



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Азаров, О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений свободных групп с циклическим объединением,

Матем. заметки, 1998, том 64, выпуск 1, 3–8

<https://www.mathnet.ru/mzm1366>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 216.73.216.37

14 декабря 2025 г., 19:30:51





УДК 512.543

О НИЛЬПОТЕНТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ СВОБОДНЫХ ГРУПП С ЦИКЛИЧЕСКИМ ОБЪЕДИНЕНИЕМ

Д. Н. Азаров

Пусть G – свободное произведение свободных групп с циклическим объединением. В этой заметке доказывается критерий аппроксимируемости группы G конечными p -группами. Устанавливаются также другие аппроксимационные свойства группы G .

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Пусть A и B – свободные группы, h и k – неединичные элементы групп A и B соответственно, $G = (A * B; h = k)$ – свободное произведение групп A и B с объединенными циклическими подгруппами $H = (h)$ и $K = (k)$. Г. Баумслаг [1] доказал, что группа G финитно аппроксимируема. В работе Дж. Дайер [2] доказывается, что группа G финитно аппроксимируема относительно сопряженности. Браннер, Бернс и Солитер [3] доказали, что все конечно порожденные подгруппы этой группы финитно отделимы. В данной заметке рассматриваются другие аппроксимационные свойства группы G . В частности, устанавливается критерий аппроксимируемости группы G конечными p -группами.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A и B – свободные группы, h и k – неединичные элементы групп A и B соответственно и $G = (A * B; h = k)$. Пусть m и n – наибольшие положительные числа такие, что уравнения $x^m = h$ и $y^n = k$ разрешимы в группах A и B соответственно. Если одно из чисел m или n равно 1, то для любого простого числа p группа G аппроксимируется конечными p -группами. Если же $m > 1$ и $n > 1$, то группа G аппроксимируется конечными p -группами тогда и только тогда, когда числа m и n являются степенями числа p .

Заметим, что достаточное условие аппроксимируемости группы G конечными p -группами было получено Гильденхьюзом [4]. Используя обозначения из теоремы 1, результат Гильденхьюза можно сформулировать следующим образом: если числа m и n являются степенями простого числа p , то группа G аппроксимируется конечными p -группами.

Пусть π – множество простых чисел. Напомним, что конечная группа называется π -группой, если множество всех простых делителей ее порядка содержится в множестве π .

Следующая теорема дополняет отмеченный выше результат Баумслага.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A, B, h, k, t, n такие же, как и в теореме 1. Если множество простых чисел π непусто и содержит все простые делители чисел t и n , то группа G аппроксимируется конечными разрешимыми π -группами.

Поскольку конечная p -группа является нильпотентной, из аппроксимируемости данной группы конечными p -группами следует ее нильпотентная аппроксимируемость. Для рассматриваемой нами группы G имеет место и обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть A, B, h, k такие же, как и в теореме 1. Группа G аппроксимируется нильпотентными группами тогда и только тогда, когда она аппроксимируется конечными p -группами для подходящего простого числа p .

Доказательства теорем 1, 2 и 3 приведены в п. 3. В п. 2 изложены некоторые предварительные утверждения.

2. Предварительные сведения. В работе Стиба [5, лемма 1] доказывается, что для любого неединичного элемента s свободной группы F и для любого положительного целого числа l существует гомоморфизм группы F на конечную группу, переводящий элемент s в элемент порядка l . Почти дословное повторение доказательства этой леммы позволяет получить следующее более общее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть группа F аппроксимируется конечно порожденными нильпотентными группами без кручения, s – неединичный элемент группы F . Тогда для каждого положительного целого числа l существует гомоморфизм φ группы F на конечную нильпотентную группу V такой, что $|\varphi s| = l$. Более того, если некоторое непустое множество простых чисел π содержит все простые делители числа l , то можно считать, что группа V является конечной нильпотентной π -группой.

Пусть F – произвольная группа, π – непустое множество простых чисел. Подгруппа H группы F называется π -отделимой, если для любого элемента $x \in F \setminus H$ найдутся число $p \in \pi$ и гомоморфизм φ группы F на конечную p -группу, отделяющий x от H , т.е. такой, что $x\varphi \notin H\varphi$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть F – свободная группа, H – неединичная циклическая подгруппа группы F с порождающим элементом h , t – наибольшее положительное число такое, что уравнение $x^t = h$ разрешимо в группе F . Пусть π – непустое множество простых чисел. Подгруппа H является π -отделимой тогда и только тогда, когда множество π содержит все простые делители числа t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо доказать только достаточность. Пусть множество простых чисел π содержит все простые делители числа t . Покажем, что для произвольного элемента $x \in F \setminus H$ существует простое число $p \in \pi$ и гомоморфизм группы F на конечную p -группу, отделяющий x от H .

Пусть $G_F(H)$ – централизатор подгруппы H группы F . Возможны следующие случаи:

- 1) $x \notin G_F(H)$;
- 2) $x \in G_F(H) \setminus H$.

В случае 1) коммутатор $[x, h]$ отличен от 1. Зафиксируем число $p \in \pi$. Поскольку свободная группа F аппроксимируется конечными p -группами, существует гомомор-

физм группы F на конечную p -группу, ядро которого не содержит $[x, h]$. Очевидно, что этот гомоморфизм отделяет x от H .

В случае 2), очевидно, подгруппа $G_F(H)$ является циклической. Пусть c – ее порождающий элемент. Тогда $h = c^m$, $x = c^k$, где k – целое число. Поскольку $x \notin H$, то k не делится на m . Поэтому число k не делится на некоторый делитель числа m вида p^s , где p – простое число, s – целое положительное число. По предложению 1 существует гомоморфизм φ группы F на конечную p -группу такой, что $|c\varphi| = p^s$. Так как m делится на p^s и k не делится на p^s , то $h\varphi = 1$ и $x\varphi \neq 1$. Таким образом, $x\varphi \notin H\varphi$, т.е. элемент x отделяется от подгруппы H некоторым гомоморфизмом группы F на конечную p -группу. Причем, поскольку p делит m и множество π содержит все простые делители числа m , то $p \in \pi$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть π – непустое множество простых чисел, $\mathcal{P}$ – класс конечных разрешимых π -групп. Пусть группа F аппроксимируется $\mathcal{P}$ -группами и $\overline{F}$ – расширение группы F с помощью $\mathcal{P}$ -группы. Тогда группа $\overline{F}$ аппроксимируется $\mathcal{P}$ -группами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что если $1 \leq K \leq H \leq G$ – произвольный субнормальный ряд и $G/H, H/K \in \mathcal{P}$, то существует нормальная подгруппа L группы G такая, что $L \leq K$ и $G/L \in \mathcal{P}$. (В качестве подгруппы L можно взять пересечение всех подгрупп группы G , сопряженных с K .) По лемме 1.5 из [6] группа $\overline{F}$ аппроксимируется $\mathcal{P}$ -группами.

Пусть A и B – произвольные группы, h и k – элементы групп A и B соответственно, причем порядки этих элементов равны. Пусть, далее, $G = (A * B; h = k)$ – свободное произведение этих групп с циклическим объединением. Для дальнейшего изложения нам потребуется следующая конструкция, восходящая к Баумслагу. Пусть M и N – нормальные подгруппы групп A и B соответственно, причем порядки элементов h и k по модулю этих подгрупп совпадают. Тогда можно рассмотреть свободное произведение с объединением $G_{MN} = (A/M * B/N; hM = kN)$ и гомоморфизм $\rho_{MN}: G \rightarrow G_{MN}$, продолжающий естественные гомоморфизмы $A \rightarrow A/M$ и $B \rightarrow B/N$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть группы A и B аппроксимируются конечно порожденными нильпотентными группами без кручения, $H = \langle h \rangle$ и $K = \langle k \rangle$ – бесконечные циклические подгруппы групп A и B соответственно. Пусть, далее, π – непустое множество простых чисел. Если подгруппы H и K π -отделимы в группах A и B соответственно, то группа $G = (A * B; h = k)$ аппроксимируется конечными разрешимыми π -группами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что сомножители A и B аппроксимируются конечными p -группами для любого простого числа p , поскольку эти группы по условию аппроксимируются конечно порожденными нильпотентными группами без кручения.

Пусть g – неединичный элемент группы G . Покажем, что существует гомоморфизм φ группы G на конечную разрешимую π -группу такой, что $g\varphi \neq 1$. Рассмотрим несократимую запись элемента g :

$$g = x_1 x_2 \cdots x_r.$$

Предположим сначала, что $r = 1$. Тогда без потери общности можно считать, что $g \in A$. Зафиксируем число $p \in \pi$. Так как группа A аппроксимируется конечными

p -группами, существует нормальная подгруппа M конечного p -индекса группы A , не содержащая элемент g . Поскольку группа B аппроксимируется конечно порожденными нильпотентными группами без кручения и порядок элемента hM группы A/M является степенью числа p , то по предложению 1 существует нормальная подгруппа N конечного p -индекса группы B такая, что $|kN| = |hM|$. Группа G_{MN} является свободным произведением конечных p -групп с циклическим объединением и, следовательно, аппроксимируется конечными p -группами в силу теоремы Хигмена [7]. Поскольку $g\rho_{MN} \neq 1$, существует гомоморфизм ρ группы G_{MN} на конечную p -группу такой, что $g\rho_{MN\rho} \neq 1$.

Предположим теперь, что $r > 1$. Пусть для определенности

$$x_1, x_3, \dots \in A \setminus H, \quad x_2, x_4, \dots \in B \setminus K.$$

Поскольку подгруппы H и K π -отделимы в сомножителях A и B соответственно, то существуют нормальные подгруппы A_1 и B_1 групп A и B такие, что A/A_1 и B/B_1 – конечные нильпотентные π -группы и

$$x_1, x_3, \dots \notin HA_1, \quad x_2, x_4, \dots \notin KB_1. \quad (1)$$

Пусть l – наименьшее общее кратное чисел $|hA_1|$ и $|kB_1|$. Так как все простые делители числа l принадлежат множеству π , то по предложению 1 существуют нормальные подгруппы A_2 и B_2 групп A и B соответственно такие, что A/A_2 и B/B_2 – конечные нильпотентные π -группы и $|hA_2| = l = |kB_2|$.

Пусть $M = A_1 \cap A_2$, $N = B_1 \cap B_2$. Тогда $|hM| = l = |kN|$. Теперь можно рассмотреть свободное произведение с объединением

$$\overline{G} = (\overline{A} * \overline{B}; \overline{h} = \overline{k}), \quad \text{где } \overline{A} = A/M, \quad \overline{B} = B/N, \quad \overline{h} = hM, \quad \overline{k} = kN, \quad \overline{G} = G_{MN}.$$

Из (1) следует, что

$$x_1, x_3, \dots \notin HM, \quad x_2, x_4, \dots \notin KN.$$

Поэтому элемент $g\rho_{MN}$ имеет в группе $\overline{G}$ несократимую запись длины $r > 1$ и, следовательно, отличен от 1.

Покажем, что группа $\overline{G}$ аппроксимируется конечными разрешимыми π -группами. Заметим, что $\overline{A}$ и $\overline{B}$ – конечные нильпотентные π -группы. Пусть $p_1, \dots, p_s$ – множество всех простых делителей их порядков. Обозначим через U_i и V_i подгруппы групп $\overline{A}$ и $\overline{B}$ соответственно, порожденные теми силовскими подгруппами этих групп, порядки которых не делятся на p_i , $i = 1, \dots, s$. Поскольку порядки $\overline{h}$ и $\overline{k}$ по модулю подгрупп U_i и V_i совпадают, можно рассмотреть свободное произведение с объединением $\overline{G}_i = \overline{G}_{U_i V_i}$ и гомоморфизм $\rho_i = \rho_{u_i v_i}: \overline{G} \rightarrow \overline{G}_i$. По теореме Хигмена [7] группа $\overline{G}_i$ аппроксимируется конечными p_i -группами, поэтому существует гомоморфизм σ_i группы $\overline{G}_i$ на конечную p_i -группу, инъективный на сомножителях $\overline{A}/U_i$ и $\overline{B}/V_i$. Пусть

$$F = \bigcap_{i=1}^s \text{Ker } \rho_i \sigma_i.$$

Тогда

$$\overline{A} \cap F = \bigcap_{i=1}^s (\overline{A} \cap \text{Ker } \rho_i \sigma_i) = \bigcap_{i=1}^s U_i = 1, \quad \overline{B} \cap F = \bigcap_{i=1}^s (\overline{B} \cap \text{Ker } \rho_i \sigma_i) = \bigcap_{i=1}^s V_i = 1.$$

По теореме Х. Нейман (см., например, [8, с. 122]) подгруппа F группы $\overline{G}$ является свободной. Легко заметить, что $\overline{G}/F$ – конечная нильпотентная π -группа. Так как свободная группа F аппроксимируется конечными разрешимыми π -группами, то по предложению 3 группа $\overline{G}$ также обладает этим свойством.

Поскольку элемент $g\rho_{MN}$ группы $\overline{G}$ отличен от 1, существует гомоморфизм ρ группы $\overline{G}$ на конечную разрешимую π -группу такой, что $g\rho_{MN}\rho \neq 1$.

3. Доказательства теорем. Теорема 2 непосредственно вытекает из предложений 2 и 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть A и B – свободные группы, h и k – неединичные элементы групп A и B соответственно, $G = (A * B; h = k)$. Пусть m и n – наибольшие положительные числа такие, что уравнения $x^m = h$ и $y^n = k$ разрешимы в группах A и B соответственно.

Рассмотрим сначала случай, когда одно из чисел m или n равно 1. Пусть для определенности $m = 1$. Обозначим через b элемент группы B такой, что $b^n = k$. Тогда группу G можно разложить в свободное произведение вида

$$G = (C * B; t = b), \quad \text{где } C = (A, t; h = t^n).$$

Баумслаг [9] доказал, что если элемент f свободной группы F порождает свой централизатор в этой группе, то группа $L = (F, r; f = r^k)$ аппроксимируется конечно порожденными нильпотентными группами без кручения.

Поскольку $m = 1$, элемент h порождает свой централизатор в группе A . Поэтому в силу отмеченного выше результата Баумслага группа C аппроксимируется конечно порожденными нильпотентными группами без кручения. Свободная группа B также обладает этим свойством.

Пусть p – простое число. Хорошо известно, что конечно порожденная нильпотентная группа без кручения аппроксимируется конечными p -группами. Поэтому группы C и B аппроксимируются конечными p -группами.

Заметим, что подгруппа (t) группы C совпадает со своим централизатором. Поэтому если $x \in C \setminus (t)$, то $[x, t] \neq 1$. Поскольку группа C аппроксимируется конечными p -группами, существует гомоморфизм группы C на конечную p -группу, ядро которого не содержит коммутатор $[x, t]$. Этот гомоморфизм отделяет x от (t) . Следовательно, подгруппа (t) группы C p -отделима.

Очевидно, что подгруппа (b) группы B совпадает со своим централизатором. Как и выше, легко убедиться, что подгруппа (b) p -отделима.

Таким образом, свободные множители C и B группы G аппроксимируются конечно порожденными нильпотентными группами без кручения и объединяемые подгруппы (t) и (b) p -отделимы в соответствующих сомножителях. По предложению 4 группа G аппроксимируется конечными p -группами.

Рассмотрим теперь случай, когда числа m и n отличны от 1. Если числа m и n являются степенями простого числа p , то по теореме 2 группа G аппроксимируется конечными p -группами. Пусть теперь одно из этих чисел, скажем m , не является степенью простого числа p . Обозначим через q простой делитель числа m , отличный от p . Тогда существует элемент a группы A такой, что $a^q = h$. Обозначим через b элемент группы B , для которого $b^n = k$. При любом гомоморфизме группы G на конечную p -группу коммутатор $[a, b]$ переходит в 1. Поскольку этот коммутатор отличен от 1, группа G не аппроксимируется конечными p -группами. Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Сохраним обозначения из теоремы 1. Очевидно, что группу G можно разложить в свободное произведение вида $G = (A_1 * B_1; h = k) * F$, где A_1, B_1, F – свободные группы, причем A_1 и B_1 конечно порождены.

Предположим, что группа G аппроксимируется нильпотентными группами. Тогда группа $D = (A_1 * B_1; h = k)$ аппроксимируется конечно порожденными нильпотентными группами, которые, в свою очередь, финитно аппроксимируемы. Поэтому группа D аппроксимируется конечными нильпотентными группами.

Обозначим через m и n наибольшие положительные числа такие, что уравнения $x^m = h$ и $y^n = k$ разрешимы в группах A_1 и B_1 соответственно.

Покажем, что группа D аппроксимируется конечными p -группами для подходящего простого числа p . Допустим противное. Тогда по теореме 1 числа m и n отличны от 1 и не являются степенями одного и того же простого числа. Иными словами, найдутся различные простые числа p и q , делящие числа m и n соответственно. Пусть a и b – элементы групп A_1 и B_1 такие, что $a^p = h$, $b^q = k$. Тогда при любом гомоморфизме группы D на конечную нильпотентную группу отличный от 1 коммутатор $[a, b]$ переходит в 1. Это противоречит доказанной выше аппроксимируемости группы D конечными нильпотентными группами.

Таким образом, группа D аппроксимируется конечными p -группами для подходящего простого числа p . Поскольку $G = D * F$, где группа F свободна, то группа G также аппроксимируется конечными p -группами. Теорема 3 доказана.

Автор выражает благодарность профессору Д. И. Молдаванскому за ряд ценных замечаний и советов при написании этой статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Baumslag G. On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106. P. 193–209.
- [2] Dyer J. Separating conjugates in amalgamated free products and HNN-extensions // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1980. V. 29. № 1. P. 35–51.
- [3] Brunner A., Burns R., Solitar D. The subgroup separability of free products of two free groups with cyclic amalgamation // Contemp. Math. 1984. V. 33. P. 90–115.
- [4] Gildenhuys D. One-relator groups that are residually of prime power order // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1975. V. 19. P. 385–409.
- [5] Stebe P. Conjugacy separability of certain free products with amalgamation // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 156. P. 119–129.
- [6] Gruenberg K. W. Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. V. 7. P. 29–62.
- [7] Higman G. Amalgams of p -group // J. Algebra. 1964. V. 1. P. 301–305.
- [8] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
- [9] Baumslag G. On the residual nilpotence of certain one-relator groups // Comm. Pure Appl. Math. 1968. V. 21. № 5. P. 491–506.