является определенным минусом для подстановки τ , поскольку легко позволяет находить расположение ненулевых элементов каждой строки матрицы $P^{(\tau)}$.

В связи с этим многими авторами осуществлялся поиск других подстановок поля F_n , обладающих хорошими криптографическими качествами. Каждая подстановка поля F_n реализуется многочленом. Существует большое число работ, посвященных описанию подстановочных многочленов над полем F_n .

Ряд результатов в этом направлении был получен Е. А. Тришиным. Так, например, в его диссертации доказан критерий подстановочности для некоторых многочленов вида $x^r g(x^t)$ над полем $GF(q)$, где t — делитель $q-1$. Среди них при $q=2^8$ экспериментальным путем найдено много подстановок h , для которых $\Delta(h)=4$.

С точки зрения реализации подстановок наибольший интерес представляют многочлены небольших степеней. Приведем известные результаты о подстановочных многочленах степеней $m \leq 7$ над полем F_n при четном n . В случае существования многочлены $h(x)$ степени m приводятся обычно в нормализованном виде, т. е. унитарные, с условием $h(0)=0$ и с нулевым вторым коэффициентом, если $(m,2)=1$. Полный список всех нормализованных подстановочных многочленов при $m \leq 5$ приведен в [4], а при $m \leq 6$ в [7].

Для подстановочных многочленов $h(x)$ степеней 1, 2 степень многочлена $h(x \oplus a) \oplus h(x)$ равна 0, и потому $\Delta(h)$ принимает максимально возможное значение 2^n .

Подстановочных многочленов степеней 3 и 6 над полем F_n при четном n не существует.

Все нормализованные подстановочные многочлены степени 4 исчерпываются многочленами вида $h(x) = x^4 \oplus bx^2 \oplus cx$. Для них ситуация та же, что и при степенях 1, 2, поскольку здесь $h(x \oplus a) \oplus h(x) = a^4 \oplus ba^2 \oplus a$ не зависит от x .

При $n=5$ единственным нормализованным подстановочным многочленом над полем F_n является $h(x) = x^5$ и только при условии $(2^n-1,5)=1$. В этом случае уравнение (2) имеет вид $ax^4 \oplus a^4x \oplus a^5 = b$ и, очевидно, имеет не более 4 корней при любых $a, b \in F_n^*$. Отсюда, учитывая свойство 3 (см. п. 1) матрицы $P^{(h)}$ и утверждение 2, получаем $\Delta(h)=4$. (Если 2^n-1 кратно 5, то отображение $h(x)=x^5$ не является подстановкой по критерию Диксона, см. [4], с. 440).

И. В. Бобылев (1985 г.) доказал, что при $n=7$ существует лишь два класса линейно-эквивалентных подстановочных многочленов, их представителями являются многочлены $x^7, x^7 \oplus x^5 \oplus x$.

В общем случае, когда подстановка h задается многочленом степени k над F_n , выполняется неравенство $\Delta(h) \leq k-1$, поскольку степень многочлена $h(x \oplus a) \oplus h(x)$ не превосходит $k-1$ и потому уравнение (2)

имеет не более $k-1$ решений при любом $b \in F^*$. Примерами, когда $\Delta(h) = k-1$, могут служить подстановки $h(x) = x^7$ и $h(x) = x^7 \oplus x^5 \oplus x$ поля $GF(2^8)$. Компьютерными вычислениями для подстановки $h(x) = x^7$ поля F_8 , являющегося основным полем шифрсистемы *AES* (т. е. расширением поля $GF(2)$ с помощью корней многочлена $f(x) = x^8 \oplus x^4 \oplus x^3 \oplus x^2 \oplus 1$), установлено, что в этом случае $\Delta(h) = 6$.

Укажем еще один способ построения разностно-4-однородных подстановок на подмножествах множества V_n при четных n . Предварительно введем новое обозначение и докажем вспомогательное утверждение.

Обозначим через $Q_0^{(m,h,+)}$ матрицу переходов всех разностей (включая и нулевую) абелевой группы $(V_m,+)$ под действием системы подстановок $\gamma_x h \gamma_y$, где $a \gamma_x = a + x$, а h — подстановка на V_m .

Утверждение 4. Пусть абелева группа $(V_n,+)$ есть внешняя прямая сумма групп $(V_r,*)$, $(V_t,\circ)$, $h_1 \in S(V_r)$, $h_2 \in S(V_t)$, и $h = (h_1, h_2)$ — такая подстановка из симметрической группы $S(V_n)$, что $(a,b)h = (ah_1, bh_2)$ для любых $a \in V_r, b \in V_t$. Тогда существует нумерация строк и столбцов матрицы $Q_0^{(n,h,+)}$, при которой

$$Q_0^{(n,h,+)} = Q_0^{(r,h_1,*)} \otimes Q_0^{(t,h_2,\circ)}, \quad (12)$$

где $\otimes$ — знак тензорного произведения матриц.

Доказательство. Упорядочим произвольно элементы множеств V_r и V_t . Пусть

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{2^r} \text{ в } V_r \text{ и } \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_{2^t} \text{ в } V_t.$$

Теперь упорядочим элементы из V_n лексикографически, т. е. положим

$$(\alpha_i, \beta_j) < (\alpha_k, \beta_l) \Leftrightarrow \alpha_i < \alpha_k \text{ или } \alpha_i = \alpha_k, \beta_j < \beta_l.$$

Будем считать, что строки и столбцы матрицы $Q_0^{(m,h,+)}$ занумерованы элементами множества V_n по их возрастанию в указанном выше порядке. По определению матрицы $Q_0^{(m,h,+)}$ ее элемент из строки с номером (α_i, β_j) и столбца с номером (α_k, β_l) равен числу решений уравнения

$$((x, y) + (\alpha_i, \beta_j))h - (x, y)h = (\alpha_k, \beta_l),$$

которое в силу условий леммы равносильно системе уравнений

$$\begin{aligned}(x * \alpha_i)h_1 \bar{*} xh_1 &= \alpha_k, \\ (y \circ \beta_j)h_2 \bar{\circ} yh_2 &= \beta_l,\end{aligned}$$

где $\bar{*}, \bar{\circ}$ — операции, обратные соответственно к операциям $*$, $\circ$. Так как неизвестные x , y независимы, то число решений этой системы равно произведению чисел решений входящих в нее уравнений. Следовательно, указанный элемент матрицы $Q_0^{(m,h,+)}$ равен произведению элементов с мест $((\alpha_i, \alpha_k), (\beta_j, \beta_l))$ соответственно матриц $Q_0^{(r,h_1,*)}$, $Q_0^{(t,h_2,\circ)}$. Значит, при фиксированных α_i, α_k элементы матрицы $Q_0^{(m,h,+)}$ с мест $((\alpha_i, \beta_j), (\alpha_k, \beta_l))$ при всевозможных β_j, β_l образуют подматрицу, равную произведению элемента матрицы $Q_0^{(r,h_1,*)}$ с номером (α_i, α_k) на матрицу $Q_0^{(t,h_2,\circ)}$. Это с учетом выбранной нумерации строк и столбцов матриц свидетельствует о выполнении равенства (12), и утверждение доказано.

Следствие 1. Если в утверждении 4 операции $+, *, \circ$ совпадают с операцией $\oplus$, $n = r + s$, где r, s нечетны, и h_1, h_2 — APN-подстановки, то подстановка h является разностно-4-однородной на множестве $(V_t \setminus \{0\}) \times (V_r \setminus \{0\})$.

Замечание. Подстановки из следствия 1 могут использоваться в блочных шифрах типа XSL, если h оставляет на месте нулевой элемент, а L — невырожденное линейное преобразование пространства V_n над полем $GF(2)$.

4. О свойствах матриц $Q_{2,1}^{(h)}$ и $Q_{1,2}^{(h)}$

Пусть $Z/4 = \{0, 1, 2, 3\}$ — кольцо вычетов по модулю 4. В соответствии с введенными обозначениями операцию сложения в этом кольце будем обозначать через $+_2$, а числа $0, 1, 2, 3$ записывать в двоичной системе счисления: $0 = (0, 0)$, $1 = (0, 1)$, $2 = (1, 0)$, $3 = (1, 1)$. В общем виде $x = (x_1, x_0)$. Тогда элемент прямой суммы k экземпляров кольца $Z/4$ запишется в виде двоичного вектора длины $2k$. Как и выше, будем считать $2k = n$ и операцию сложения в $(Z/4)^k$ обозначать знаком $+_2$. Для простоты прямую сумму k экземпляров группы $(Z/4, +_2)$ обозначим буквой G . Так как в данном пункте индексы $2, 1$ у матрицы $Q_{2,1}^{(h)}$ будут фиксированными, то матрицу $Q_{2,1}^{(h)}$, ее строку с номером a и ее элемент $q_{a,b}^{(h,2,1)}$ будем обозначать соответ-

ственно $Q^{(h)}$, $Q_a^{(h)}$ и $q_{a,b}^{(h)}$. Отметим, что элемент $q_{a,b}^{(h)}$ равен числу решений уравнения

$$(a +_2 x)h \oplus xh = b. \quad (13)$$

Выше отмечалось, что в каждой строке матрицы $P^{(h)}$ число ненулевых элементов не превосходит 2^{n-1} . Представляет интерес вопрос о сравнении матрицы $Q^{(h)}$ с матрицей $P^{(h)}$. С этой целью воспользуемся связью между операциями $+_2$ и $\oplus$.

Утверждение 5. Если $a = (a_1, a_0), b = (b_1, b_0) \in Z/4$, то

$$\begin{aligned} a +_2 b &= (a_1 \oplus b_1 \oplus a_0 b_0, a_0 \oplus b_0), \\ a -_2 b &= (a_1 \oplus b_1 \oplus a_0 b_0 \oplus b_0, a_0 \oplus b_0). \end{aligned}$$

Утверждение доказывается непосредственной проверкой.

Из утверждения 5 получаем два следствия.

Следствие 1. Пусть $a = (a_{n-1}, \dots, a_1, a_0), b = (b_{n-1}, \dots, b_1, b_0)$ — элементы из G . Тогда

$$\begin{aligned} a +_2 b = a \oplus b &\Leftrightarrow a_0 b_0 = a_2 b_2 = \dots = a_{n-2} b_{n-2} = 0, \\ a -_2 b = a \oplus b &\Leftrightarrow \bar{a}_0 b_0 = \bar{a}_2 b_2 = \dots = \bar{a}_{n-2} b_{n-2} = 0, \end{aligned}$$

где $\bar{a}_i = a_i \oplus 1$ — отрицание элемента $a_i, i = 0, 2, \dots, n-2$.

Следствие 2. Для любых элементов

$$a = (a_{n-1}, \dots, a_1, a_0), b = (b_{n-1}, \dots, b_1, b_0) \in V_n$$

выполняются равенства

$$a +_2 b = a \oplus b \oplus c, \quad a -_2 b = a \oplus b \oplus d,$$

где $c = (c_{n-1}, \dots, c_1, c_0), d = (d_{n-1}, \dots, d_1, d_0)$,

$$c_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i \text{ четно} \\ a_{i-1} b_{i-1}, & \text{если } i \text{ нечетно} \end{cases}, \quad d_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i \text{ четно} \\ (a_{i-1} \oplus 1) b_{i-1}, & \text{если } i \text{ нечетно} \end{cases}.$$

Так как элементы c, d из утверждения 5 зависят лишь от a и b , то их естественно обозначить $c = c_{a,b}, d = d_{a,b}$. Тогда равенства следствия 2 принимают вид

$$a +_2 b = a \oplus b \oplus c_{a,b}, \quad a -_2 b = a \oplus b \oplus d_{a,b}. \quad (14)$$

Введем еще для $a = (a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$ обозначения:

$$\delta_0(a) = (a_{n-2}, a_{n-4}, \dots, a_0), \quad \delta_1(a) = (a_{n-1}, a_{n-3}, \dots, a_1).$$

Рассмотрим вопрос о решении уравнения (13). В зависимости от элемента $\delta_0(a)$ здесь возможны различные ситуации. Рассмотрим сначала два простейших случая, когда

$$a = (a_{n-1}, \dots, a_1, a_0), \quad \|\delta_0(a)\| = 0 \quad \text{или} \quad \|\delta_0(a)\| = 1.$$

Число таких значений a , что $\|\delta_0(a)\| = 0$, равно $2^{n/2}$. По следствию 1 из утверждения 5 тогда $a \oplus_2 x = a \oplus x$, и потому множество решений уравнения (13) совпадает с множеством решений уравнения (2), т. е. $q_{a,b}^{(h)} = p_{a,b}^{(h)}$ при любом b . Следовательно, строка $Q_a^{(h)}$ матрицы $Q^{(h)}$ совпадает со строкой $P_a^{(h)}$ матрицы $P^{(h)}$. Таким образом, в рассматриваемом случае $2^{n/2}$ строк матрицы $Q^{(h)}$ совпадают с соответствующими строками матрицы $P^{(h)}$.

Пусть $\|\delta_0(a)\| = 1$ и $a_{2i} = 1$ при некотором $i \in \{0, 1, \dots, (n-2)/2\}$. В этом случае все значения $x = (x_{n-1}, \dots, x_1, x_0)$ разобьем на два подмножества:

$$\{x \mid x_{2i} = 0\}, \{x \mid x_{2i} = 1\},$$

и в соответствии с этим уравнение (13) будет равносильным объединению двух систем уравнений

$$1) \begin{cases} ((a +_2 x)h \oplus xh = b, \\ x_{2i} = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad 2) \begin{cases} ((a +_2 x)h \oplus xh = b, \\ x_{2i} = 1. \end{cases}$$

В системе 1) согласно (14) $a +_2 x = a \oplus x$, и ее первое уравнение совпадает с уравнением (2). Если уравнение (2) имеет решения, то каждая пара его связанных решений имеет вид $(x', x'' = a \oplus x')$. Так как $a_{2i} = 1$, то только одно из решений x', x'' удовлетворяет условию $x_{2i} = 0$. Следовательно, система 1) имеет $\frac{1}{2} p_{a,b}^{(h)}$ решений. В системе 2) $a +_2 x = a \oplus x \oplus 2^{2i}$, и ее первое уравнение принимает вид

$$((a \oplus 2^{2i}) \oplus x)h \oplus xh = b.$$

Если это уравнение не имеет решений, то и система 2) не имеет решений. Если же оно имеет решения, то в решениях из одной связанной пары компоненты с номером $2i$ совпадают, и потому оба решения одновременно либо не удовлетворяют, либо удовлетворяют условию $x_{2i} = 1$. В первом случае система 2) не имеет решений, во втором имеет $p_{a \oplus 2^{2i}, b}^{(h)}$ решений.

В итоге

$$\text{либо } q_{a,b}^{(h)} = \frac{1}{2} p_{a,b}^{(h)}, \text{ либо } q_{a,b}^{(h)} = \frac{1}{2} p_{a,b}^{(h)} + p_{a \oplus 2t, b}^{(h)}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда

$$a = (a_{n-1}, \dots, a_1, a_0) \text{ и } \|\delta_0(a)\| = s > 1.$$

Пусть $a_{2i_1} = a_{2i_2} = \dots = a_{2i_s} = 1$, а остальные компоненты вектора a равны нулю. Тогда уравнение (13) распадется на 2^s систем уравнений вида

$$\begin{cases} ((c_{j_1, \dots, j_t} \oplus x)h \oplus xh = b, \\ x_{2j_1} = \dots = x_{2j_t} = 1, x_{2j} = 0: \forall j \in \{i_1, \dots, i_s\} \setminus \{j_1, \dots, j_t\}, \end{cases} \quad (15)$$

где $0 \leq t \leq s$, $\{j_1, \dots, j_t\}$ — подмножество множества $\{i_1, i_2, \dots, i_s\}$, которое считаем пустым при $t = 0$, а вектор $c_{j_1, \dots, j_t}$ получен заменой в a единичных компонент $a_{2j_1}, \dots, a_{2j_t}$ нулями.

Множество решений системы (15) обозначим через $K_{j_1, \dots, j_t}$. Так как при заданных значениях b, x коэффициент $c_{j_1, \dots, j_t}$ находится однозначно из первого уравнения системы (15), то при различных наборах $\{j_1, \dots, j_t\}$ соответствующие множества $K_{j_1, \dots, j_t}$ не пересекаются.

Для решения системы (15) решим сначала ее первое уравнение. Возможны 3 варианта: а) решений нет, б) решения есть, но они не содержатся в $K_{j_1, \dots, j_t}$, в) решения есть, и часть из них содержится в $K_{j_1, \dots, j_t}$. В случаях а), б) система (15) не имеет решений. Рассмотрим случай в). Если $t < s$ и $x = u$ — решение первого уравнения, содержащееся в $K_{j_1, \dots, j_t}$, то связанное с ним решение $u \oplus c_{j_1, \dots, j_t}$ не может принадлежать $K_{j_1, \dots, j_t}$. Если же $t = s$, то в паре связанных решений первого уравнения системы (15) либо оба элемента не содержатся в $K_{j_1, \dots, j_t}$, либо оба содержатся в $K_{j_1, \dots, j_t}$. Соответствующие последнему случаю наборы $\{j_1, \dots, j_t\}$ назовем особыми, а их множество обозначим через K_0 .

Из проведенных рассуждений видно, что в общем случае получить точную формулу, выражающую элемент $q_{a,b}^{(h)}$ через элементы матрицы $P^{(h)}$, вряд ли возможно, поскольку значение величины $q_{a,b}^{(h)}$ зависит не только от числа решений уравнений вида (2) при различных значениях $a = c_{j_1, \dots, j_t}$, но

и от самих решений этих уравнений, существенно зависящих от подстановки h . Поэтому точные значения величины $\Delta(G_2hG_1)$ можно находить только при конкретных значениях n и h . В общем же случае из проведенных рассуждений получаются лишь следующие оценки.

Утверждение 6. Для любого n и любой подстановки h поля F_n

$$\Delta(G_2hG_1) \leq \max_s \left(\frac{1}{2} \sum_{J \in K_0} p_{c_J, b}^{(h)} + \sum_{J_0 \in K_0} p_{c_{J_0}, b}^{(h)} \right), \quad (16)$$

где J_0 пробегает все особые наборы, J — все остальные из указанных выше наборов при фиксированном значении s , а максимум берется по всем $s \in \{1, 2, \dots, 2^{n-1}\}$.

Замечание. Оценка (16) является весьма грубой. Если предположить, что решения первого уравнения в (15) образуют случайную и равновероятную выборку из поля F_n , то каждое такое решение будет удовлетворять остальным уравнениям с вероятностью $1/2^s$. Следовательно, в среднем верхняя оценка не должна превосходить величины

$$\max_s \frac{1}{2^s} \left(\frac{1}{2} \sum_{J \in K_0} p_{c_J, b}^{(h)} + \sum_{J_0 \in K_0} p_{c_{J_0}, b}^{(h)} \right).$$

Эксперименты с рядом конкретных подстановок при $n=8$ показывают, что величина $\Delta(G_2hG_1)$ близка к $\Delta(G_1hG_1)$. Так, например, для подстановок $h(x)=x^7$ и $h=\tau$ поля $GF(2^8)$, используемого в *AES*, выполняется равенство $\Delta(G_2hG_1) = \Delta(G_1hG_1) + 1$.

Сравним теперь матрицы $Q_{2,1}^{(h)}$ и $Q_{1,2}^{(h)}$.

Утверждение 7. Для любого n , любой подстановки h поля F_n и для любых $a, b \in F_n^*$ выполняется равенство $q_{a,b}^{(h,2,1)} = q_{b,a}^{(h^{-1},1,2)}$.

Доказательство. Элемент $q_{a,b}^{(h,2,1)}$ есть число решений уравнения

$$(a +_2 x)h \oplus xh = b, \quad (17)$$

которое можно привести к виду $(b \oplus xh)h^{-1} -_2 x = a$. Произведя в нем замену $x = yh^{-1}$, получим уравнение относительно y

$$(b \oplus y)h^{-1} -_2 yh^{-1} = a,$$

имеющее столько же решений, сколько и уравнение (17). Это и доказывает утверждение 7.

Следствие. Для любого n и любой подстановки h поля F_n

$$\Delta(G_1 h G_2) = \Delta(G_2 h G_1).$$

Замечание. При изучении матрицы $Q_{2,2}^{(h)}$ понадобится решать уравнения вида

$$(a + {}_2x)h - {}_2xh = b.$$

Решение этого уравнения при $\|\delta_0(a)\| = k$ сведется к решению 2^k систем уравнений (17) точно так же, как уравнение (13) сводилось к системам уравнений вида (2). В матрице $Q_{2,2}^{(h)}$ число строк, совпадающих со строками матрицы $P^{(h)}$, будет в общем случае значительно меньше, чем в матрице $Q_{2,1}^{(h)}$, поскольку для указанного совпадения, кроме условия $\|\delta_0(a)\| = 0$, необходимо еще условие $\|\delta_0((a + {}_2x)h)\| = 0$. В этом случае найти точное значение или хорошие оценки для величины $\Delta(G_2 h G_2)$ еще более затруднительно.

5. О некоторых системах подстановок типа $G_n h G_1$

Приведем еще серию подстановок вида $G_n h_m G_1$ с разностной характеристикой $\Delta(G_n h_m G_1) \leq 4$.

Зафиксируем произвольно примитивный корень θ поля F_n и для каждого из чисел $m = 1, 2, \dots, 2^n - 2$ определим подстановку h_m , положив $0h_m = 0$ и $xh_m = \theta^{x+m}$ при $x \in (Z/2^n)^*$.

Утверждение 8. Для любой из определенных выше подстановок h_m выполняются неравенства $3 \leq \Delta(G_n h_m G_1) \leq 4$.

Доказательство. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что если $x \neq 0$, $a + {}_n x \neq 0$ и $a > 1$, то

$$\Delta_a = (a + {}_n x)h_m \oplus xh_m = \theta^{x+m}(\theta^a \oplus 1) \text{ при } x = 1, 2, \dots, 2^n - a - 1, \quad (18)$$

$$\Delta_a = (a + {}_n x)h_m \oplus xh_m = \theta^{x+m}(\theta^{a-1} \oplus 1) \text{ при } x = 2^n - a + 1, 2^n - a + 2, \dots, 2^n - 1. \quad (19)$$

При $a = 1$ множества значений x и Δ_a из (19) являются пустыми. Если $x = 0$ или $x = -{}_n a$, то Δ_a равно соответственно θ^{m+a} и θ^{m-a+1} .

Очевидно, что при любом a все значения разности Δ_a из (18) различны, и то же самое верно для значений разности Δ_a из (19). Таким образом, в любом случае $\Delta(G_n h_m G_1) \leq 4$. Покажем, что $\Delta(G_n h_m G_1) \geq 3$. Легко видеть, что равенство $\theta^{m-a+1} = \theta^{m+a}$ выполняется лишь при $a = 2^{n-1}$, и значит, при $a \neq 2^{n-1}$ элементы θ^{m+a} и θ^{m-a+1} различны. Теперь покажем, что найдется такое $a \neq 2^{n-1}$, при котором элементы θ^{m+a} и θ^{m-a+1} не содержатся среди значений Δ_a из (18). Допустим, что

$$\theta^{x+m}(\theta^a \oplus 1) = \theta^{a+m}. \quad (20)$$

Отсюда при $\theta^x \neq 1$, т. е. при $x \neq 0, 2^n - 1$, находим

$$\theta^a = \frac{1}{(1 \oplus 1/\theta^x)}. \quad (21)$$

Правая часть этого равенства принимает $2^n - 2$ различных значений из F_n^* , когда x пробегает значения $1, 2, \dots, 2^n - 2$. Поэтому, выбрав любое значение x из (19), отличное от $2^n - 1$, мы из (20) найдем a , при котором элемент θ^{m+a} не содержится среди разностей из (18). Число указанных значений x , а потому и соответствующих значений a , равно $(2^n - 1) - (2^n - a) - 1 = a - 2$. Заметим еще, что равенство (20) при $x = 2^n - 1$ не выполняется. Таким образом, найдется $a - 1$ значений a при которых θ^{m+a} не содержится среди разностей из (18).

Аналогично доказывается, что число значений a , при которых элемент θ^{m-a+1} не содержится среди разностей из (18), также равно $a - 1$. Следовательно, найдется значение $a > 3$, при котором элементы θ^{m+a} и θ^{m-a+1} различны и не содержатся среди разностей из (18) и (19). Следовательно, $\Delta(G_n h_k G_1) \geq 3$, и утверждение доказано.

Замечание. Система подстановок $G_n h_m G_1$ при $m = 0$ исследовалась в [5], в частности, в этом случае указаны условия, при которых $\Delta(G_n h_0 G_1) = 3$.

Для сравнения систем подстановок типа $G_r h_s G_s$ с точки зрения их перемешивающих свойств приведем таблицу некоторых параметров для систем подстановок поля $GF(2^8)$, используемого в *AES*, при $h_1 = \tau$ и $h_2(x) = x^7$.

Таблица 1

$G_1 h_1 G_1$	4	128	(256, 528)	272
$G_2 h_1 G_1$	5	82	(194, 370)	176
$G_4 h_1 G_1$	7	85	(203, 338)	135
$G_8 h_1 G_1$	6	87	(199, 317)	118
$G_4 h_1 G_4$	8	93	(196, 554)	358
$G_8 h_1 G_8$	6	93	(191, 566)	375
$G_1 h_2 G_1$	6	156	(176, 536)	360
$G_2 h_2 G_1$	7	100	(170, 398)	228
$G_4 h_2 G_1$	7	95	(185, 360)	175
$G_8 h_2 G_1$	7	94	(186, 346)	180
$G_4 h_2 G_4$	7	94	(185, 327)	142
$G_8 h_2 G_8$	7	93	(194, 322)	128

Таблица 1 содержит 5 столбцов. В 1-м указана система подстановок $G_r h_i G_s$, во 2-м — максимальный элемент матрицы $Q_{r,s}^{(h)}$, в 3-м — среднее число нулей по строкам матрицы $Q_{r,s}^{(h)}$, в 4-м — минимальный и максимальный элементы матрицы $(Q_{r,s}^{(h)})^2$, в 5-м — разность элементов из столбца 4.

Из таблицы 1 видно, что с точки зрения числа ненулевых элементов по строкам и разности между максимальным и минимальным элементами квадратов матриц системы $G_2 h G_1$ значительно лучше соответствующих систем $G_1 h G_1$ и для $h = \tau$, и для $h(x) = x^7$. Максимальный элемент матриц в последних случаях на единицу больше, однако встечается он в матрицах весьма редко. Так, например, в матрице для системы $G_2 \tau G_1$ максимальный элемент 5 встречается лишь 3 раза.

Сравним характер связей между входами и выходами в системах $G_1 h G_1$ и $G_2 h G_1$. В первом случае на вход подстановки h поступает элемент $a \oplus x$, и если y — выход, то связь между x и y выражается равенством $x \oplus y h^{-1} = a$. Во втором случае на вход поступает элемент $a +_2 x$, и связь между x и y выражается равенством $x \oplus c_{a,x} \oplus y h^{-1} = a$, которое в отличие от первого случая содержит функцию $c_{a,x}$ (см. (14)). В частности, при $h = \tau$ очень простое соотношение $(a \oplus x)y = 1$ в первом случае заменится более сложным во втором. Заметим, что матрица $Q^{(\tau)}$ в отличие от матрицы $P^{(\tau)}$

не симметрична и в ней не наблюдается каких либо структурных особенностей. Строки в матрице $(Q^{(\tau)})^2$, как и в матрице $(P^{(\tau)})^2$, не содержат нулей.

Сделаем одно замечание. Линейная характеристика подстановки h при ее использовании в системе $G_1 h G_1$ обычно определяется как

$$L_h = \max_{a,b} |\{x : (a, h(x)) = (b, x)\}|,$$

где $a = (a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$, $b = (b_{n-1}, \dots, b_1, b_0)$, $x = (x_{n-1}, \dots, x_1, x_0)$ — двоичные записи элементов a, b, x , $h(x) = (h_{n-1}(x), \dots, h_1(x), h_0(x))$ — координатная форма подстановки h , а под $(\cdot, \cdot)$ понимается скалярное произведение векторов над полем $GF(2)$ в ортонормированном базисе.

Так как в системе $G_2 h G_1$ после подстановки h применяется операция $\oplus$, то при использовании подстановки h в системе $G_2 h G_1$ в качестве линейной характеристики естественно принять ту же самую величину L_h .

В заключение приведем для наглядности одну строку матрицы $G_2 \tau G_1$.

```

1 3 2 0 2 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 2 1 3 0 0 2 0 1 2 3 1 1 1 0 2 1 2 1 0 1 1 1 1 1 1 1 2
2 0 2 2 2 1 1 2 0 0 2 1 1 1 1 2 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 2 3 2 2 0 1 2 0 1 1
2 1 2 1 2 0 1 1 0 1 0 1 2 1 0 0 1 2 2 0 1 2 0 1 3 1 0 0 1 0 1 0 2 2 3 1 0 1 2 0 3 3 1 1
1 0 0 2 1 2 0 0 0 2 0 0 1 1 0 1 3 1 2 2 0 0 2 2 1 1 1 0 1 0 1 2 1 1 0 1 2 0 2 0 0 0 1 0
3 0 2 0 0 0 1 1 0 1 3 1 2 1 2 2 2 1 0 1 0 2 0 1 1 3 1 0 0 2 1 1 1 2 1 1 0 2 0 1 2 2 1 0
2 0 0 1 0 0 2 0 1 2 1 1 3 0 1 0 1 0 2 2 0 1 1 2 2 1 1 1 2 1 0 0 1 1 2 1

```

Из приведенных результатов о системе подстановок $G_2 h G_1$ следует, что она, допуская реализацию примерно той же сложности, что и система $G_1 h G_1$, обладает по сравнению с ней лучшими криптографическими качествами.

В заключение выражаю признательность рецензенту данной работы В. А. Шишкину за ряд ценных замечаний.

Список литературы

1. Сачков, В. Н. Цепи Маркова итерационных систем преобразований // В сб.: Труды по дискретной математике, т. 6. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — С. 165–183.
2. Степанов, С. А. Арифметика алгебраических кривых. — М.: Наука, 1991.
3. Тужилин, М. Э. Почти совершенные нелинейные функции // Прикладная дискретная математика. — 2009. — № 3. — С. 14–20.
4. Лидл, Р., Нидеррайтер, Г. Конечные поля, т. 2. — М.: Мир, 1988.

5. *Agievich, C., Afonenko, A.* On the properties of exponential substitutions // Proc. Nat. Acad. Sci. of the Republic of Belarus. Physics and Math. Ser. — 2005. — № 1. — P. 106–112.
6. *Budaghyan, L., Carlet, C., Leandr, G.* A class of quadratic APN binomials inequivalent to power functions // Cryptology ePrint Archive, 2006/428.
7. *Dickson, L. E.* The analytic representation of substitutions on a power of a prime number of letters with a discussion of the linear group // Ann. Math. — 1897. — V. 11. № 1/6. — P. 65–120, 161–183.
8. *Nyberg, K., Knudsen, L. R.* Provable security against differential cryptanalysis // CRYPTO'92. Lect. Notes Comput. Sci. — 1993. — V. 740. — P. 566–574.
9. *Nyberg, K.* Differentially uniform mappings for cryptography // EUROCRYPT'93. Lect. Notes Comput. Sci. — 1994. — V. 765. — P. 55–64.
10. *Hawkes, P., O'Connor, L.* XOR and non-XOR differential probabilities // EUROCRYPT'99. Lect. Notes Comput. Sci. — 1999. — V. 1592. — P. 272–285.