М. Н. Феллер, Краевые задачи для нелинейного гиперболического уравнения с переменными коэффициентами и лапласианом Леви,
Матем. заметки, 2014, том 96, выпуск 3, 440–449

https://www.mathnet.ru/mzm10344

Математические заметки

Том 96 выпуск 3 сентябрь 2014

УДК 517.9

Краевые задачи для нелинейного гиперболического уравнения с переменными коэффициентами и лапласианом Леви

М. Н. Феллер

Для нелинейного гиперболического уравнения с переменными коэффициентами и с бесконечномерным лапласианом Леви Δ_L

$$\beta\biggl(\sqrt{2}\,\|x\|_H\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\biggr)\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2}+\alpha(U(t,x))\biggl[\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\biggr]^2=\Delta_L U(t,x)$$

приведены алгоритмы решения краевой задачи $U(0,x)=u_0$, $U(t,0)=u_1$ и краевой внешней задачи $U(0,x)=v_0$, $U(t,x)|_\Gamma=v_1$, $\lim_{\|x\|_H\to\infty}U(t,x)=v_2$ в классе функций Шилова, зависящих от параметра t.

Библиография: 8 названий.

DOI: 10.4213/mzm10344

1. Введение. Теории линейных гиперболических уравнений с лапласианом Леви посвящены работы [1]–[3].

Нелинейные гиперболические уравнения с лапласианом Леви встречаются в статье [4], в которой рассматривались краевые задачи для уравнения с дивергентной частью

$$\frac{\partial}{\partial t}\biggl[k(U(t,x))\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\biggr]=\Delta_L U(t,x),$$

и в статье [5], в которой рассматривались краевые задачи для уравнения

$$\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2}+\alpha(U(t,x))\biggl[\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\biggr]^2=\Delta_L U(t,x).$$

В настоящей статье в классе функций Шилова, зависящих от вещественого параметра t, $0\leqslant t<\infty$, приведены алгоритм решения краевой задачи для нелинейного гиперболического уравнения с переменными коэффициентами и с лапласианом Леви

$$\beta\biggl(\sqrt{2}\,\|x\|_H\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\biggr)\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2}+\alpha(U(t,x))\biggl[\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\biggr]^2=\Delta_L U(t,x),\qquad t>0,\quad x\in H,$$

$$U(0,x)=u_0,\qquad U(t,0)=u_1$$

и алгоритм решения краевой внешней задачи для нелинейного гиперболического уравнения с переменными коэффициентами и с лапласианом Леви

$$\beta\biggl(\sqrt{2}\,\|x\|_H\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\biggr)\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2}+\alpha(U(t,x))\biggl[\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\biggr]^2=\Delta_L U(t,x),$$
$$t>0,\quad x\in\Omega',$$
$$U(0,x)=v_0,\qquad U(t,x)|_\Gamma=v_1,\qquad \lim_{\|x\|_H\to\infty}U(t,x)=v_2,$$

где $\Gamma\cup\Omega'=\{x\in H:\|x\|_H^2\geqslant R^2\}$.

2. Предварительные сведения. Пусть H – счетномерное вещественное гильбертово пространство. Рассмотрим скалярные функции $F(x)$ на H, $x\in H$.

Бесконечномерный лапласиан ввел Леви [6]. Для функции $F(x)$, дважды сильно дифференцируемой в точке x_0, лапласиан Леви в этой точке определяется, если он существует, формулой

$$\Delta_L F(x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(F''(x_0)f_k,f_k)_H, \tag{1}$$

где $F''(x)$ – гессиан функции $F(x)$, $\{f_k\}_1^\infty$ – выбранный ортонормированный базис в H.

Приведем свойство лапласиана Леви (1), полученное в [6], которое понадобится в дальнейшем (см. также [7]). Пусть функция

$$F(x)=f(V_1(x),\dots,V_m(x)),$$

где $f(v_1,\dots,v_m)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция m переменных в области значений $\{V_1(x),\dots,V_m(x)\}\subset\mathbb{R}^{\mathrm{m}}$. Пусть $V_k(x)$ – дважды сильно дифференцируемые функции и $\Delta_L V_k(x)$ существует, $k=1,\dots,m$. Тогда $\Delta_L F(x)$ существует и

$$\Delta_L F(x)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial v_k}\bigg|_{v_k=V_k(x)}\Delta_L V_k(x). \tag{2}$$

Обозначим через C^{sh} *шиловский класс* функций – совокупность функций вида

$$F(x)=f\biggl((a_1,x)_H,\dots,(a_m,x)_H,\frac{\|x\|_H^2}{2}\biggr),$$

где $a_1,\dots,a_m$ – некоторые элементы пространства H, $f(\xi_1,\dots,\xi_m,\zeta)$ – функция $m+1$ переменных, определенная и непрерывная в области $\mathbb{R}^{\mathrm{m}+1}$.

Обозначим через C^* подмножество функции из C^{sh}, дважды непрерывно дифференцируемых по аргументу $\|x\|_H^2/2$.

Для $F(x)\in C^*$ имеет место формула [8]

$$\Delta_L F(x)=\frac{\partial f((a_1,x)_H,\dots,(a_m,x)_H,\zeta)}{\partial\zeta}\bigg|_{\zeta=\|x\|_H^2/2}. \tag{3}$$

Лапласиан Леви (1) в шиловском классе функций не зависит от выбора базиса.

Обозначим через $\overline{\Omega} = \{x \in H : \|x\|_H^2 \leqslant R^2\}$ – шар, а через Ω' – множество точек, внешних по отношению к шару:

$$\Omega' = \{x \in H : \|x\|_H^2 > R^2\}, \qquad \Gamma = \{x \in H : \|x\|_H^2 = R^2\}.$$

Введем функцию

$$S(x) = \frac{\|x\|_H^2 - R^2}{2}.$$

Функция $S(x)$ обладает такими свойствами:

$$S(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega', \qquad S(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \qquad \Delta_L S(x) = 1.$$

3. Краевая задача. Рассмотрим задачу

$$\beta\biggl(\sqrt{2}\,\|x\|_H \frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\biggr)\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2} + \alpha(U(t,x))\biggl[\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\biggr]^2 = \Delta_L U(t,x), \qquad t > 0, \quad x \in H, \tag{4}$$

$$U(0,x) = u_0, \qquad U(t,0) = u_1, \tag{5}$$

где $\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$ – заданные функции на $\mathbb{R}^1$, числа u_0, u_1 заданы.

Теорема 1. *Пусть $\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$ – непрерывные функции на $\mathbb{R}^1$. Тогда решение задачи (4), (5) равно*

$$\Phi\biggl(\frac{t}{2\sqrt{\|x\|_H^2/2}}, U(t,x)\biggr) = 0, \tag{6}$$

где $\Phi(z,\varphi(z)) = 0$ – решение в неявном виде краевой задачи для обыкновенного дифференциального нелинейного уравнения второго порядка

$$\beta\biggl(\frac{d\varphi(z)}{dz}\biggr)\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} + \alpha(\varphi(z))\biggl[\frac{d\varphi(z)}{dz}\biggr]^2 + 2z\,\frac{d\varphi(z)}{dz} = 0, \tag{7}$$

$$\varphi(0) = u_0, \qquad \varphi(z)|_{z=\infty} = u_1. \tag{8}$$

Решение задачи (4), (5) существует (существует и единственно), если существует (существует и единственно) решение задачи (7), (8).

Доказательство. Согласно формуле (3) уравнение (4) и условия (5) принимают вид

$$\beta\biggl(2\sqrt{\varsigma}\frac{\partial u(t,\varsigma)}{\partial t}\biggr)\frac{\partial^2 u(t,\varsigma)}{\partial t^2} + \alpha(u(t,\varsigma))\biggl[\frac{\partial u(t,\varsigma)}{\partial t}\biggr]^2 = \frac{\partial u(t,\varsigma)}{\partial \varsigma}\bigg|_{\varsigma=\|x\|_H^2/2}, \tag{9}$$

$$u(0,\varsigma) = u_0, \qquad u(t,0) = u_1. \tag{10}$$

Уравнение (9) не изменяется при преобразовании переменных $\bar{t} = ct$, $\bar{\varsigma} = c^2\varsigma$ при любых t, ς, c. Действительно, с одной стороны,

$$\frac{\partial u(t,\varsigma)}{\partial t} = c\,\frac{\partial u(t,\varsigma)}{\partial \bar{t}}, \qquad \frac{\partial u(t,\varsigma)}{\partial \varsigma} = c^2\frac{\partial u(t,\varsigma)}{\partial \bar{\varsigma}}, \qquad \frac{\partial^2 u(t,\varsigma)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u(t,\varsigma)}{\partial \bar{t}^2}$$

и из (9) имеем

$$\beta\biggl(2\sqrt{\frac{\bar\varsigma}{c^2}}\,c\,\frac{\partial u(t,\varsigma)}{\partial\bar t}\biggr)c^2\frac{\partial^2u(t,\varsigma)}{\partial\bar t^2}+\alpha(u(t,\varsigma))\biggl[c\,\frac{\partial u(t,\varsigma)}{\partial\bar t}\biggr]^2=c^2\frac{\partial u(t,\varsigma)}{\partial\bar\varsigma}\,.$$

Сокращая на c^2, получим

$$\beta\biggl(\sqrt{\bar\varsigma}\frac{\partial u(t,\varsigma)}{\partial\bar t}\biggr)\frac{\partial^2u(t,\varsigma)}{\partial\bar t^2}+\alpha(u(t,\varsigma))\biggl[\frac{\partial u(t,\varsigma)}{\partial\bar t}\biggr]^2=\frac{\partial u(t,\varsigma)}{\partial\bar\varsigma}\,. \tag{11}$$

С другой стороны, уравнение (9) имеет место для любых t, ς, а значит, и для $\bar t$, $\bar\varsigma$, поэтому

$$\beta\biggl(\sqrt{\bar\varsigma}\frac{\partial u(\bar t,\bar\varsigma)}{\partial\bar t}\biggr)\frac{\partial^2u(\bar t,\bar\varsigma)}{\partial\bar t^2}+\alpha(u(\bar t,\bar\varsigma))\biggl[\frac{\partial u(\bar t,\bar\varsigma)}{\partial\bar t}\biggr]^2=\frac{\partial u(\bar t,\bar\varsigma)}{\partial\bar\varsigma}\,. \tag{12}$$

Не изменяются и условия (10).

Сравнивая равенства (11) и (12), имеем, что $u(t,\varsigma)=u(\bar t,\bar\varsigma)$, т.е.

$$u(t,\varsigma)=u(ct,c^2\varsigma).$$

Полагая $c=1/(2\sqrt{\varsigma})$, получим, что

$$u(t,\varsigma)=u\biggl(\frac{t}{2\sqrt{\varsigma}},\frac14\biggr)=\varphi\biggl(\frac{t}{2\sqrt{\varsigma}}\biggr)=\varphi(z),\qquad z=\frac{t}{2\sqrt{\varsigma}},\quad \zeta=\frac{\|x\|_H^2}{2}\,. \tag{13}$$

То есть $u(t,\varsigma)$ зависит только от аргумента $z=t/(2\sqrt{\varsigma})$.

Из (13) имеем, что

$$\frac{\partial u(t,\varsigma)}{\partial t}=\frac{1}{2\sqrt{\varsigma}}\frac{d\varphi(z)}{dz},\qquad \frac{\partial u^2(t,\varsigma)}{\partial t^2}=\frac{1}{4\varsigma}\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2},\qquad \frac{\partial u(t,\varsigma)}{\partial\varsigma}=-\frac{z}{2\varsigma}\frac{d\varphi(z)}{dz}\,.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (9) и сокращая на $1/(4\varsigma)$, получим для функции $\varphi(z)$ обыкновенное дифференциальное нелинейное уравнение второго порядка (7)

$$\beta\biggl(\frac{d\varphi(z)}{dz}\biggr)\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2}+\alpha(\varphi(z))\biggl[\frac{d\varphi(z)}{dz}\biggr]^2+2z\,\frac{d\varphi(z)}{dz}=0,$$

а из условий (10) (поскольку $z=t/(2\sqrt{\zeta})$, $\zeta=\|x\|_H^2/2$) вытекают условия (8)

$$\varphi(0)=u_0,\qquad \varphi(z)|_{z=\infty}=u_1.$$

Теперь, если $\Phi(z,\varphi(z))=0$ – решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения (7), (8), то поскольку $\varphi(z)=u(t,\varsigma)$, а $z=t/(2\sqrt{\varsigma})$, $\varsigma=\|x\|_H^2/2$ и, кроме того, $u(t,\varsigma)|_{\varsigma=\|x\|_H^2/2}=U(t,x)$, мы получаем, что решение задачи (4), (5) равно (6): $\Phi(t/2\sqrt{\|x\|_H^2/2},U(t,x))=0$.

Следствие 1. *При $\beta(\xi)=1$ решение задачи*

$$\frac{\partial^2U(t,x)}{\partial t^2}+\alpha(U(t,x))\biggl[\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\biggr]^2=\Delta_LU(t,x),\qquad t>0,\quad x\in H,$$
$$U(0,x)=u_0,\qquad U(t,0)=u_1$$

(в неявном виде) дается формулой

$$\int_{u_0}^{U(t,x)} e^{\int_{u_0}^{s}\alpha(\xi)\,d\xi}\,ds\left[\int_{u_0}^{u_1} e^{\int_{u_0}^{\xi}\alpha(\xi)\,d\xi}\,ds\right]^{-1}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{t/2\sqrt{\|x\|_H^2/2}} e^{-p^2}\,dp.$$

Действительно, в случае $\beta(\xi)=1$ уравнение (7) равно

$$\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2}+\alpha(\varphi(z))\left[\frac{d\varphi(z)}{dz}\right]^2+2z\,\frac{d\varphi(z)}{dz}=0. \tag{14}$$

Из (14), разделив на $\varphi'(z)$ и проинтегрировав, получим уравнение первого порядка, и задача (7), (8) принимает вид

$$\ln\varphi'(z)=-\int\alpha(\varphi)\,d\varphi-z^2+\ln C_0,$$
$$\varphi(0)=u_0,\qquad \varphi(z)|_{z=\infty}=u_1.$$

Отсюда $\varphi'(z)e^{\int\alpha(\varphi)\,d\varphi}=C_0e^{-z^2}$ и интегрируя, получим, что

$$\int e^{\int\alpha(\varphi)\,d\varphi}\,d\varphi=C_0\int e^{-z^2}\,dz+C_1.$$

С учетом краевых условий имеем

$$\int_{u_0}^{\varphi(z)} e^{\int_{u_0}^{s}\alpha(\xi)\,d\xi}\,ds-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{u_0}^{u_1}\exp\biggl(\int_{u_0}^{s}\alpha(\xi)\,d\xi\biggr)\,ds\int_0^z e^{-p^2}\,dp=0.$$

Но

$$z=\frac{t}{2\sqrt{\|x\|_H^2/2}},\qquad \varphi(z)=u(t,\varsigma)|_{\varsigma=\|x\|_H^2/2}=U(t,x).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\Phi\biggl(\frac{t}{2\sqrt{\|x\|_H^2/2}},U(t,x)\biggr)&\\ \equiv\int_{u_0}^{U(t,x)}&\exp\biggl(\int_{u_0}^{s}\alpha(\xi)\,d\xi\biggr)\,ds\\ &-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{u_0}^{u_1}\exp\biggl(\int_{u_0}^{s}\alpha(\xi)\,d\xi\biggr)\,ds\int_0^{t/(2\sqrt{\|x\|_H^2/2})} e^{-p^2}\,dp=0.\end{aligned}$$

4. Краевая задача (внешняя). Рассмотрим задачу

$$\beta\biggl(\sqrt{2}\,\|x\|_H\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\biggr)\frac{\partial^2U(t,x)}{\partial t^2}+\alpha(U(t,x))\left[\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right]^2=\Delta_LU(t,x),\qquad t>0,\quad x\in\Omega', \tag{15}$$

$$U(0,x)=v_0,\qquad U(t,x)|_\Gamma=v_1,\qquad \lim_{\|x\|_H\to\infty}U(t,x)=v_2, \tag{16}$$

где $\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$ – заданные функции на $\mathbb{R}^1$, числа v_0, v_1, v_2 заданы, а $\Gamma\cup\Omega'=\{x\in H:\|x\|_H^2\geqslant R^2\}$.

Теорема 2. *Пусть $\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$ – непрерывные функции на $\mathbb{R}^1$. Тогда решение задачи (15), (16) равно*

$$\Phi\biggl(\frac{t}{2\sqrt{S(x)}}, U(t,x)\biggr) = 0, \tag{17}$$

где $\Phi(w,\varphi(w)) = 0$ – решение в неявном виде краевой задачи для обыкновенного дифференциального нелинейного уравнения второго порядка

$$\beta\biggl(\frac{d\varphi(w)}{dw}\biggr)\frac{d^2\varphi(w)}{dw^2} + \alpha(\varphi(w))\biggl[\frac{d\varphi(w)}{dw}\biggr]^2 + 2w\,\frac{d\varphi(w)}{dw} = 0, \tag{18}$$

$$\varphi(0) = v_0, \qquad \varphi(w)|_{w=\infty} = v_1. \tag{19}$$

Здесь $S(x) = (\|x\|_H^2 - R^2)/2$.

Решение задачи (15), (16) существует (существует и единственно), если существует (существует и единственно) решение задачи (18), (19).

Доказательство. Согласно формуле (2) при $m = 1$ уравнение (15) принимает вид

$$\beta\biggl(2\sqrt{\eta}\,\frac{\partial u(t,\eta)}{\partial t}\biggr)\frac{\partial^2 u(t,\eta)}{\partial t^2} + \alpha(u(t,\eta))\biggl[\frac{\partial u(t,\eta)}{\partial t}\biggr]^2 = \frac{\partial u(t,\eta)}{\partial \eta}\bigg|_{\eta=S(x)} \Delta_L S(x).$$

Но $S(x) = (\|x\|_H^2 - R^2)/2$ и, значит, $\Delta_L S(x) = \Delta_L \|x\|_H^2/2 = 1$. Поэтому имеем

$$\beta\biggl(2\sqrt{\eta}\frac{\partial u(t,\eta)}{\partial t}\biggr)\frac{\partial^2 u(t,\eta)}{\partial t^2} + \alpha(u(t,\eta))\biggl[\frac{\partial u(t,\eta)}{\partial t}\biggr]^2 = \frac{\partial u(t,\eta)}{\partial \eta}, \tag{20}$$

$$v(0,\eta) = v_0, \qquad v(t,0) = v_1. \tag{21}$$

Уравнение (20) и условия (21) не изменяются при преобразовании переменных $\overline{t} = ct$, $\overline{\eta} = c^2\eta$ при любых t, η, c. Поэтому

$$u(t,\eta) = u(ct, c^2\eta).$$

Полагая $c = 1/(2\sqrt{\eta})$, получим

$$u(t,\eta) = u\biggl(\frac{t}{2\sqrt{\eta}}, \frac{1}{4}\biggr) = \varphi\biggl(\frac{t}{2\sqrt{\eta}}\biggr) = \varphi(w), \qquad w = \frac{t}{2\sqrt{\eta}}, \quad \eta = S(x). \tag{22}$$

Из (22) имеем

$$\frac{\partial u(t,\eta)}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{\eta}}\frac{d\varphi(w)}{dw}, \qquad \frac{\partial^2 u(t,\eta)}{\partial t^2} = \frac{1}{4\eta}\frac{d^2\varphi(w)}{dw^2}, \qquad \frac{\partial u(t,\eta)}{\partial \eta} = -\frac{w}{2\eta}\frac{d\varphi(w)}{dw}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (20) и условия (21) и сокращая на $1/(4\eta)$, получим для функции $\varphi(w)$ обыкновенное дифференциальное нелинейное уравнение второго порядка (18)

$$\beta\biggl(\frac{d\varphi(w)}{dw}\biggr)\frac{d^2\varphi(w)}{dw^2} + \alpha(\varphi(w))\biggl[\frac{d\varphi(w)}{dw}\biggr]^2 + 2w\,\frac{d\varphi(w)}{dw} = 0,$$

а из условий (21) (поскольку $w = t/(2\sqrt{\eta})$, $\eta = S(x)$, а $S(x)|_\Gamma = 0$) следуют условия (19)

$$\varphi(0) = v_0, \qquad \varphi(w)|_{w=\infty} = v_1.$$

Теперь, если $\Phi(w, \varphi(w)) = 0$ – решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения (18), (19), то поскольку $\varphi(w) = u(t, \eta)$, а $w = t/(2\sqrt{\eta})$, $\eta = S(x)$ и, кроме того, $u(t,\eta)|_{\eta=S(x)} = U(t,x)$, мы получаем, что решение задачи (15), (16) равно (17): $\Phi(t/(2\sqrt{S(x)}\,), U(t,x)) = 0$.

Следствие 2. *При* $\beta(\xi) = 1$ *решение задачи*

$$\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2} + \alpha(U(t,x))\left[\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right]^2 = \Delta_L U(t,x), \qquad t > 0, \quad x \in \Omega',$$

$$U(0,x) = v_0, \qquad U(t,x)|_\Gamma = v_1, \qquad \lim_{\|x\|_H \to \infty} U(t,x) = v_2$$

(*в неявном виде*) *дается формулой*

$$\int_{v_0}^{U(t,x)} e^{\int_{v_0}^{s} \alpha(\xi)\,d\xi}\,ds\left[\int_{v_0}^{v_1} e^{\int_{v_0}^{\xi} \alpha(\xi)\,d\xi}\,ds\right]^{-1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{t/2\sqrt{S(x)}} e^{-p^2}\,dp,$$

где $S(x) = (\|x\|_H^2 - R^2)/2$, *а* $v_2 = v_0$.

Действительно, при $\beta(\xi) = 1$ уравнение (18) равно

$$\frac{d^2\varphi(w)}{dw^2} + \alpha(\varphi(w))\left[\frac{d\varphi(w)}{dw}\right]^2 + 2w\,\frac{d\varphi(w)}{dw} = 0. \tag{23}$$

Из (23), разделив на $\varphi'(w)$ и проинтегрировав, получим уравнение первого порядка и задача (18), (19) принимает вид

$$\ln\varphi'(w) = -\int \alpha(\varphi)\,d\varphi - w^2 + \ln C_0,$$

$$\varphi(0) = v_0, \qquad \varphi(w)|_{w=\infty} = v_1.$$

Отсюда $\varphi'(w)e^{\int \alpha(\varphi)\,d\varphi} = C_0 e^{-w^2}$ и интегрируя получим, что

$$\int e^{\int \alpha(\varphi)\,d\varphi}\,d\varphi = C_0 \int e^{-w^2}\,dw + C_1.$$

С учетом краевых условий имеем

$$\int_{v_0}^{\varphi(w)} e^{\int_{v_0}^{s} \alpha(\xi)\,d\xi}\,ds - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{v_0}^{v_1} e^{\int_{v_0}^{s} \alpha(\xi)\,d\xi}\,ds \int_0^w e^{-p^2}\,dp = 0.$$

Но $w = t/(2\sqrt{S(x)}\,)$, $\varphi(w) = u(t,\eta)|_{\eta=S(x)} = U(t,x)$. Поэтому

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{t}{2\sqrt{S(x)}}, U(t,x)\right) &\equiv \int_{v_0}^{U(t,x)} \exp\left(\int_{v_0}^{s} \alpha(\xi)\,d\xi\right) ds \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{v_0}^{v_1} \exp\left(\int_{v_0}^{s} \alpha(\xi)\,d\xi\right) ds \int_0^{t/2\sqrt{S(x)}} e^{-p^2}\,dp = 0.\end{aligned}$$

5. Примеры.

Пример 1. Решить краевую задачу

$$\left(\sqrt{2}\,\|x\|_H\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right)^{-1}\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2}-2U^{-3}(t,x)\left[\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right]^2=\Delta_L U(t,x),\qquad t>0,\quad x\in H, \tag{24}$$

$$U(0,x)=e^{\pi/3\sqrt{3}},\qquad U(t,0)=e^{\pi/\sqrt{3}}. \tag{25}$$

Решение. Для уравнения (24) дифференциальное уравнение второго порядка (7) равно

$$\frac{1}{\varphi'(z)}\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2}-\frac{2}{\varphi^3(z)}\left[\frac{d\varphi(z)}{dz}\right]^2+2z\frac{d\varphi(z)}{dz}=0.$$

Разделив это уравнение на $\varphi'(z)$ и проинтегрировав, получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$-\int\frac{d\varphi'}{\varphi'^2}+2\int\frac{d\varphi}{\varphi^3}-z^2=C_0.$$

Отсюда имеем (полагая $C_0=0$)

$$\frac{dz}{d\varphi}=\frac{1+\varphi^2z^2}{\varphi^2}. \tag{26}$$

Согласно (25) краевые условия (8) запишутся в виде

$$\varphi(0)=e^{\pi/(3\sqrt{3})},\qquad \varphi(z)|_{z=\infty}=e^{\pi/\sqrt{3}}. \tag{27}$$

Полагая теперь $z=v/\varphi$, имеем, что $dz/d\varphi=((dv/d\varphi)\varphi-v)/\varphi^2$. Подставляя значения z и $dz/d\varphi$ в (26), получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\varphi\frac{dv}{d\varphi}=v^2+v+1.$$

Его решение

$$\varphi(z)=C_1\exp\left(\int\frac{dv}{v^2+v+1}\right)=C_1\exp\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}(2v+1)\right),$$

(так как дискриминант уравнения $v^2+v+1=0$ $D=-3<0$).

Поскольку $v=z\varphi(z)$, то получим (полагая $C_1=1$), что решение задачи (26), (27) равно

$$\varphi(z)=\exp\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}(2z\varphi(z)+1)\right).$$

Учитывая, что $z=t/(2\sqrt{\|x\|_H^2/2})$, $\varphi(z)=u(t,\zeta)|_{\zeta=\|x\|_H^2/2}=U(t,x)$, получим решение (в неявном виде) задачи (24), (25):

$$\Phi\left(\frac{t}{2\sqrt{\|x\|_H^2/2}},U(t,x)\right)\equiv U(t,x)-\exp\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{t}{2\sqrt{\|x\|_H^2/2}}U(t,x)+\frac{1}{2}\right)\right\}=0.$$

Пример 2. Решить краевую задачу

$$\left(\sqrt{2}\,\|x\|_H \frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right)^{-1} \frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2} + 2U^{-3}(t,x)\left[\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right]^2 = \Delta_L U(t,x), \qquad t>0, \quad x\in\Omega', \tag{28}$$

$$U(0,x) = \exp\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathrm{Arcth}\,\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \qquad U(t,x)|_\Gamma = 1,$$
$$\lim_{\|x\|_H\to\infty} U(t,x) = \exp\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathrm{Arcth}\,\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \tag{29}$$

где $\Gamma\cup\Omega' = \{x\in H : \|x\|_H^2 \geqslant R^2\}$.

Решение. Для уравнения (28) дифференциальное уравнение второго порядка (18) равно

$$\frac{1}{\varphi'(w)}\frac{d^2\varphi(w)}{dw^2} + \frac{2}{\varphi^3(w)}\left[\frac{d\varphi(w)}{dw}\right]^2 + 2w\,\frac{d\varphi(w)}{dw} = 0.$$

Разделив это уравнение на $\varphi'(w)$ и проинтегрировав, получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\int \frac{d\varphi'}{\varphi'^2} + 2\int\frac{d\varphi}{\varphi^3} + w^2 = C_0.$$

Отсюда имеем (полагая $C_0 = 0$)

$$\frac{dw}{d\varphi} = \frac{-1+\varphi^2 w^2}{\varphi^2}\,. \tag{30}$$

Согласно (29) краевые условия (19) запишутся

$$\varphi(0) = \exp\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathrm{Arcth}\,\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \qquad \varphi(w)|_{w=\infty} = 1. \tag{31}$$

Полагая теперь $w = v/\varphi$ имеем, что $dw/d\varphi = ((dv/d\varphi)\varphi - v)/\varphi^2$. Подставляя значения w и $dw/d\varphi$ в (30), получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\varphi\,\frac{dv}{d\varphi} = v^2 + v - 1.$$

Его решение

$$\varphi(w) = C_1 \exp\left(\int\frac{dv}{v^2+v-1}\right) = C_1\exp\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathrm{Arcth}\,\frac{1}{\sqrt{5}}(2v+1)\right),$$

(так как дискриминант уравнения $v^2+v-1=0$ $D=5>0$).

Поскольку $v = w\varphi(w)$, то получим (полагая $C_1=1$), что решение задачи (30), (31) равно

$$\varphi(w) = \exp\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathrm{Arcth}\,\frac{1}{\sqrt{5}}(2w\varphi(w)+1)\right).$$

Учитывая, что $w = t/(2\sqrt{S(x)})$, $\varphi(w) = u(t,\eta)|_{\eta=S(x)} = U(t,x)$, и что $S(x) = (\|x\|_H^2 - R^2)/2$, получим решение (в неявном виде) задачи (28), (29):

$$\Phi\left(\frac{t}{2\sqrt{S(x)}}, U(t,x)\right) \equiv U(t,x) - \exp\left\{-\frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathrm{Arcth}\,\frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{t}{2\sqrt{S(x)}}U(t,x)+\frac{1}{2}\right)\right\} = 0.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] С. А. Альбеверио, Я. И. Белопольская, М. Н. Феллер, "Задача Коши для волнового уравнения с лапласианом Леви", *Матем. заметки*, **87**:6 (2010), 803–813.

[2] М. Н. Феллер, "Краевые задачи для волнового уравнения с лапласианом Леви в классе Гато", *Укр. матем. журн.*, **61**:11 (2009), 1564–1574.

[3] S. Albeverio, Ya. I. Belopolskaya, M. N. Feller, "Boundary problems for the wave equation with the Lévy Laplacian in Shilov's class", *Methods Funct. Anal. Topology*, **16**:3 (2010), 197–202.

[4] М. Н. Феллер, "Краевые задачи для нелинейного гиперболического уравнения с дивергентной частью и с лапласианом Леви", *Укр. матем. журн.*, **64**:2 (2012), 237–244.

[5] И. И. Ковтун, М. Н. Феллер, "Краевые задачи для нелинейного гиперболического уравнения с лапласианом Леви", *Укр. матем. журн.*, **64**:11 (2012), 1492–1499.

[6] P. Lévy, *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris, 1951.

[7] M. N. Feller, *The Lévy Laplacian*, Cambridge Tracts in Math., **166**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.

[8] Г. Е. Шилов, "О некоторых вопросах анализа в гильбертовом пространстве, I", *Функц. анализ и его прил.*, **1**:2 (1967), 81–90.

М. Н. Феллер
Украинский государственный НИИ "Ресурс"
E-mail: feller@otblesk.com

Поступило
22.06.2013
Исправленный вариант
14.10.2013