Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. Лауринчикас, Л. Мешка, Уточнение неравенства универсальности,
Матем. заметки, 2014, том 96, выпуск 6, 905–910

https://www.mathnet.ru/mzm10562

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.37
14 декабря 2025 г., 19:31:22

Математические заметки

Том 96 выпуск 6 декабрь 2014

УДК 511

Уточнение неравенства универсальности

А. Лауринчикас, Л. Мешка

Неравенство универсальности утверждает, что нижняя плотность множества сдвигов дзета-функции Римана, приближающих данную аналитическую функцию с точностью $\varepsilon > 0$, строго положительна. В статье получено, что это множество имеет строго положительную плотность для всех $\varepsilon > 0$, за исключением самое большее счетного множества значений ε.

Библиография: 18 названий.

DOI: 10.4213/mzm10562

1. Введение. В 1975 г. Воронин открыл замечательное свойство универсальности дзета-функции Римана $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$. Пусть $0 < r < 1/4$ и $f(s)$ – функция, аналитическая внутри круга $|s| \leqslant r$ и непрерывная вплоть до границы круга. Он доказал [1], [2], см. также [3], что если $f(s)$ не имеет нулей внутри круга $|s| \leqslant r$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует вещественное число $\tau = \tau(\varepsilon)$ такое, что

$$\max_{|s|\leqslant r}\left|f(s) - \zeta\left(s + \frac{3}{4} + i\tau\right)\right| < \varepsilon.$$

Этот результат заинтересовал многих теоретико-числовиков. Теорема Воронина была усилена и обобщена для других дзета- и L-функций. Историю проблемы и результаты можно найти в обзорных статьях [4]–[7], в диссертациях [8], [9] и в монографиях [10]–[12]. Современный вариант теоремы Воронина имеет следующий вид, см., например, [10]. Пусть $D = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$, а $\operatorname{meas} A$ обозначает меру Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$.

Теорема A. *Пусть K – компактное подмножество полосы D, обладающее связным дополнением, а $f(s)$ – непрерывная, не имеющая нулей в K и аналитическая внутри K функция. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left\{\tau \in [0, T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Неравенство теоремы, назовем его *неравенством универсальности*, показывает, что множество сдвигов $\zeta(s + i\tau)$, приближающих данную аналитическую функцию, является достаточно богатым, оно имеет положительную нижнюю плотность.

После доклада на конференции "Diophantine Analysis" в Астрахани (30 июля – 03 августа, 2012 г.) проф. Б. Ваис (B. Veiss) спросил первого автора, можно ли нижний предел в неравенстве теоремы A заменить просто пределом. Ему был дан

© А. Лауринчикас, Л. Мешка, 2014

ответ, что это можно сделать для “почти всех $\varepsilon > 0$”. Настоящая заметка посвящена доказательству этого утверждения. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть K – компактное подмножество полосы D, обладающее связным дополнением, а $f(s)$ – непрерывная, не имеющая нулей в K и аналитическая внутри K функция. Тогда для всех $\varepsilon > 0$, за исключением самое большее счетного множества значений ε, существует предел*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\operatorname{meas}\Bigl\{\tau\in[0,T]:\sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau)-f(s)|<\varepsilon\Bigr\}>0.$$

Через $H(D)$ обозначим пространство аналитических в D функций, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах. В [13]–[15] были получены обобщения теоремы A для функций $F(\zeta(s))$, где $F\colon H(D)\to H(D)$ – некоторый оператор. Все результаты упомянутых работ можно переформулировать аналогично теореме 1. Мы приводим только один пример. Пусть $S=\{g\in H(D): g(s)\neq 0 \text{ или } g(s)\equiv 0\}$ и

$$H_{a_1,\dots,a_r}(D)=\{g\in H(D): g(s)\neq a_j,\ j=1,\dots,r\}\cup\{F(0)\}.$$

Теорема 2. *Пусть $F\colon H(D)\to H(D)$ – непрерывный оператор, и пусть $F(S)\supset H_{a_1,\dots,a_r}(D)$. При $r=1$ пусть K – компактное подмножество полосы D, обладающее связным дополнением, а $f(s)$ – непрерывная, не равная a_1 на множестве K и аналитическая внутри K функция. При $r\geqslant 2$ пусть $K\subset D$ – любое компактное множество, а $f(s)\in H_{a_1,\dots,a_r}(D)$. Тогда для всех $\varepsilon>0$, за исключением самое большее счетного множества значений ε, существует предел*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\operatorname{meas}\Bigl\{\tau\in[0,T]:\sup_{s\in K}|F(\zeta(s+i\tau))-f(s)|<\varepsilon\Bigr\}>0.$$

Например, если $r=1$ и $a_1=0$, то имеем универсальность функции $\zeta^N(s)$, $N\in\mathbb{N}$. Если $r=2$ и $a_1=-1$, $a_2=1$, то теорема 2 дает универсальность функций $\sin\zeta(s)$, $\cos\zeta(s)$, $\sinh\zeta(s)$ и $\cosh\zeta(s)$ [14].

2. Предельные теоремы. Для доказательства теорем 1 и 2 применим вероятностный метод, предложенный в диссертации Багчи [8] и продолженный в [10]. Через $\mathfrak{B}(S)$ будем обозначать класс борелевских множеств пространства S. Определим

$$\Omega=\prod_p\gamma_p,$$

где $\gamma_p=\{s\in\mathbb{C}:|s|=1\}$ для всех простых p. В силу теоремы Тихонова бесконечномерный тор Ω с топологией произведения и операцией поточечного перемножения является компактной топологической абелевой группой. Поэтому на измеримом пространстве $(\Omega,\mathfrak{B}(\Omega))$ может быть определена вероятностная мера Хаара m_H. Получаем вероятностное пространство $(\Omega,\mathfrak{B}(\Omega),m_H)$. Обозначая через $\omega(p)$ проекцию элемента $\omega\in\Omega$ на координатное пространство γ_p, на этом вероятностном пространстве $H(D)$-значный случайный элемент $\zeta(s,\omega)$ определим формулой

$$\zeta(s,\omega)=\prod_p\biggl(1-\frac{\omega(p)}{p^s}\biggr)^{-1}.$$

Отметим, что бесконечное произведение в этой формуле для почти всех $\omega\in\Omega$ относительно меры m_H сходится равномерно на компактных подмножествах полосы D

и поэтому определяет $H(D)$-значный случайный элемент. Пусть P_ζ – распределение этого случайного элемента, т.е. вероятностная мера, определенная формулой

$$P_\zeta(A) = m_H(\omega \in \Omega : \zeta(s,\omega) \in A), \qquad A \in \mathfrak{B}(H(D)).$$

Лемма 1. *При $T \to \infty$ вероятностная мера*

$$P_T(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\,\mathrm{meas}\{\tau \in [0,T] : \zeta(s+i\tau) \in A\}, \qquad A \in \mathfrak{B}(H(D)),$$

слабо сходится к P_ζ.

Доказательство леммы дано в [10].

Аналогичное утверждение имеет место и для функции $F(\zeta(s))$.

Лемма 2. *Предположим, что оператор $F\colon H(D) \to H(D)$ непрерывен. Тогда*

$$P_{T,F}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\,\mathrm{meas}\{\tau \in [0,T] : F(\zeta(s+i\tau)) \in A\}, \qquad A \in \mathfrak{B}(H(D)),$$

при $T \to \infty$ слабо сходится к распределению случайного элемента $F(\zeta(s,\omega))$.

Доказательство леммы содержится в [13].

Нам еще нужны носители предельных мер в леммах 1 и 2. Напоминаем, что *носителем меры P* на $(H(D), \mathfrak{B}(H(D)))$ называется минимальное замкнутое множество $S_P \subset H(D)$ такое, что $P(S_P) = 1$. Множество S_P состоит из всех таких элементов $g \in H(D)$, что для всякой открытой окрестности G элемента g справедливо неравенство $P(G) > 0$. Носитель распределения случайного элемента называется носителем этого элемента.

Лемма 3. *Носителем вероятностной меры P_ζ является множество S.*

Доказательство леммы содержится в [10].

Пусть $P_{\zeta,F}$ – распределение случайного элемента $F(\zeta(s,\omega))$.

Лемма 4. *Пусть оператор $F\colon H(D) \to H(D)$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда носитель меры $P_{\zeta,F}$ содержит замыкание множества $H_{a_1,\dots,a_r}(D)$.*

Доказательство леммы дано в [14].

3. Доказательство теорем. При доказательстве теорем нам понадобится известная теорема Мергеляна о приближении аналитических функций многочленами.

Лемма 5. *Пусть $K \subset \mathbb{C}$ – компактное подмножество, обладающая связным дополнением, а $f(s)$ – непрерывная в K и аналитическая внутри K функция. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует многочлен $p(s)$ такой, что*

$$\sup_{s\in K} |f(s) - p(s)| < \varepsilon.$$

Доказательство леммы дано в [16], также см. [17].

Мы будем пользоваться эквивалентом слабой сходимости вероятностных мер в терминах множеств непрерывности. Пусть P – вероятностная мера на $(S, \mathfrak{B}(S))$.

Через ∂A будем обозначать границу множества $A \in \mathfrak{B}(S)$. Множество ∂A замкнуто, поэтому принадлежит классу $\mathfrak{B}(S)$. Если $P(\partial A) = 0$, то A называется *множеством непрерывности* меры P. Имеет место следующее утверждение.

Лемма 6. *Пусть P_n, $n \in \mathbb{N}$, и P – вероятностные меры на $(S, \mathfrak{B}(S))$. Последовательность мер P_n при $n \to \infty$ слабо сходится к P тогда и только тогда, когда для всякого множества непрерывности A меры P*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A).$$

Лемма является частью теоремы 2.1 из [18], там же дано ее доказательство.

Доказательство теоремы 1. В силу леммы 5 можем найти многочлен $p(s)$ такой, чтобы выполнялось неравенство

$$\sup_{s\in K} |f(s) - e^{p(s)}| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Определим множество

$$G_\varepsilon = \left\{ g \in H(D) : \sup_{s\in K} |g(s) - e^{p(s)}| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Тогда G_ε – открытая окрестность функции $e^{p(s)}$, которая в силу леммы 3 является элементом носителя меры P_ζ. Следовательно, справедливо неравенство

$$P_\zeta(G_\varepsilon) > 0. \tag{2}$$

Определим еще одно множество

$$A_\varepsilon = \left\{ g \in H(D) : \sup_{s\in K} |g(s) - f(s)| < \varepsilon \right\}.$$

Имеем, что

$$\partial A_\varepsilon = \left\{ g \in H(D) : \sup_{s\in K} |g(s) - f(s)| = \varepsilon \right\}.$$

Отсюда следует, что границы ∂A_ε при различных ε не пересекаются. Поэтому не более чем счетное множество множеств ∂A_ε имеют положительную P_ζ-меру. В самом деле, для всякого $n \in \mathbb{N}$ имеем не более чем $n-1$ множеств A_ε, для которых

$$P_\zeta(\partial A_\varepsilon) > \frac{1}{n}.$$

Отсюда вытекает, что множеств ∂A_ε с положительной P_ζ-мерой не более чем счетное множество. Следовательно, $P_\zeta(\partial A_\varepsilon) = 0$, т.е. A_ε является множеством непрерывности меры P_ζ, для всех $\varepsilon > 0$, за исключением самое большее счетного множества значений ε. В силу лемм 1 и 6 отсюда получаем, что

$$\lim_{T\to\infty} P_T(A_\varepsilon) = P_\zeta(A_\varepsilon) \tag{3}$$

для всех $\varepsilon > 0$, за исключением самое большее счетного множества значений ε. Кроме того, из определений множеств G_ε и A_ε, учитывая неравенство (1), убеждаемся, что $G_\varepsilon \subset A_\varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$. Поэтому ввиду неравенства (2) выполняется неравенство $P_\zeta(A_\varepsilon) > 0$. Поскольку

$$P_T(A_\varepsilon) = \frac{1}{T}\operatorname{meas}\Bigl\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\Bigr\},$$

то последнее замечание вместе с равенством (3) дает утверждение теоремы.

Доказательство теоремы 2. *Случай* $r = 1$. В силу леммы 5 существует многочлен $p(s)$ такой, что

$$\sup_{s\in K}|f(s) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4}$$

Поскольку $f(s) \neq a_1$ на множестве K, то также $p(s) \neq a_1$ на K, если только ε достаточно мало. Следовательно, можем определить непрерывную ветвь логарифма $\log(p(s) - a_1)$, которая будет аналитической функцией внутри K. Еще раз применяя лемму 5, находим многочлен $p_1(s)$ такой, что

$$\sup_{s\in K}|p(s) - a_1 - e^{p_1(s)}| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{5}$$

Пусть $h_{a_1}(s) = e^{p_1(s)} + a_1$. Тогда имеем, что $h_{a_1}(s) \in H(D)$ и $h_{a_1}(s) \neq a_1$. Следовательно, ввиду леммы 4 функция $h_{a_1}(s)$ является элементом носителя меры $P_{\zeta,F}$. Кроме того, из неравенств (4) и (5) следует, что

$$\sup_{s\in K}|f(s) - h_{a_1}(s)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

Определим множество

$$\widehat{G}_\varepsilon = \Bigl\{g \in H(D) : \sup_{s\in K}|f(s) - h_{a_1}(s)| < \frac{\varepsilon}{2}\Bigr\}.$$

Тогда в силу свойств функции $h_{a_1}(s)$ имеем, что

$$P_{\zeta,F}(\widehat{G}_\varepsilon) > 0. \tag{7}$$

Берем еще одно множество

$$\widehat{A}_\varepsilon = \Bigl\{g \in H(D) : \sup_{s\in K}|g(s) - f(s)| < \varepsilon\Bigr\}.$$

Повторяя рассуждения доказательства теоремы 1, убеждаемся, что $\widehat{A}_\varepsilon$ является множеством непрерывности меры $P_{\zeta,F}$ для всех $\varepsilon > 0$, за исключением самое большее счетного множества значений ε. Поэтому леммы 2 и 6 влекут за собой равенство

$$\lim_{T\to\infty} P_{T,F}(\widehat{A}_\varepsilon) = P_{\zeta,F}(\widehat{A}_\varepsilon) \tag{8}$$

для всех $\varepsilon > 0$, за исключением не более чем счетного множества значений ε. Из неравенства (6) и определений множеств $\widehat{G}_\varepsilon$ и $\widehat{A}_\varepsilon$ имеем, что $\widehat{G}_\varepsilon \subset \widehat{A}_\varepsilon$ для всех $\varepsilon > 0$. Поэтому, учитывая неравенство (7), из (8) получаем, что

$$\lim_{T\to\infty} P_{T,F}(\widehat{A}_\varepsilon) \geqslant P_{\zeta,F}(\widehat{G}_\varepsilon) > 0,$$

тем самым утверждение теоремы в случае $r = 1$ доказано.

Случай $r \geqslant 2$. Определим множество

$$\widetilde{A}_\varepsilon = \Bigl\{g \in H(D) : \sup_{s\in K}|g(s) - f(s)| < \varepsilon\Bigr\}.$$

Поскольку $f(s) \in H_{a_1,\dots,a_r}(D)$, то в силу леммы 4 $f(s)$ является элементом носителя меры $P_{\zeta,F}$. Отсюда следует, что $P_{\zeta,F}(\widetilde{A}_\varepsilon) > 0$. Кроме того, как и в доказательстве теоремы 1, получаем, что $\widetilde{A}_\varepsilon$ является множеством непрерывности меры $P_{\zeta,F}$ для всех $\varepsilon > 0$, за исключением не более счетного множества значений ε. Для тех $\varepsilon > 0$, для которых $P_{\zeta,F}(\partial\widetilde{A}_\varepsilon) = 0$, в силу леммы 2 имеем, что

$$\lim_{T\to\infty} P_{T,F}(\widehat{A}_\varepsilon) = P_{\zeta,F}(\widetilde{A}_\varepsilon) > 0.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] С. М. Воронин, "Теорема о распределении значений дзета-функции Римана", *Докл. АН СССР*, **221**:4 (1975), 771.

[2] С. М. Воронин, "Теорема об "универсальности" дзета-функции Римана", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39**:3 (1975), 475–486.

[3] С. М. Воронин, *Избранные труды. Математика*, ред. А. А. Карацуба, Изд. МГТУ им. Н. Э. Баумана, М., 2006.

[4] A. Laurinčikas, "The universality of zeta-functions", *Acta Appl. Math.*, **78**:1-3 (2003), 254–271.

[5] K. Matsumoto, "Probabilistic value-distribution theory of zeta-functions", *Sugaku*, **53**:3 (2001), 279–296.

[6] K. Matsumoto, "Some problems on mean values and the universality of zeta and multiple zeta-functions", *Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory*, TEV, Vilnius, 2002, 195–199.

[7] A. Laurinčikas, "Universality results for the Riemann zeta-function", *Moscow J. Combin. Number Theory*, **3**:3-4 (2013), 98–117.

[8] B. Bagchi, *The Statistical Behaviour and Universality Properties of the Riemann Zeta-Function and Other Allied Dirichlet Series*, Ph.D. Thesis, Indian Statistical Institute, Calcutta, 1981.

[9] S. M. Gonek, *Analytic Properties of Zeta and L-Functions*, Ph.D. Thesis, University of Michigan, 1979.

[10] A. Laurinčikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*, Math. Appl., **352**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996.

[11] A. Laurinčikas, A. Garunkštis, *The Lerch Zeta-Function*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.

[12] J. Steuding, *Value-Distribution of L-Functions*, Lect. Notes in Math., **1877**, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[13] A. Laurinčikas, "Universality of the Riemann zeta-function", *J. Number Theory*, **130**:10 (2010), 2323–2331.

[14] A. Laurinčikas, "Universality of composite functions", *Functions in Number Theory and Their Probabilistic Aspects*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B34**, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2012, 191–204.

[15] A. Laurinčikas, "On joint universality of the Riemann zeta-function and Hurwitz zeta-functions", *J. Number Theory*, **132**:12 (2012), 2842–2853.

[16] С. Н. Мергелян, "Равномерные приближения функций комплексного переменного", *УМН*, **7**:2 (1952), 31–122.

[17] J. L. Walsh, *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **20**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1960.

[18] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley & Sons, New York, 1968.

А. Лауринчикас
Vilnius University, Литва
E-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Поступило
09.07.2013

Л. Мешка
Vilnius University, Литва