Е. А. Севостьянов, Об устранимых особенностях отображений, рост которых ограничен некоторой функцией, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 3, 448–461

https://www.mathnet.ru/mzm10406

Математические заметки

Том 97 выпуск 3 март 2015

УДК 517.5

Об устранимых особенностях отображений, рост которых ограничен некоторой функцией

Е. А. Севостьянов

В настоящей работе исследованы вопросы, связанные с локальным поведением дифференцируемых почти всюду отображений, обладающих N-, N^{-1}-, ACP-, и ACP^{-1}-свойствами, характеристика квазиконформности которых удовлетворяет определенным условиям на рост. Показано, что, если отображение такого типа растет в окрестности изолированной точки границы не быстрее некоторой функции радиуса шара, то эта точка является устранимой особой точкой отображения, либо полюсом.

Библиография: 18 названий.

DOI: 10.4213/mzm10406

1. Введение. Настоящая заметка посвящена поиску условий на отображение $f\colon D\setminus\{b\}\to\mathbb{R}^n$, заданное в окрестности точки b пространственной области $D\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, при которых это отображение продолжается в точку b непрерывным образом. Хорошо известно, что даже аналитическая функция $\varphi\colon D\setminus\{b\}\to\mathbb{C}$, $D\subset\mathbb{C}$, заданная в области $D\setminus\{b\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, вообще говоря, не продолжается в точку b по непрерывности ($\varphi(z)=\exp\{1/z\}$, $b=0$). Однако, как следует из результатов настоящей статьи, при определенных условиях на рост f (на рост φ) это, все же, справедливо. Отметим, что ниже рассматриваются более общие отображения, чем отображения с ограниченным искажением, включающие в себя, как подкласс, класс аналитических функций. Определение и примеры отображений с ограниченным искажением могут быть найдены, например, в монографии [1]. Другие результаты автора на данную тему могут быть найдены в статье [2] и недавно опубликованной работе [3], где рассматриваются немного другие условия на отображение. Отметим, что результаты настоящей статьи автоматически являются верными для конформных и квазиконформных отображений, более того, они справедливы также для более общих Q-гомеоморфизмов и кольцевых Q-гомеоморфизмов (см., например, [4]); однако, в этом случае никаких ограничений на рост отображений не требуется, так что указанные результаты содержательны лишь для отображений, не являющихся инъективными.

Всюду далее D – область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, m – мера Лебега $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{dist}(A,B)$ – евклидово расстояние между множествами $A,B\subset\mathbb{R}^n$,

$$\operatorname{dist}(A,B)=\inf_{x\in A,y\in B}|x-y|,$$

(x,y) обозначает (стандартное) скалярное произведение векторов $x,y\in\mathbb{R}^n$, $\operatorname{diam} A$ – евклидов диаметр множества $A\subset\mathbb{R}^n$,

$$B(x_0,r)=\{x\in\mathbb{R}^n : |x-x_0|<r\}, \qquad \mathbb{B}^n:=B(0,1),$$
$$S(x_0,r)=\{x\in\mathbb{R}^n : |x-x_0|=r\}, \qquad \mathbb{S}^{n-1}:=S(0,1),$$

ω_{n-1} означает площадь сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, Ω_n – объем единичного шара $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$, запись $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f, заданное в области D, непрерывно. Отображение $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ называется *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y\in\mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек, и *открытым*, если образ любого открытого множества $U\subset D$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что отображение $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ обладает *N-свойством Лузина*, или просто N-свойством, если из условия $m(E)=0$, $E\subset D$, следует, что $m(f(E))=0$. Аналогично, говорят, что отображение $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ обладает *N^{-1}-свойством*, если из условия $m(E)=0$, $E\subset\mathbb{R}^n$, следует, что $m(f^{-1}(E))=0$, где, как обычно, запись $f^{-1}(E)$ обозначает полный прообраз множества E при отображении f.

Кривой γ мы называем непрерывное отображение отрезка $[a,b]$ (открытого интервала (a,b), либо полуоткрытого интервала вида $[a,b)$ или $(a,b]$) в $\mathbb{R}^n$, $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$. Под семейством кривых Γ подразумевается некоторый фиксированный набор кривых γ, а $f(\Gamma)=\{f\circ\gamma \mid \gamma\in\Gamma\}$. Следующие определения могут быть найдены, например, [5; разд. 1–6, гл. I]. Борелева функция $\rho\colon\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если криволинейный интеграл первого рода от функции ρ по каждой (локально спрямляемой) кривой $\gamma\in\Gamma$ удовлетворяет условию $\int_\gamma\rho(x)\,|dx|\geqslant 1$. В этом случае мы пишем: $\rho\in\operatorname{adm}\Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma)=\inf_{\rho\in\operatorname{adm}\Gamma}\int_D\rho^n(x)\,dm(x).$$

Свойства модуля в некоторой мере аналогичны свойствам меры Лебега m в $\mathbb{R}^n$. Именно, модуль пустого семейства кривых равен нулю, $M(\varnothing)=0$, модуль обладает свойством монотонности относительно семейств кривых Γ_1 и Γ_2: из $\Gamma_1\subset\Gamma_2$ следует $M(\Gamma_1)\leqslant M(\Gamma_2)$, а также свойством полуаддитивности:

$$M\biggl(\bigcup_{i=1}^{\infty}\Gamma_i\biggr)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}M(\Gamma_i),$$

см. [5; теорема 6.2]. Говорят, что некоторое свойство выполнено для *почти всех* (*п.в.*) *кривых* области D, если оно имеет место для всех кривых, лежащих в D, кроме некоторого их семейства, модуль которого равен нулю.

Пусть $\Delta\subset\mathbb{R}$ – открытый интервал числовой прямой, $\gamma\colon\Delta\to\mathbb{R}^n$ – локально спрямляемая кривая. В таком случае, очевидно, существует единственная неубывающая функция длины $l_\gamma\colon\Delta\to\Delta_\gamma\subset\mathbb{R}$ с условием $l_\gamma(t_0)=0$, $t_0\in\Delta$ такая, что значение $l_\gamma(t)$ равно длине подкривой $\gamma|_{[t_0,t]}$ кривой γ, если $t>t_0$, и длине подкривой $\gamma|_{[t,\,t_0]}$ со знаком “$-$”, если $t<t_0$, $t\in\Delta$. Пусть $g\colon|\gamma|\to\mathbb{R}^n$ – непрерывное отображение, где $|\gamma|=\gamma(\Delta)\subset\mathbb{R}^n$. Предположим, что кривая $\widetilde{\gamma}=g\circ\gamma$ также локально спрямляема. Тогда, очевидно, существует единственная неубывающая функция $L_{\gamma,g}\colon\Delta_\gamma\to\Delta_{\widetilde{\gamma}}$ такая, что

$$L_{\gamma,g}(l_\gamma(t))=l_{\widetilde{\gamma}}(t) \qquad \text{при всех} \quad t\in\Delta.$$

Кривая $\gamma\in D$ называется (*полным*) *поднятием кривой* $\widetilde{\gamma}\in\mathbb{R}^n$ *при отображении* $f\colon D\to\mathbb{R}^n$, если $\widetilde{\gamma}=f\circ\gamma$. Говорят, что отображение $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ принадлежит классу ACP в области D, пишем $f\in ACP$, если, для почти всех кривых γ в области D, кривая $\widetilde{\gamma}=f\circ\gamma$ локально спрямляема и функция длины $L_{\gamma,f}$, введенная выше, абсолютно непрерывна на всех замкнутых интервалах, лежащих в Δ_γ, для почти всех кривых γ в D. Предположим, что $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ – дискретное отображение, тогда может быть определена функция $L^{-1}_{\gamma,f}$. В таком случае, будем говорить, что f обладает *свойством* ACP^{-1} в области D, пишем $f\in ACP^{-1}$, если для почти всех кривых $\widetilde{\gamma}\in f(D)$ каждое поднятие γ при отображении f, $f\circ\gamma=\widetilde{\gamma}$, является локально спрямляемой кривой и, кроме того, обратная функция $L^{-1}_{\gamma,f}$ абсолютно непрерывна на всех замкнутых интервалах, лежащих в $\Delta_{\widetilde{\gamma}}$, для почти всех кривых $\widetilde{\gamma}$ в $f(D)$ и каждого поднятия γ кривой $\widetilde{\gamma}=f\circ\gamma$.

Полагаем
$$l(f'(x)):=\inf_{h\in\mathbb{R}^n:|h|=1}|f'(x)h|.$$
Напомним, что *внутренняя дилатация отображения* f *в точке* x определяется как
$$K_I(x,f)=\begin{cases}\dfrac{|J(x,f)|}{l(f'(x))^n}, & \text{если } J(x,f)\neq 0,\\ 1, & \text{если } f'(x)=0,\\ \infty & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Всюду далее $q_{x_0}(r)$ означает среднее интегральное значение $Q(x)$ над сферой $S(x_0,r)$,
$$q_{x_0}(r):=\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int_{S(x_0,r)}Q(x)\,dS, \tag{1.1}$$
где dS – элемент площади поверхности S.

Напомним, что изолированная точка x_0 границы ∂D области D называется *устранимой* для отображения f, если существует конечный предел $\lim_{x\to x_0}f(x)$. Если $f(x)\to\infty$ при $x\to x_0$, точку x_0 будем называть *полюсом*. Изолированная точка x_0 границы ∂D называется *существенно особой точкой* отображения $f\colon D\to\mathbb{R}^n$, если при $x\to x_0$ нет ни конечного, ни бесконечного предела. Основной результат настоящей статьи заключает в себе следующая

Теорема 1. *Пусть $b\in D$ и $f\colon D\setminus\{b\}\to\mathbb{R}^n$ – открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение, $f\in ACP\cap ACP^{-1}$, обладающее N- и N^{-1}-свойствам Лузина, а $Q\colon D\to[1,\infty)$ – некоторая функция такая, что $K_I(x,f)\leqslant Q(x)$ при почти всех $x\in D\setminus\{b\}$. Предположим, что существуют некоторые числа δ, C, $p>0$ и $\varepsilon_0>0$, $\varepsilon_0<\operatorname{dist}(b,\partial D)$, такие, что при всех $x\in B(b,\delta)\setminus\{b\}$ имеет место неравенство*
$$|f(x)|\leqslant C\cdot\exp\biggl\{p\int_{|x-b|}^{\varepsilon_0}\frac{dt}{tq_b^{1/(n-1)}(t)}\biggr\}. \tag{1.2}$$
Пусть, кроме того,
$$\int_0^{\varepsilon_0}\frac{dt}{tq_b^{1/(n-1)}(t)}=\infty.$$

Тогда точка b является для отображения f либо полюсом, либо устранимой особой точкой. Если вместо условия (1.2) *имеет место более сильное предположение*

$$\lim_{x\to b}|f(x)|\cdot\exp\biggl\{-\int_{|x-b|}^{\varepsilon_0}\frac{dt}{tq_b^{1/(n-1)}(t)}\biggr\}=0,$$

то точка $x=b$ является для отображения f устранимой особой точкой.

Отметим, что для отображений с ограниченным искажением (когда функция $Q(x)$ ограничена) теорема 1 была получена в работе [6; теорема 4.2].

2. Основная лемма. Всюду далее, для произвольной области $G\subset D$, такой, что $\overline{G}\subset D$, и произвольного $y\in f(G)\setminus f(\partial G)$, символ $\mu(y,f,G)$ обозначает топологический индекс отображения f в точке y относительно области G, см., например, [1; § 2, гл. II]. Везде ниже мы подразумеваем, что отображение f сохраняет ориентацию, т.е., $\mu(y,f,G)>0$ для всех указанных выше y и G, если не оговорено противное. Пусть $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ – произвольное отображение и пусть существует область $G\subset D$, $\overline{G}\subset D$, такая, что

$$\overline{G}\cap f^{-1}(f(x))=\{x\}.$$

Тогда величина $\mu(f(x),f,G)$, называемая *локальным топологическим индексом*, не зависит от выбора области G и обозначается символом $i(x,f)$. Следующие определения см., например, в монографии [7; гл. II, п. 3], см. также [6; разд. 3.11]. Пусть $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ произвольное отображение, $\beta\colon[a,b)\to\mathbb{R}^n$ – некоторая кривая и $x\in f^{-1}(\beta(a))$. Кривая $\alpha\colon[a,c)\to D$ называется *максимальным поднятием* кривой β при отображении f с началом в точке x, если

(1) $\alpha(a)=x$;

(2) $f\circ\alpha=\beta|_{[a,c)}$;

(3) если $c<c'\leqslant b$, то не существует кривой $\alpha'\colon[a,c')\to D$ такой, что $\alpha=\alpha'|_{[a,c)}$ и $f\circ\alpha=\beta|_{[a,c')}$.

Пусть $x_1,\dots,x_k$ – k различных точек множества $f^{-1}(\beta(a))$ и $m=\sum_{i=1}^k i(x_i,f)$. Говорят, что последовательность кривых $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ есть *максимальная последовательность поднятий кривой β при отображении f с началом в точках $x_1,\dots,x_k$*, если

(a) каждая кривая α_j есть максимальное поднятие кривой β при отображении f,

(b) $\operatorname{card}\{j:a_j(a)=x_i\}=i(x_i,f)$, $1\leqslant i\leqslant k$,

(c) $\operatorname{card}\{j:a_j(t)=x\}\leqslant i(x,f)$ для всех $x\in D$ и при всех t.

Пусть f – открытое дискретное отображение и $x_1,\dots,x_k\in f^{-1}(\beta(a))$. Тогда кривая β имеет максимальную последовательность поднятий при отображении f с началом в точках $x_1,\dots,x_k$, см. [7; теорема 3.2, гл. II]. Следующее утверждение доказано автором, см., например, [8; теорема 1].

Предложение 1. *Пусть $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ – открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение, $f\in ACP\cap ACP^{-1}$, обладающее N- и N^{-1}-свойствами Лузина, Γ – семейство кривых в D, Γ' – семейство кривых в $\mathbb{R}^n$ и m – натуральное число, такое что выполнено следующее условие. Для каждой кривой $\beta\in\Gamma'$ найдутся кривые $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ семейства Γ такие, что $f\circ\alpha_j\subset\beta$ для всех j и равенство $\alpha_j(t)=x$ имеет место при всех $x\in G$, всех t и не более чем $i(x,f)$ индексах j.*

Тогда для каждой функции $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$

$$M(\Gamma') \leqslant \frac{1}{m}\int_D K_I(x,f)\cdot\rho^n(x)\,dm(x). \tag{2.1}$$

Для отображения $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ множества $E\subset D$ и $y\in\mathbb{R}^n$ определим *функцию кратности* $N(y,f,E)$ как число прообразов точки y во множестве E, т.е.

$$N(y,f,E)=\operatorname{card}\{x\in E: f(x)=y\}.$$

Далее символ $\Gamma(E,F,D)$ означает семейство всех кривых $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$, которые соединяют E и F в D, т.е. $\gamma(a)\in E$, $\gamma(b)\in F$ и $\gamma(t)\in D$ при $t\in(a,b)$. Компактное множество $G\subset\mathbb{R}^n$ условимся называть *множеством нулевой емкости*, пишем $\operatorname{cap}G=0$, если существует ограниченное открытое множество $A\subset\mathbb{R}^n$, содержащее G, такое, что $M(\Gamma(G,\partial A,A))=0$, см., например, [7; гл. III, раздел 2 и гл. II, предложение 10.2]. Будем говорить, что произвольное множество G имеет емкость нуль, если произвольное его компактное подмножество G_0 имеет нулевую емкость. Множества емкости нуль, как известно, всюду разрывны (любая компонента их связности вырождается в точку), т.е., условие $\operatorname{cap}G=0$ влечет, что $\operatorname{Int}G=\varnothing$, см., например, [7; гл. III, следствие 2.5]. Открытое множество $U\subset D$, $\overline{U}\subset D$, называется *нормальной окрестностью* точки $x\in D$ при отображении $f\colon D\to\mathbb{R}^n$, если

$$U\cap f^{-1}(f(x))=\{x\},\qquad \partial f(U)=f(\partial U),$$

см., например, [7; раздел 4, гл. I].

Предложение 2. *Пусть* $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ *открытое дискретное отображение. Тогда для каждого* $x\in D$ *существует* s_x *такое, что при всех* $s\in(0,s_x)$ *компонента связности множества* $f^{-1}(B(f(x),s))$, *содержащая точку* x *и обозначаемая символом* $U(x,f,s)$, *является нормальной окрестностью точки* x *при отображении* f, *при этом*

$$f(U(x,f,s))=B(f(x),s),\qquad \operatorname{diam}U(x,f,s)\to 0\quad \textit{при}\quad s\to 0,$$

см., например, [7; лемма 4.9, гл. I].

Для доказательства основных результатов работы нам необходимо воспользоваться следующими утверждениями, см. [9; следствие 8.1, предложение 8.5 и теорема 8.6], а также, соответственно, [2; лемма 5.2].

Предложение 3. *Произвольное открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение* $f\colon D\to\mathbb{R}^n$, *обладающее* N- *и* N^{-1}-*свойствами Лузина и такое, что* $f\in ACP\cap ACP^{-1}$, *удовлетворяет неравенству вида*

$$M(f(\Gamma))\leqslant\int_D Q(x)\cdot\rho^n(x)\,dm(x) \tag{2.2}$$

для любого семейства кривых Γ *в области* D *и* $\rho\in\operatorname{adm}\Gamma$ *при* $Q(x)=K_I(x,f)$.

Предложение 4. *Пусть* $Q\colon\mathbb{B}^n\to[1,\infty]$ – *измеримая по Лебегу функция, пусть* $f\colon\mathbb{B}^n\setminus\{0\}\to\overline{\mathbb{R}^n}$, $n\geqslant 2$, – *открытое дискретное отображение, удовлетворяющее* *неравенству* (2.2) *при* $D := \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ *для любого семейства кривых* Γ *в* $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ *и* $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$. *Пусть, кроме того,*

$$\operatorname{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\mathbb{B}^n \setminus \{0\})) > 0.$$

Предположим, что существует $\varepsilon_0 \in (0,1)$ *такое, что при* $\varepsilon \to 0$

$$\int_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x|)\, dm(x) = o(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)),$$

где $\psi(t)$ – *измеримая по Лебегу функция такая, что* $\psi(t) > 0$ *п.в. и*

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt < \infty$$

для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. *Тогда* f *имеет непрерывное продолжение* $f\colon \mathbb{B}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *в* $\mathbb{B}^n$.

Важную роль при доказательстве основных результатов работы играет следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $b \in D$ *и* $f\colon D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^n$ – *открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение,* $f \in ACP \cap ACP^{-1}$, *обладающее* N- *и* N^{-1}-*свойствам Лузина. Предположим, что существует некоторое число* $\delta > 0$ *такое, что при всех* $x \in B(b, \delta) \setminus \{b\}$ *и некоторой строго убывающей функции* $\varphi\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$, *для которой* $\varphi(t) \to \infty$ *при* $t \to 0$, *имеет место неравенство*

$$|f(x)| \leqslant C \cdot \varphi^p(|x - b|), \tag{2.3}$$

где $p > 0$ *и* $C > 0$ – *некоторые постоянные. Пусть, кроме того, существуют измеримая по Лебегу функция* $Q\colon D \to [1, \infty]$, *числа* $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(b, \partial D)$, $A > 0$ *и борелевская функция* $\psi(t)\colon (0, \varepsilon_0) \to (0, \infty)$ *такие, что* $K_I(x, f) \leqslant Q(x)$ *при почти всех* $x \in B(0, \delta) \setminus \{b\}$ *и при* $\varepsilon \to 0$

$$\int_{\varepsilon<|x-b|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x - b|)\, dm(x) \leqslant \frac{A \cdot I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)}{(\log \varphi(\varepsilon))^{n-1}}\,, \tag{2.4}$$

где

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt < \infty \qquad \text{для всех} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \tag{2.5}$$

Тогда точка b *является для отображения* f *либо полюсом, либо устранимой особой точкой.*

Доказательство. Предположим противное, а именно, что точка b является существенно особой точкой отображения f. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $b = 0$, $\delta < \operatorname{dist}(0, \partial D)$ и $C = 1$. В таком случае, сфера $S(0, \delta)$ является компактным множеством в $D \setminus \{0\}$, поэтому найдется $R > 0$ такое, что

$$f(S(0, \delta)) \subset B(0, R). \tag{2.6}$$

Поскольку $b = 0$ является существенно особой точкой отображения f, в виду условий (2.1) и (2.4), а также предложений 3 и 4, отображение f в $B(0, \delta) \setminus \{0\}$ принимает все значения в $\mathbb{R}^n$, за исключением, может быть, некоторого множества емкости нуль, т.е.

$$N(y, f, \mathbb{B}^n \setminus \{0\}) = \infty \qquad \text{при всех} \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus E,$$

где $\operatorname{cap} E = 0$. Так как E имеет емкость нуль, множество $\mathbb{R}^n \setminus E$ не может быть ограниченным. В таком случае, найдется $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus (E \cup B(0,R))$.

Пусть $k_0 > 4Ap^{n-1}/\omega_{n-1}$, $k_0 \in \mathbb{N}$. Поскольку $N(y_0, f, \mathbb{B}^n \setminus \{0\}) = \infty$, найдутся точки

$$x_1, \dots, x_{k_0} \in f^{-1}(y_0) \cap (B(0,\delta) \setminus \{0\}).$$

По предложению 2 при некотором фиксированном $r > 0$ каждая точка x_j, $j = 1, \dots, k_0$, имеет нормальную окрестность $U_j := U(x_j, f, r)$ такую, что $\overline{U_l} \cap \overline{U_m} = \varnothing$ при всех $l \neq m$, $l, m \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant l \leqslant k_0$ и $1 \leqslant m \leqslant k_0$.

Полагаем

$$d := \min\{\varepsilon_0, \operatorname{dist}(0, \overline{U_1} \cup \dots \cup \overline{U_{k_0}})\}.$$

Пусть $a \in (0,d)$ и $V := B(0,\delta) \setminus \overline{B(0,a)}$. В силу неравенства (2.3), строгого убывания функции φ, а также предположения о том, что $C = 1$, имеем

$$f(V) \subset B(0, \varphi^p(a)). \tag{2.7}$$

Поскольку

$$z_0 := y_0 + re \in \overline{B(y_0, r)} = f(\overline{U(x_j, f, r)}), \qquad j = 1, \dots, k_0,$$

где e – единичный вектор, будем иметь $z_0 \in f(V)$. Следовательно, найдется последовательность точек $\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_{k_0}$, $\widetilde{x}_j \in \overline{U_j}$, $1 \leqslant j \leqslant k_0$, такая, что $f(\widetilde{x}_j) = z_0$. Заметим, что

$$k_0 \leqslant \sum_{j=1}^{k_0} i(\widetilde{x}_j, f) = m'.$$

Обозначим через H полусферу

$$H = \{e \in \mathbb{S}^{n-1} : (e, y_0) > 0\},$$

через Γ' – семейство всех кривых $\beta\colon [r, \varphi^p(a)) \to \mathbb{R}^n$ вида $\beta(t) = y_0 + te$, $e \in H$, а через Γ максимальную последовательность поднятий кривой β при отображении f относительно области V с началом в точках $\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_{k_0}$, $\widetilde{x}_j \in \overline{U_j}$, $1 \leqslant j \leqslant k_0$, состоящую из m' кривых, $m' = \sum_{j=1}^{k_0} i(\widetilde{x}_j, f)$, которая существует в силу [7; теорема 3.2, гл. II]. По предложению 1

$$M(\Gamma') \leqslant \frac{1}{m'} \int_D K_I(x,f) \cdot \rho^n(x)\, dm(x) \leqslant \frac{1}{k_0} \int_D K_I(x,f) \cdot \rho^n(x)\, dm(x) \tag{2.8}$$

для каждой функции $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$.

При любом фиксированном $e \in H$ покажем, что для каждой кривой $\beta = y_0 + te$ и каждого максимального ее поднятия $\alpha(t)\colon [r, c) \to V$ с началом в точке $\widetilde{x}_{j_0}$, $\alpha \in \Gamma$, $1 \leqslant j_0 \leqslant k_0$, существует последовательность $r_k \in [r, c)$ такая, что $r_k \to c - 0$ при $k \to \infty$ и $\operatorname{dist}(\alpha(r_k), \partial V) \to 0$ при $k \to \infty$. Предположим противное, тогда найдется $e_0 \in H$ такое, что кривая $\alpha(t)$, $t \in [r, c)$, являющаяся максимальным поднятием кривой $\beta = y_0 + te_0$, лежит внутри V вместе со своим замыканием. Пусть $C(c, \alpha(t))$ обозначает предельное множество кривой α при $t \to c - 0$; тогда для каждого $x \in C(c, \alpha(t))$ найдется последовательность $t_k \to \infty$ такая, что $x = \lim_{k\to\infty} \alpha(t_k)$. По непрерывности f, поскольку, по предположению, $C(c,\ \alpha(t)) \subset V$, будем иметь

$$f(x) = f\Big(\lim_{k\to\infty} \alpha(t_k)\Big) = \lim_{k\to\infty} \beta(t_k) = \beta(c),$$

откуда следует, что отображение f постоянно на множестве $C(c, \alpha(t))$. Так как по условию f дискретно, а множество $C(c, \alpha(t))$, очевидно, является связным, будем иметь $C(c, \alpha(t)) = p_1 \in V$.

Полагаем $b_0 := \varphi^p(a)$. Пусть $c \neq b_0$. Тогда можно построить новое максимальное поднятие α' кривой β с началом в точке p_1. Объединяя поднятия α и α', получаем еще одно поднятие α'' кривой β с началом в точке $\widetilde{x}_{j_0}$, что противоречит свойству максимальности исходного поднятия α. Значит, $c = b_0$.

В таком случае $C(b_0, \alpha(t))$ континуум внутри V, при этом, $C(b_0, \alpha(t)) = p_1' \in V$ и, значит, α продолжается до замкнутой кривой, определенной на отрезке $[r, \varphi^p(a)]$. Обозначим эту кривую снова через α (обозначения не меняем). Тогда при всех $t \in [r, \varphi^p(a)]$ имеем $\beta(t) = f(\alpha(t)) \subset f(V)$, в частности, полагая $t := \varphi^p(a)$, рассмотрим элемент z_1, определяемый по правилу $z_1 := y_0 + \varphi^p(a)e_0$. Ввиду включения (2.7), имеем

$$z_1 = y_0 + \varphi^p(a)e_0 \in f(V) \subset B(0, \varphi^p(a)). \tag{2.9}$$

Однако, поскольку $e_0 \in H$,

$$|z_1| = |y_0 + \varphi^p(a)e_0| = \sqrt{|y_0|^2 + 2(y_0, \varphi^p(a)e_0) + \varphi^{2p}(a)} \geqslant \sqrt{|y_0|^2 + \varphi^{2p}(a)} \geqslant \varphi^p(a). \tag{2.10}$$

Однако, соотношение (2.10) противоречит (2.9), что, в свою очередь, опровергает предположение о включении замыкания кривой $\alpha(t)$ во множество V.

Следовательно, $\operatorname{dist}(\alpha(r_k), \partial V) \to 0$ при $k \to \infty$ и некоторой последовательности $r_k \in [r, c)$ такой, что $r_k \to c - 0$ и $k \to \infty$, что и требовалось установить.

Заметим, что ситуация, когда $\operatorname{dist}(\alpha(r_k), S(0, \delta)) \to 0$ при $k \to \infty$, исключена. Действительно, пусть эта ситуация имеет место. Тогда найдутся $p_2 \in S(0, \delta)$ и подпоследовательность номеров k_l, $l \in \mathbb{N}$ такие, что $\alpha(r_{k_l}) \to p_2$ при $l \to \infty$. Отсюда, по непрерывности f, получаем, что $\beta(r_{k_l}) \to f(p_2)$ при $l \to \infty$, что невозможно ввиду соотношения (2.6), поскольку, при каждом фиксированном $e \in H$ и $t \in [r, \varphi^p(a))$, имеем

$$|\beta(t)| = |y_0 + te| = \sqrt{|y_0|^2 + 2t(y_0, e) + t^2} \geqslant |y_0| > R$$

по выбору y_0.

Из сказанного выше следует, что найдется последовательность $r_k \in [r, c)$ такая, что $r_k \to c - 0$ при $k \to \infty$, и $\alpha(r_k) \to p_3 \in S(0, a)$. Кроме того, каждая такая кривая $\alpha \in \Gamma$ пересекает сферу $S(0, d)$, поскольку, согласно построению, α имеет начало вне шара $B(0, d)$. Рассмотрим функцию

$$\rho_a(x) = \begin{cases} \dfrac{\psi(|x|)}{I(a, d)}, & x \in B(0, d) \setminus B(0, a), \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus (B(0, d) \setminus B(0, a)), \end{cases}$$

где величина $I(a, d)$ определена также, как в (2.5), а ψ – функция из условия леммы. Заметим, что функция $\rho_a(x)$ является борелевской и, кроме того, поскольку $\rho_a(x)$ является радиальной функцией, в силу установленных выше свойств кривых из семейства Γ, а также в силу [5; теорема 5.7], для любой (локально спрямляемой) кривой $\alpha \in \Gamma$ имеем

$$\int_\alpha \rho_a(x)\,|dx| \geqslant \frac{1}{I(a, d)} \int_a^d \psi(t)\,dt = 1,$$

т.е., $\rho_a(x) \in \operatorname{adm}\Gamma$. В таком случае, из соотношения (2.8) получаем

$$\begin{aligned}
M(\Gamma') &\leqslant \frac{1}{k_0 \cdot I^n(a,d)} \int_{a<|x|<d} K_I(x,f) \cdot \psi^n(|x|)\, dm(x) \\
&\leqslant \frac{I^n(a,\varepsilon_0)}{k_0 \cdot I^n(a,d) \cdot I^n(a,\varepsilon_0)} \int_{a<|x|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x|)\, dm(x) \\
&= \left(1 + \frac{I(d,\varepsilon_0)}{I(a,d)}\right)^n \frac{1}{k_0 \cdot I^n(a,\varepsilon_0)} \int_{a<|x|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x|)\, dm(x) \\
&\leqslant \frac{2}{k_0 \cdot I^n(a,\varepsilon_0)} \int_{a<|x|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x|)\, dm(x) \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

при всех $a \in (0, d_1)$ и некотором d_1, $d_1 \leqslant d$, поскольку, в силу соотношения (2.4), $I^n(a,d) \to \infty$ при $a \to \infty$. Снова, из (2.4) и (2.11) получаем, что при $a \in (0, d_1)$

$$M(\Gamma') \leqslant \frac{2A}{k_0(\log \varphi(a))^{n-1}}\,. \qquad (2.12)$$

С другой стороны, в силу [5; раздел 7.7]

$$M(\Gamma') = \frac{1}{2}\, \frac{\omega_{n-1}}{(\log(\varphi^p(a)/r))^{n-1}}\,. \qquad (2.13)$$

Тогда из неравенств (2.12) и (2.13) получаем

$$\frac{1}{2}\, \frac{\omega_{n-1}}{(\log(\varphi^p(a))/r))^{n-1}} \leqslant \frac{2A}{k_0(\log \varphi(a))^{n-1}}\,,$$

откуда

$$\begin{aligned}
\left(\log\left(\frac{\varphi^p(a)}{r}\right)^{(2/\omega_{n-1})^{1/(n-1)}}\right)^{n-1} &\geqslant (\log(\varphi(a))^{(k_0/(2A))^{1/(n-1)}})^{n-1}, \\
\log\left(\frac{\varphi^p(a)}{r}\right)^{(2/\omega_{n-1})^{1/(n-1)}} &\geqslant \log(\varphi(a))^{(k_0/(2A))^{1/(n-1)}}, \\
\frac{1}{r^{(2/\omega_{n-1})^{1/(n-1)}}} &\geqslant (\varphi(a))^{(k_0/(2A))^{1/(n-1)} - p(2/\omega_{n-1})^{1/(n-1)}}.
\end{aligned}$$

Поскольку по выбору $k_0 > 4Ap^{n-1}/\omega_{n-1}$, в правой части последнего соотношения величина $\varphi(a)$ берется в некоторой положительной степени. Переходя здесь к пределу при $a \to 0$ и учитывая, что по условию леммы $\varphi(a) \to \infty$ при $a \to 0$, получаем, что

$$\frac{1}{r^{(2/\omega_{n-1})^{1/(n-1)}}} \geqslant \infty,$$

что невозможно. Полученное противоречие означает, что точка $b=0$ не может быть существенно особой для отображения f.

Отдельный случай представляет собой ситуация, когда $I(\varepsilon,\varepsilon_0) \leqslant M \cdot \log \varphi(\varepsilon)$ при некоторой постоянной $M>0$ и $\varepsilon \to 0$. Следующее утверждение может быть получено из [10; лемма 5] и оценки (2.1) при $m=1$.

Предложение 5. *Предположим, что $b\in D$, $f\colon D\to B(0,R)$ – открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение, $f\in ACP\cap ACP^{-1}$, обладающее N- и N^{-1}-свойствам Лузина, при этом, существуют измеримая по Лебегу функция $Q\colon D\to[1,\infty]$, числа $\varepsilon_0>0$, $\varepsilon_0<\operatorname{dist}(b,\partial D)$, и $A>0$, такие, что $K_I(x,f)\leqslant Q(x)$ почти всюду в D, при этом, при $\varepsilon\to 0$ имеют место соотношения (2.4), (2.5). Пусть, кроме того, существует постоянная $M>0$ и $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_1\in(0,\varepsilon_0)$ такие, что при всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$ выполнено условие*

$$I(\varepsilon,\varepsilon_0)\leqslant M\cdot\log\varphi(\varepsilon), \tag{2.14}$$

где $I(\varepsilon,\varepsilon_0)$ определяется соотношением (2.5), а $\varphi\colon(0,\infty)\to[0,\infty)$ – некоторая функция. Тогда при всех $x\in B(b,\varepsilon_1)$ имеет место оценка

$$|f(x)-f(b)|\leqslant\frac{\alpha_n(1+R^2)}{\delta}\exp\{-\beta_n I(|x-b|,\varepsilon_0)\}, \tag{2.15}$$

где постоянные α_n и $\beta_n=(\omega_{n-1}/(AM^{n-1}))^{1/(n-1)}$ зависят только от n, а δ – от R.

Следствие 1. *Предположим, что в условиях леммы 1, помимо соотношений (2.4) и (2.5) имеет место условие (2.14), а вместо условия (2.3) имеет место более сильное предположение:*

$$\lim_{x\to b}|f(x)|\cdot\exp\{-\beta_n I(|x-b|,\varepsilon_0)\}=0, \tag{2.16}$$

где $\beta_n=(\omega_{n-1}/(AM^{n-1}))^{1/(n-1)}$. Тогда точка $x=b$ является устранимой для отображения f.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $b=0$. По лемме 1 точка b не может быть существенно особой для f. Предположим, что $b=0$ является для отображения f полюсом. Тогда рассмотрим композицию отображений $h=g\circ f$, где $g(x)=x/|x|^2$ – инверсия относительно единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$. Заметим, что $h\in ACP\cap ACP^{-1}$ обладает N- и N^{-1}-свойствам Лузина, при этом, $K_I(x,f)=K_I(x,h)$ и $h(0)=0$. Кроме того, в некоторой окрестности нуля отображение h (по построению) является ограниченным. В таком случае найдутся $\varepsilon_0>0$ и $R>0$ такие, что $|h(x)|\leqslant R$ при $|x|<\varepsilon_0$. Следовательно, возможно применение предложения 5. По неравенству (2.15),

$$|h(x)|=\frac{1}{|f(x)|}\leqslant\frac{\alpha_n(1+R^2)}{\delta}\exp\{-\beta_n I(|x|,\varepsilon_0)\}.$$

Отсюда следует, что

$$|f(x)|\cdot\exp\{-\beta_n I(|x|,\varepsilon_0)\}\geqslant\frac{\delta}{\alpha_n(1+R^2)}\,.$$

Однако, последнее соотношение противоречит (2.16). Полученное противоречие доказывает, что точка $b=0$ является устранимой для отображения f.

3. Основные следствия. Прежде всего, проведем *доказательство теоремы* 1. В лемме 1 полагаем

$$\psi(t)=\frac{1}{tq_b^{1/(n-1)}(t)},\qquad \varphi(t)=\exp\biggl\{\int_t^{\varepsilon_0}\frac{dr}{rq_b^{1/(n-1)}(r)}\biggr\}.$$

Отметим, что при указанных ограничениях на $Q(x) < \infty$, при почти всех $r \in (0, \varepsilon_0)$ имеем $q_b(r) < \infty$, откуда вытекает строгое убывание функции φ. Кроме того, по теореме Фубини имеем

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-b|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^n(|x-b|)\,dm(x) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\int\limits_{S(b,r)} Q(x)\cdot\psi^n(|x-b|)\,dS\,dr$$
$$= \omega_{n-1}\cdot\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} r^{n-1}\psi^n(r)q_b(r)\,dr = \omega_{n-1}\cdot I(\varepsilon,\varepsilon_0) = \omega_{n-1}\cdot\log\varphi(\varepsilon).$$

Отсюда, в частности, следует, что выполнено условие (2.14) при $M = 1$. Оставшаяся часть утверждения следует из леммы 1 и следствия 1.

Полагая в лемме 1 в качестве функции $\psi(t) = 1/t$, а в качестве $\varphi(t) = t^{-q}$, $q > 0$, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $b \in D$ и $f\colon D\setminus\{b\}\to\mathbb{R}^n$ – открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение, $f \in ACP\cap ACP^{-1}$, обладающее N- и N^{-1}-свойствам Лузина. Предположим, что существует некоторое число $\delta > 0$, такое, что при всех $x \in B(b,\delta)\setminus\{b\}$ имеет место неравенство*

$$|f(x)| \leqslant C|x-b|^{-q}\,,$$

где $q > 0$ и $C > 0$ – некоторые постоянные. Пусть, кроме того, существуют измеримая по Лебегу функция $Q\colon D\to[1,\infty]$ и число $\varepsilon_0 \in (0,1)$ такие, что $K_I(x,f) \leqslant Q(x)$ при почти всех $x \in B(b,\delta)\setminus\{b\}$ и при $\varepsilon\to 0$

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-b|<\varepsilon_0} \frac{Q(x)}{|x-b|^n}\,dm(x) \leqslant C_1\cdot\log\frac{1}{\varepsilon}\,, \tag{3.1}$$

где $C_1 = C_1(b)$ – некоторая положительная постоянная. Тогда точка b является для отображения f либо полюсом, либо устранимой особой точкой. Кроме того, существует постоянная $p > 0$ такая, что оценка вида

$$\lim_{x\to b}|f(x)|\cdot|x-b|^p = 0 \tag{3.2}$$

влечет, что точка b является устранимой для отображения f.

Доказательство. Заметим, что $I(\varepsilon,\varepsilon_0) = \log(\varepsilon_0/\varepsilon)$, где, как и прежде, $I(\varepsilon,\varepsilon_0)$ задается соотношением вида (2.5). Все остальное непосредственно вытекает из леммы 1 и следствия 1.

Теорема 3. *Пусть $b \in D$ и $f\colon D\setminus\{b\}\to\mathbb{R}^n$ – открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение, $f \in ACP\cap ACP^{-1}$, обладающее N- и N^{-1}-свойствам Лузина. Предположим, что существует некоторое число $\delta > 0$ такое, что при всех $x \in B(b,\delta)\setminus\{b\}$ имеет место неравенство (2.3) при*

$$\varphi(t) = \exp\log^{(n-\alpha-1)/(n-1)}\left(\frac{1}{t}\right)$$

при некотором $\alpha \in (0, n-1)$, где $p > 0$ и $C > 0$ – фиксированные постоянные. Пусть, кроме того, существует измеримая по Лебегу функция $Q\colon D\to[1,\infty]$ такая, что $K_I(x,f) \leqslant Q(x)$ при почти всех $x \in D$ и при некотором $K > 0$

$$q_b(r) \leqslant K\cdot\left(\log\frac{1}{r}\right)^{\alpha} \tag{3.3}$$

при $r \to 0$. *Тогда точка* b *является для отображения* f *либо полюсом, либо устранимой особой точкой.*

Доказательство. Предположим, $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 \in (0, \min\{1, \operatorname{dist}(b, \partial D)\})$. Полагаем

$$\psi(t) = \frac{1}{t}, \qquad I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt.$$

Тогда при некоторой постоянной $C_1 > 0$ и $\varepsilon \to 0$, учитывая условие (3.3), имеем

$$\frac{1}{I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)} \int_{\varepsilon < |x-b| < \varepsilon_0} \frac{Q(x)\, dm(x)}{|x-b|^n} \leqslant C_1 \cdot \frac{1}{\log^{n-\alpha-1}(1/\varepsilon)} = C_1 \log^{1-n} \varphi(\varepsilon),$$

откуда вытекает выполнение условий (2.4)–(2.5) леммы 1. Применяя эту лемму, заключаем, что точка b не может быть существенно особой для отображения f.

Следствие 2. *Пусть* $b \in D$ *и* $f\colon D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^n$ – *открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение*, $f \in ACP \cap ACP^{-1}$, *обладающее* N- *и* N^{-1}-*свойствам Лузина. Тогда найдется положительная постоянная* $\gamma > 0$, $\gamma < 1$, *со следующим свойством.*

Если при некотором $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 \in (0, \min\{1, \operatorname{dist}(b, \partial D)\})$, *отображение* f *удовлетворяет более сильному, чем* (2.3) (*при* $\varphi(t) = \exp \log^{(n-\alpha-1)/(n-1)}(1/t)$), *условию*

$$\lim_{x \to b} |f(x)| \cdot \exp\left\{-\gamma \log^{(n-1-\alpha)/(n-1)}\left(\frac{\varepsilon_0}{|x-b|}\right)\right\} = 0, \tag{3.4}$$

при этом, $K_I(x, f) \leqslant Q(x)$ *при почти всех* $x \in D$ *и при* $r \to 0$ *выполнено условие* (3.3), *то* f *имеет устранимую особенность в точке* b.

Доказательство. По теореме 3 точка b не может быть существенно особой для отображения f. Осталось показать, что при выполнении более сильных условий (3.3)–(3.4) точка b для отображения f также не может быть полюсом. Заметим, что при достаточно большом $M_1 > 0$, некотором $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$ и всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$

$$\int_{\varepsilon < |x-b| < \varepsilon_0} \frac{Q(x)\, dm(x)}{|x-b|^n} \leqslant M_1 \cdot I^{\alpha+1}(\varepsilon, \varepsilon_0). \tag{3.5}$$

Предположим, что точка b является для отображения f полюсом. Рассмотрим композицию отображений $h = g \circ f$, где $g(x) = (x-b)/|x-b|^2$ – инверсия относительно единичной сферы $S(b, 1)$. Заметим, что отображение h является дифференцируемым почти всюду, $h \in ACP \cap ACP^{-1}$, обладает N- и N^{-1}-свойствам Лузина, при этом, $K_I(x, f) = K_I(x, h)$ и $h(0) = 0$. Кроме того, в некоторой окрестности нуля отображение h, по построению, является ограниченным. В таком случае, найдутся $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, и $R > 0$, такие, что $|h(x)| \leqslant R$ при $|x-b| < \varepsilon_2$. Согласно [10; лемма 5] и оценке (2.1) при $m = 1$, учитывая соотношение (3.5), получаем

$$|h(x)| = \frac{1}{|f(x)|} \leqslant \frac{\alpha_n(1+R^2)}{\delta} \exp\left\{-\gamma \cdot \log^{(n-1-\alpha)/(n-1)} \frac{\varepsilon_0}{|x-b|}\right\},$$

где постоянные α_n и $\gamma = (\omega_{n-1}/M_1)^{1/(n-1)}$ зависят только от n, а δ – от R. Не ограничивая общности, можно считать, что $\gamma < 1$. Тогда

$$|f(x)| \cdot \exp\left\{-\gamma \cdot \log^{(n-1-\alpha)/(n-1)} \frac{\varepsilon_0}{|x-b|}\right\} \geqslant \frac{\delta}{\alpha_n(1+R^2)}.$$

Однако, если при этом выполнено условие (3.4), мы приходим к противоречию, что и доказывает следствие.

Пусть $\Phi\colon [0,\infty]\to[0,\infty]$ – неубывающая функция. Тогда *обратная функция* Φ^{-1} может быть корректно определена следующим образом:

$$\Phi^{-1}(\tau)=\inf_{\Phi(t)\geqslant\tau} t,. \tag{3.6}$$

Как обычно, $\inf$ в (3.6) равен ∞, если множество $t\in[0,\infty]$ таких, что $\Phi(t)\geqslant\tau$, пусто. Заметим, что функция Φ^{-1} также является неубывающей.

Теорема 4. *Пусть $b\in D$ и $f\colon D\setminus\{b\}\to\mathbb{R}^n$ – открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение, $f\in ACP\cap ACP^{-1}$, обладающее N- и N^{-1}-свойствам Лузина, а $Q\colon D\to[1,\infty)$ – некоторая функция такая, что $K_I(x,f)\leqslant Q(x)$ при почти всех $x\in D\setminus\{b\}$. Предположим, что существуют некоторые числа $\delta, C, p>0$, такие, что при всех $x\in B(b,\delta)\setminus\{b\}$ и некотором $\varepsilon_0>0$, $\varepsilon_0<\operatorname{dist}(b,\partial D)$, имеет место неравенство (1.2). Кроме того, предположим, что существуют число $M>0$, неубывающая выпуклая функция $\Phi\colon[0,\infty]\to[0,\infty]$ и окрестность U точки b, такие что*

$$\int_U \Phi(Q(x))\frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n}\leqslant M, \tag{3.7}$$

$$\int_{\delta_0}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{1/(n-1)}}=\infty \tag{3.8}$$

при некотором $\delta_0>\Phi(0)$. Тогда точка b является для отображения f либо полюсом, либо устранимой особой точкой.

Доказательство. Из условий (3.7), (3.8) и [11; теорема 3.1] следует расходимость интеграла вида

$$\int_0^{\varepsilon_0}\frac{dt}{tq_b^{1/(n-1)}(t)}=\infty.$$

Все остальное следует из теоремы 1.

Замечание 1. Пусть $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ дискретное отображение. Тогда f будем называть *отображением с конечным искажением длины*, пишем $f\in FLD$, если f дифференцируемо почти всюду в D, f обладает N- и N^{-1}-свойствам, и, кроме того, $f\in ACP\cap ACP^{-1}$. Отображения с конечным искажением длины введены в работе [12], см. также [9; раздел 8]. Их исследование тесно связано с отображениями конечного искажения, см., например, [13; гл. 6], а также работы [14]–[17].

Напоследок сформулируем еще одно важное утверждение, относящееся к одному достаточно широкому классу отображений, для которого основные результаты заметки имеют место. Напомним, что точка $x_0\in D$ называется *точкой ветвления отображения* f, если ни в какой окрестности U точки x_0 сужение $f|_U$ не является гомеоморфизмом. Множество точек ветвления отображения f принято обозначать символом B_f. Поскольку произвольное открытое дискретное отображение $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ класса $W_{\mathrm{loc}}^{1,n}(D)$, для которого $K_I(x,f)\in L_{\mathrm{loc}}^1$ и $m(B_f)=0$, является дифференцируемым почти всюду отображением $f\in ACP\cap ACP^{-1}$, обладающим N- и N^{-1}-свойствам Лузина (в иных терминах – отображением с конечным искажением длины, см. [18; теорема 1] и [12; следствие 3.14 и предложение 4.3]), из теорем 1–4 вытекает следующее утверждение.

Следствие 3. *Каждое из заключения теорем 1–4, а также следствий 1, 2, справедливо для произвольных открытых дискретных отображений $f\colon D\setminus\{b\}\to\mathbb{R}^n$ класса $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D\setminus\{b\})$ таких, что $K_I(x,f)\in L^1_{\mathrm{loc}}$ и $m(B_f)=0$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Наука, Новосибирск, 1982.

[2] Е. А. Севостьянов, “К теории устранения особенностей отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:1 (2010), 159–174.

[3] Е. А. Севостьянов, “О локальном поведении отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности”, *Сиб. матем. журн.*, **53**:3 (2012), 648–662.

[4] А. А. Игнатьев, В. И. Рязанов, “К теории граничного поведения пространственных отображений”, *Укр. матем. вестник*, **3**:2 (2006), 199–211.

[5] J. Väisälä, *Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings*, Lecture Notes in Math., **229**, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[6] J. Väisälä, “Modulus and capacity inequalities for quasiregular mappings”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I*, **509**, 1–14.

[7] S. Rickman, *Quasiregular mappings*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **26**, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[8] Е. А. Севостьянов, “Об одном модульном неравенстве для отображений с конечным искажением длины”, *Укр. матем. журн.*, **61**:5 (2009), 680–688.

[9] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in Modern Mapping Theory*, Springer Monogr. Math., Springer, New York, 2009.

[10] Е. А. Севостьянов, “О нормальности семейств пространственных отображений с ветвлением”, *Укр. матем. журн.*, **60**:10 (2008), 1389–1400.

[11] В. И. Рязанов, Е. А. Севостьянов, “Равностепенная непрерывность квазиконформных в среднем отображений”, *Сиб. матем. журн.*, **52**:3 (2011), 665–679.

[12] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, “Mappings with finite length distortion”, *J. Anal. Math.*, **93**:1 (2004), 215–236.

[13] T. Iwaniec, G. Martin, *Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis*, Oxford Math. Monogr., Clarendon Press, Oxford, 2001.

[14] C. J. Bishop, V. Ya. Gutlyanskii, O. Martio, M. Vuorinen, “On conformal dilatation in space”, *Int. J. Math. Math. Sci.*, **22** (2003), 1397–1420.

[15] V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *The Beltrami Equation: A Geometric Approach*, Dev. Math., **26**, Springer, New York, 2012.

[16] В. М. Миклюков, “Относительное расстояние М. А. Лаврентьева и простые концы на непараметрических поверхностях”, *Укр. матем. вестник*, **1**:3 (2004), 349–372.

[17] A. Ukhlov, S. K. Vodop’yanov, “Mappings with bounded (P,Q)-distortion on Carnot groups”, *Bull. Sci. Mat.*, **134**:6 (2010), 605–634.

[18] Е. А. Севостьянов, “Обобщение одной леммы Е. А. Полецкого на классы пространственных отображений”, *Укр. матем. журн.*, **61**:7 (2009), 969–975.

Е. А. Севостьянов
Житомирский государственный университет
им. И. Франко
E-mail: esevostyanov2009@mail.ru,
brusin2006@rambler.ru

Поступило
22.12.2012
Исправленный вариант
06.06.2014