



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Назаров, Весовые неравенства Корна на параболоидальных областях,
Матем. заметки, 1997, том 62, выпуск 5, 751–765

<https://www.mathnet.ru/mzm1661>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 216.73.216.37

14 декабря 2025 г., 19:33:26





УДК 517.946+539.3

ВЕСОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА КОРНА НА ПАРАБОЛОИДАЛЬНЫХ ОБЛАСТЯХ

С. А. Назаров

Получено весовое неравенство Корна на области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с параболоидальным выходом Π на бесконечность. Асимптотическая точность неравенства достигается тем, что весовые множители различаются для продольной (по отношению к оси Π) и поперечных компонент вектора смещений, а в весовых множителях при их производных учитывается направление дифференцирования. Изучаются разрешимость задачи теории упругости в энергетическом классе (замыкание $C_0^\infty(\bar{\Omega})^n$ по норме, порожденной функционалом упругой энергии); размерности ядра и коядра соответствующего оператора зависят от показателя $s \in (-\infty, 1)$ “скорости расширения” параболоида Π .

Библиография: 8 названий.

1. Постановка задачи. Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$, совпадающая вне шара $B_{2R} = \{x : |x| < 2R\}$ с параболоидальным множеством

$$\Pi = \{x = (y, z) : z \equiv x_n > R, y = (x_1, \dots, x_{n-1}), z^{-s}y \in \omega\}, \quad (1.1)$$

где ω – область в $\mathbb{R}^{n-1}$ с компактным замыканием $\bar{\omega}$ и с гладкой (для простоты) границей $\partial\omega$. Подчеркнем, что ω – связное множество. Предположим, что $\text{mes}_n(\Omega \cap B_R) > 0$, $n \geq 2$, и

$$s \in (-\infty, 1), \quad t \equiv s(1-s)^{-1} \in (-1, +\infty). \quad (1.2)$$

Рассмотрим вектор $u = (u_1, \dots, u_n)$ и функционал

$$\mathcal{E}(u; \Omega) = (\varepsilon_{jk}(u), \varepsilon_{jk}(u))_\Omega, \quad (1.3)$$

в котором $(\cdot, \cdot)_\Omega$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ и

$$\varepsilon_{jk}(u) = u_{j,k} + u_{k,j}. \quad (1.4)$$

Кроме того, принято обычное соглашение о суммировании по повторяющимся латинским индексам в пределах от 1 до n , и индекс j после запятой означает дифференцирование по x_j .

Основная цель работы – вывести весовое неравенство Корна для векторов u , исчезающих на $\Omega \cap B_{2R}$ и около бесконечности, т.е. оценить величиной $s\mathcal{E}(u; \Omega)^{1/2}$ весовые нормы в $L_2(\Omega)$ функций u_j и их первых производных, причем подобрать веса наилучшим образом. С физической точки зрения очевидно, что направления x_n (продольное) и $x_1, \dots, x_{n-1}$ (поперечные) неравноценны. Главная трудность состоит в исследовании

компоненты u_n , она преодолевается в п. 3 при помощи вспомогательных конструкций и многократного применения вариантов неравенства Харди (последние представлены в п. 2). Далее, изменяя лишь детали, мы следуем схеме, предложенной в [1] для частного случая $s = 0$ (Π – полуцилиндр). В п. 4 изучаются $u_1, \dots, u_{n-1}$. Подчеркнем, что сначала нужные оценки обнаруживаются только для сужений $u_1, \dots, u_n$ на более тонкий параболоид $\Pi_1 \subset \Pi$, и лишь в п. 5 они (оценки) распространяются на Π . Само весовое неравенство Корна формулируется в теореме 6.1.

В п. 7 исследуется разрешимость трехмерной системы уравнений теории упругости в Ω с краевыми условиями Неймана (в напряжениях). Изучаются энергетические решения – обобщенные и принадлежащие пополнению $C_0^\infty(\bar{\Omega})^3$ по энергетической метрике $\mathcal{E}(u; \Omega)^{1/2} + \|u; L_2(\Omega \cap B_R)\|$. Оказывается, что размерности ядра и коядра оператора названной задачи зависят от показателя s в (1.1): они равны 0 при $s \in (3/4, 1)$, 2 при $s \in (1/2, 3/4]$, 4 при $s \in (1/4, 1/2]$ и 6 при $s \in (-\infty, 1/4]$ (напоминаем, что $n = 3$).

Весовые неравенства Корна в параболоидальных областях изучались в статьях [2]–[4], где они были получены как следствие более общих утверждений. Имеется важное различие между [2]–[4] и данной работой: в [2]–[4] употреблялись изотропные весовые нормы (весовые множители одинаковы для всех компонент и направлений дифференцирования).

2. Неравенства Харди. Следующее утверждение известно (см., например, [5, с. 128]).

ЛЕММА 2.1. Пусть $F \in H_{\text{loc}}^1(0, 1]$ и функция $t \mapsto t^\beta F'(t) \in L_2(0, 1)$ (штрих означает дифференцирование по t), причем

$$I(F) = \int_0^1 t^{2\beta} |F'(t)|^2 dt + \int_{1/2}^1 |F(t)|^2 dt.$$

1) Если $\beta > 1/2$, то

$$\int_0^1 t^{2\beta-2} |F(t)|^2 dt \leq c I(F).$$

2) Если $\beta < 1/2$, то определено значение $F(0)$ и

$$|F(0)|^2 + \int_0^1 t^{2\beta-2} |F(t) - F(0)|^2 dt \leq c I(F).$$

В следующих пунктах мы будем иметь дело с функциями, заданными на полуцилиндре $Q = \omega \times (T, \infty)$, где $T > 0$, а координаты (η, ζ) определены так, что $\eta \in \omega$ и $\zeta > T$. Под $f_{,\zeta}$ подразумевается производная f по ζ .

ЛЕММА 2.2. Пусть $f \in H_{\text{loc}}^1(\bar{Q})$, $\zeta^\gamma f_{,\zeta} \in L_2(Q)$ и

$$\|f\| = (\|\zeta^\gamma f_{,\zeta}; L_2(Q)\|^2 + \|f; L_2(\omega \times [T, 2T])\|^2)^{1/2}. \quad (2.1)$$

1) Если $\gamma < 1/2$, то

$$\|\zeta^{\gamma-1} f; L_2(Q)\| \leq c \|f\|. \quad (2.2)$$

2) Если $\gamma > 1/2$, то существует функция $\eta \mapsto f^\infty(\eta)$ из $L_2(\omega)$ такая, что

$$\|f^\infty; L_2(\omega)\| + \|\zeta^{\gamma-1}(f - f^\infty); L_2(Q)\| \leq c \|f\|. \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что f гладкая (в конце рассуждений замыкаем неравенства по норме (2.1)). В обеих ситуациях достаточно положить $\beta = 1 - \gamma$, $t = T/\zeta$, $F(t, \eta) = f(\eta, T/t)$ и проинтегрировать по $\eta \in \omega$ соответствующее неравенство из леммы 2.1 – получится (2.2) или (2.3), причем $f^\infty(\eta) = F(0, \eta)$ для $\gamma > 1/2$.

С целью сократить количество формул, возникающих при разборе различных случаев, договоримся, что $f^\infty = 0$ в условии 1) леммы 2.2. Тогда соотношение (2.2) принимает вид (2.3).

ЛЕММА 2.3. Пусть $f \in H_{\text{loc}}^1(\overline{Q})$ и $\zeta^{1/2} L^{1-k} f, \zeta \in L_2(Q)$, где $k > 1/2$ и $L(\zeta) = 1 + \log(\zeta/T)$. Тогда

$$\|\zeta^{-1/2} L^{-k} f; L_2(Q)\| \leq c(\|\zeta^{1/2} L^{1-k} f, \zeta; L_2(Q)\|^2 + \|f; L_2(\omega \times [T, 2T])\|^2)^{1/2}. \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя утверждение 1) леммы 2.1, где $\beta = k$, $t = L(\zeta)^{-1}$ и $F(t, \eta) = f(\eta, \zeta)$, интегрируем неравенства по $\eta \in \omega$ и выполняем обратные замены.

Опять-таки для краткости считаем, что в лемме 2.3 $f^\infty = 0$. Кроме того, условимся, что

$$\zeta^{\alpha-0} = \begin{cases} \zeta^\alpha & \text{при } \alpha \neq -\frac{1}{2}, \\ \zeta^{-1/2} L(\zeta)^{-1} & \text{при } \alpha = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Теперь (2.4) с $k = 1$ и (2.2), (2.3) записываются одной строкой без ограничений на γ

$$\|f^\infty; L_2(\omega)\| + \|\zeta^{\gamma-1-0}(f - f^\infty); L_2(Q)\| \leq c\|f\|. \quad (2.5)$$

ЛЕММА 2.4. Если $\gamma \neq 1/2$, $k \in \mathbb{R}$ и $f \in H_{\text{loc}}^1(\overline{Q})$, $\zeta^\gamma L^{-k} f, \zeta \in L_2(Q)$, то в принятых обозначениях

$$\begin{aligned} & \|f^\infty; L_2(\omega)\|^2 + \|\zeta^{\gamma-1} L^{-k}(f - f^\infty); L_2(Q)\|^2 \\ & \leq c(\|\zeta^\gamma L^{-k} f, \zeta; L_2(Q)\|^2 + \|f; L_2(\omega \times [T, 2T])\|^2). \end{aligned} \quad (2.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно установить одномерные неравенства.

Пусть сначала $\beta > 1/2$. Умножением на срезающую функцию добиваемся соотношения $F(1) = 0$. Обращаясь к тождеству

$$F(t)^2 = -2 \int_t^1 F'(\tau) F(\tau) d\tau$$

и полагая $R_{\beta, k}(t) = t^{2\beta-2}(1 - \log t)^{2k}$, имеем

$$\int_0^1 R_{\beta, k}(t) |F(t)|^2 dt = -2 \int_0^1 R_{\beta, k}(t) \int_t^1 F'(\tau) F(\tau) d\tau = -2 \int_0^1 F'(\tau) F(\tau) \rho(\tau) d\tau \equiv J, \quad (2.7)$$

$$\rho(\tau) = \int_0^\tau t^{2\beta-2}(1 - \log t)^{2k} dt. \quad (2.8)$$

Если $k < 0$, то $(1 - \log t)^{2k} \leq (1 - \log \tau)^{2k}$ в (2.8), и поэтому $\rho(\tau) \leq (2\beta - 1)^{-1} R_{\beta+1/2,k}(\tau)$. Таким образом, нужное соотношение

$$\int_0^1 R_{\beta,k}(t) |F(t)|^2 dt \leq c \int_0^1 R_{\beta+1,k}(t) |F'(t)|^2 dt \quad (2.9)$$

вытекает из формулы (2.7) и из формулы

$$J \leq c \int_0^1 R_{\beta+1/2,k}(\tau) |F'(\tau) F(\tau)| d\tau \leq c \|R_{\beta,k}^{1/2} F; L_2(0, 1)\| \cdot \|R_{\beta+1,k}^{1/2} F'; L_2(0, 1)\|. \quad (2.10)$$

Для исследования случая $k > 0$ введем функцию $t \mapsto \Theta_{\delta,m}(t) = \min\{1, t^\delta (1 - \log t)^{2m}\}$, непрерывную и монотонно возрастающую на $[0, 1]$ при любых $\delta > 0$ и $m > 0$. Ясно, что

$$\Theta_{\delta,m}(t) \leq t^\delta (1 - \log t)^{2m} \leq C_{\delta,m} \Theta_{\delta,m}(t), \quad (2.11)$$

где $t \in [0, 1]$ и $C_{\delta,m} = \max\{t^\delta (1 - \log t)^{2m} \mid t \in [0, 1]\}$ (производная средней части (2.11) обращается в 0 на $(0, 1)$ не более одного раза и положительна при малом $t > 0$). Теперь, выбирая $\delta > 0$ так, чтобы $\beta - \delta/2 > 1/2$, получаем

$$\begin{aligned} \rho(\tau) &\leq C_{\delta,k} \int_0^\tau t^{2\beta-2-\delta} \Theta_{\delta,k}(t) dt \leq C_{\delta,k} \Theta_{\delta,k}(\tau) \int_0^\tau t^{2\beta-2-\delta} dt \\ &= C_{\delta,k} \Theta_{\delta,k}(\tau) (2\beta - \delta - 1)^{-1} \tau^{2\beta-1-\delta} \leq C_{\delta,k} (2\beta - \delta - 1)^{-1} R_{\beta+1/2,k}(\tau). \end{aligned}$$

Значит, (2.10) и (2.9) сохраняются и для положительных k , а случай $k = 0$ не нуждается в обсуждении ввиду леммы 2.1(1).

Перейдем к рассмотрению $\beta < 1/2$. Фиксируем $\delta > 0$ такое, что $\beta + \delta/2 < 1/2$. Так как

$$c \|R_{\beta+1,k}^{1/2} F'; L_2(0, 1)\| \geq \|t^{\beta+\delta/2} F'; L_2(0, 1)\|,$$

то согласно утверждению 2) леммы 2.1 верна оценка для $F(0)$ и можно считать, что $F(0) = 0$. Аналогично (2.7) и (2.8)

$$\begin{aligned} \int_0^1 R_{\beta,k}(t) |F(t)|^2 dt &= 2 \int_0^1 F'(\tau) F(\tau) \rho(\tau) d\tau \equiv J, \\ \rho(\tau) &= \int_\tau^1 t^{2\beta-2} (1 - \log t)^{2k} dt. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Теперь формула (2.10) очевидна для $k > 0$ (поскольку $(1 - \log t)^{2k} \leq (1 - \log \tau)^{2k}$ при $0 < \tau \leq t \leq 1$). Если $k < 0$, то

$$\begin{aligned} \rho(\tau) &\leq \int_\tau^1 t^{2\beta+\delta-2} \Theta_{\delta,-k}(t)^{-1} dt \leq \Theta_{\delta,-k}(\tau)^{-1} \int_\tau^1 t^{2\beta+\delta-2} dt \\ &\leq C_{\delta,-k} t^{-\delta} (1 - \log \tau)^{2k} \int_\tau^\infty t^{2\beta+\delta-2} dt \leq c R_{\beta+1/2,k}(\tau), \end{aligned}$$

и опять-таки обнаруживаем оценку (2.10), которая вместе с (2.12) приводит к неравенству (2.9).

3. Новые переменные. Положим $\xi = (\eta, \zeta)$, где $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{n-1})$,

$$\zeta = z^{1-s}, \quad \eta = (1-s)z^{-s}y, \quad (3.1)$$

и заметим, что в координатах ξ множество (1.1) оказывается цилиндром $Q = \omega \times (T, +\infty)$, где $T = R^{1-s} > 0$. Кроме того,

$$\mathcal{E}_u \equiv \mathcal{E}(u; \Pi) = (1-s)^n \int_Q \varepsilon_{jk}(u; x(\xi)) \varepsilon_{jk}(u; x(\xi)) \zeta^{nt} d\xi. \quad (3.2)$$

Здесь t — число из (1.2), а деформации ε_{jk} вычисляются сначала в декартовых координатах (y, z) согласно (1.4) и затем выражаются посредством переменных (3.1). Выведем прямые формулы. При этом под $f_{,\alpha}$ и $f_{,\zeta}$ будем подразумевать производные функции f по η_α и ζ соответственно, а по повторяющимся греческим индексам α, β, γ производить суммирование в пределах от 1 до $n-1$. Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial z} = (1-s)\zeta^{-t}[f_{,\zeta} - t\zeta^{-1}\eta_\alpha f_{,\alpha}], \quad \frac{\partial f}{\partial y_\beta} = (1-s)\zeta^{-t}f_{,\beta}.$$

Положим $u = (v, w)$, где $v = (v_1, \dots, v_{n-1})$, $v_\alpha = u_\alpha$ и $w = u_n$. Тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}(u) &= (1-s)\zeta^{-t}\{v_{\alpha,\beta} + v_{\beta,\alpha}\}, \\ \varepsilon_{\alpha n}(u) &= \varepsilon_{n\alpha}(u) = (1-s)\zeta^{-t}(w_{,\alpha} + v_{\alpha,\zeta} - t\zeta^{-1}\eta_\beta v_{\alpha,\beta}) \\ &= (1-s)\zeta^{-t}\{w_{,\alpha} + v_{\alpha,\zeta} + t\zeta^{-1}\eta_\beta v_{\beta,\alpha}\} - t\zeta^{-1}\eta_\beta \varepsilon_{\alpha\beta}(u), \\ \varepsilon_{nn}(u) &= 2(1-s)\zeta^{-t}(w_{,\zeta} - t\zeta^{-1}\eta_\beta w_{,\beta}) \\ &= (1-s)\zeta^{-t}\{2w_{,\zeta} + 2t\zeta^{-1}\eta_\beta v_{\beta,\zeta}\} - 2t\zeta^{-1}\eta_\beta \varepsilon_{\beta n}(u) - t^2\zeta^{-2}\eta_\beta \eta_\gamma \varepsilon_{\beta\gamma}(u). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Выражения в фигурных скобках из (3.3) обозначим через $e_{\alpha\beta}(u)$, $e_{\alpha n}(u) = e_{n\alpha}(u)$ и $e_{nn}(u)$ соответственно. Выбрав числа R и T достаточно большими, из (3.2) и (3.3) выводим, что

$$\mathcal{E}_u \geq \frac{1}{2}(1-s)^{n-2} \int_Q e_{jk}(u; \xi) e_{jk}(u; \xi) \zeta^{(n-2)t} d\xi. \quad (3.4)$$

Для наших целей достаточно рассмотреть функции $v_\alpha, w \in C^\infty(\overline{Q})$, аннулирующиеся в окрестности торца $\{\xi : \eta \in \omega, \zeta = T\}$ и около бесконечности. Введем вспомогательные функции V и W :

$$\begin{aligned} V(\eta, \zeta) &= \eta_\beta \int_T^\zeta \tau^{-1} v_{\beta,\tau}(\eta, \tau) d\tau = \zeta^{-1} \eta_\beta v_\beta(\eta, \zeta) + \eta_\beta \int_T^\zeta \tau^{-2} v_\beta(\eta, \tau) d\tau, \\ W(\eta, \zeta) &= w(\eta, \zeta) + tV(\eta, \zeta). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ясно, что они равны 0 при $\zeta < T + \varepsilon$ (v_α, w аннулируются при тех же ζ) и

$$c(\|V; L_2(\omega \times [T, 2T])\|^2 + \|W; L_2(\omega \times [T, 2T])\|^2) \leq \|u; L_2(\omega \times [T, 2T])\|^2 \equiv \mathcal{L}_u. \quad (3.6)$$

Здесь число $\varepsilon > 0$ мало и фиксировано, а постоянная $c > 0$ не зависит от u . Кроме того, V и W стабилизируются при больших ζ и совпадают при этом с функциями V^s и W^s из $C^\infty(\overline{\omega})$.

4. Оценка весовой нормы компоненты w . В силу (3.5) и (3.3)

$$2W_{,\zeta}(\eta, \zeta) = e_{nn}(u). \quad (4.1)$$

Следовательно, в соответствии с (2.5)

$$\int_{\omega} |W^{\infty}(\eta)|^2 d\eta + \int_Q |W(\xi) - W^{\infty}(\eta)|^2 \zeta^{(n-2)t-2-0} d\xi \leq c(\mathcal{E}_u + \mathcal{L}_u) \quad (4.2)$$

(см. (3.4) и (3.6)). Положим $W^{\circ}(\xi) = W(\xi) - W^{\infty}(\eta)$. Напомним, что согласно правилу, введенному в п. 2,

$$W^{\infty} = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq (n-2)^{-1}, \\ W^s \in C^{\infty}(\bar{\omega}) & \text{при } t > (n-2)^{-1}. \end{cases}$$

Кроме того,

$$\zeta^{-0} = \begin{cases} L(\zeta)^{-2} & \text{при } t = (n-2)^{-1}, \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Обращаясь к (3.3) и (3.5), находим, что

$$\eta_{\alpha} V_{,\alpha} = V + \zeta^{-1} \eta_{\alpha} \eta_{\beta} v_{\beta,\alpha} + \eta_{\alpha} \eta_{\beta} \int_T^{\zeta} \tau^{-2} v_{\alpha,\beta} d\tau, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha} e_{\alpha n}(u) &= \eta_{\alpha} W_{,\alpha} + \zeta V_{,\zeta} - tV - t\eta_{\alpha} \eta_{\beta} \int_T^{\zeta} \tau^{-2} v_{\alpha,\beta} d\tau \\ &= \eta_{,\alpha} W_{,\alpha} + \zeta^{1+t} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta^{-t} V) - \frac{t}{2} \int_T^{\zeta} \tau^{-2} \eta_{\alpha} \eta_{\beta} e_{\alpha\beta}(u) d\tau. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Обозначим через $J(\eta, \zeta)$ последний интеграл в (4.4). Очевидно, $\|J; L_2(\omega \times [T, 2T])\|^2 \leq c\mathcal{E}_u$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_Q \zeta^{t(n-2)-2-0} |J(\xi) - J^{\infty}(\eta)|^2 d\xi &\leq c \left\{ \mathcal{E}_u + \int_Q \zeta^{t(n-2)} \left| \frac{\partial J}{\partial \zeta}(\xi) \right|^2 d\xi \right\} \\ &\leq c \left\{ \mathcal{E}_u + \int_Q \zeta^{t(n-2)-4} e_{\alpha\beta}(u; \xi) e_{\alpha\beta}(u; \xi) d\xi \right\} \leq c\mathcal{E}_u, \\ \|J^{\infty}; L_2(\omega)\|^2 &\leq c\mathcal{E}_u. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Наконец, запишем (4.4) в виде

$$\eta_{\alpha} W_{,\alpha} + \zeta^{1+t} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta^{-t} V) = -\eta_{\alpha} e_{\alpha n}(u) - \frac{t}{2} J. \quad (4.6)$$

В (4.5), как и в (4.2), выражение ζ^{-0} превращалось в $L(\zeta)^{-2}$ лишь при $t(n-2) = 1$. Поскольку мы собираемся пользоваться неравенством Харди

$$\begin{aligned} \int_Q \zeta^{t(n-2)-2+0} |V(\xi)|^2 d\xi &\equiv \int_Q \zeta^{tn-2-0} |\zeta^{-t} V(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq c \left(\mathcal{L}_u + \mathcal{E}_u + \int_Q \zeta^{tn-0} \left| \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta^{-t} V(\xi)) \right|^2 d\xi \right), \end{aligned} \quad (4.7)$$

то отдельной расшифровки требуют два взаимоисключающих случая $t(n-2) = 1$ и $tn = 1$.

Если $t \in (-1, n^{-1})$, то (4.7) вытекает из утверждения 1) леммы 2.2. При $t = n^{-1}$ мы ссылаемся на лемму 2.3 с $k = 2$ и потому интерпретируем ζ^{-0} слева и справа в (4.7) как $L(\zeta)^{-4}$ и $L(\zeta)^{-2}$ соответственно. Помимо этого, в (4.2) и (4.5) $W^\infty = J^\infty = 0$, поскольку $t < n^{-1} < (n-2)^{-1}$, и мы оставляем (4.6) без изменений.

Для $t > n^{-1}$ и $t \neq (n-2)^{-1}$ мы получаем (4.7) как следствие утверждения 2) леммы 2.2, исключающей какие-либо логарифмы. При $t = (n-2)^{-1}$ гонится лемма 2.4 с $k = 1$, т.е. $\zeta^{-0} = L(\zeta)^{-2}$ и слева, и справа в (4.7). Обращаем внимание на то, что ввиду стабилизации V при больших ζ функция $\xi \mapsto f(\xi) = \zeta^{-t}V(\xi)$ исчезает на бесконечности в случае $t > n^{-1}$, а значит, $f^\infty = 0$ и потому в первой строке (4.7) фигурирует сама V . Еще один важный момент: если $t > (n-2)^{-1}$, то в нашем распоряжении только весовые оценки разностей $W^\circ = W - W^\infty$ и $J^\circ = J - J^\infty$. Нас спасает тот факт, что благодаря компактности носителей функций w , $e_{\alpha\beta}$ формулы (3.5), (4.6) доставляют равенства

$$W^s = tV^s, \quad \eta_\alpha W_{,\alpha}^s - tV^s = -2^{-1}tJ^\infty. \quad (4.8)$$

Вторая формула в (4.8) позволяет, положив $V^\infty = V^s$ и $V^\circ = V - V^\infty$, записать (4.6) в виде

$$\eta_\alpha W_{,\alpha}^\circ + \zeta^{1+t} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta^{-t} V^\circ) = -\eta_\alpha e_{\alpha n}(u) - \frac{t}{2} J^\circ. \quad (4.9)$$

В контексте этого пункта соотношения (4.6) и (4.9) неразличимы, и мы будем опускать индекс ‘ $\circ$ ’ у W и т.п. Подчеркнем, что переход к V° возможен и в (4.7) – в силу (4.8) и (4.2) норма $\|V^\infty; L_2(\omega)\|^2$ уже оценена при $t > (n-2)^{-1}$.

Продолжим преобразования. Из (4.5), (3.4) и (4.6) выводим

$$\int_Q \zeta^{t(n-2)-2-0} \chi(\eta)^2 \left| \eta_\alpha W_{,\alpha} + \zeta^{1+t} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta^{-t} V) \right|^2 d\xi \leq c \mathcal{E}_u, \quad (4.10)$$

где $\chi \in C_0^\infty(\omega)$ и $0 \leq \chi \leq 1$. Интеграл I слева в (4.10) представим как сумму $I_1 + 2I_2$, при этом

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_Q \zeta^{t(n-2)-2-0} \chi^2 \left(|\eta_\alpha W_{,\alpha}|^2 + \zeta^{2+2t} \left| \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta^{-t} V) \right|^2 \right) d\xi, \\ I_2 &= \int_Q \zeta^{t(n-2)-2-0} \zeta^{1+t} \chi^2 \eta_\alpha W_{,\alpha} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta^{-t} V) d\xi. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям I_2 , находим

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \int_Q \zeta^{t(n-2)-2-0} \zeta^1 \chi^2 |W_{,\zeta}| \cdot |\eta_\alpha V_{,\alpha}| d\xi \\ &+ \int_Q \zeta^{t(n-2)-2+0} \chi |W| \left(\zeta^{1+t} \left| \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta^{-t} V) \right| + |\eta_\alpha V_{,\alpha}| \right) d\xi \equiv I_3 + I_4. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Располагая оценками для интегралов в $W_{,\zeta}$ и W и замечая, что $\zeta^{1+t}(\zeta^{-t}V)$ присутствует в I_1 , мы нуждаемся только в оценке слагаемого, содержащего $\eta_\alpha V_{,\alpha}$. Благодаря соотношению $2\eta_\alpha \eta_\beta v_{\alpha,\beta} = \eta_\alpha \eta_\beta e_{\alpha\beta}(u)$ тождество (4.3) принимает вид

$$\eta_\alpha V_{,\alpha} = V + \frac{1}{2} \zeta^{-1} \eta_\alpha \eta_\beta e_{\alpha\beta}(u) + \frac{1}{2} J, \quad (4.12)$$

и потому после умножения (4.12) на срезку $\chi \leq 1$ мы в случае $t \leq (n-2)^{-1}$ получаем

$$\int_Q \zeta^{t(n-2)-2-0} \chi^2 |\eta_\alpha V_{,\alpha}|^2 d\xi \leq c \left(\int_Q \zeta^{t(n-2)-2-0} \chi^2 |V|^2 d\xi + \mathcal{L}_u + \mathcal{E}_u \right). \quad (4.13)$$

Здесь ζ^{-0} имеет тот же смысл, что и слева в (4.7). Если $t > (n-2)^{-1}$, то мы должны учесть компактность множества $\text{supp } e_{\alpha\beta}(u)$ и, повторив рассуждения, приведшие к (4.9), расставить верхние индексы ${}^{\circ}$ у V, J в (4.12). Наконец, в каждый из интегралов в (4.7) можно поместить $\chi(\eta)^2$.

Теперь мы готовы закончить оценки. Применяя неравенство Коши $2ab \leq \varepsilon^{-1}a^2 + \varepsilon b^2$ с малым $\varepsilon > 0$, находим при помощи (4.1), (3.4) и (4.13), (4.7), что

$$\begin{aligned} I_3 &\leq c \left(\varepsilon^{-1} \int_Q \zeta^{t(n-2)} |W_{,\zeta}|^2 d\xi + \varepsilon \int_Q \zeta^{t(n-2)-2-0} \chi^2 |\eta_\alpha V_{,\alpha}|^2 d\xi \right) \\ &\leq c \left\{ \varepsilon^{-1} \mathcal{E}_u + \varepsilon \int_Q \zeta^{tn-0} \chi^2 \left| \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta^{-t} V) \right|^2 d\xi + \mathcal{L}_u + \mathcal{E}_u \right\} \\ &\leq c \{ \varepsilon^{-1} \mathcal{E}_u + \varepsilon (I_1 + \mathcal{L}_u) \}. \end{aligned}$$

Аналогично, в силу (4.2) и (4.13), (4.7)

$$\begin{aligned} I_4 &\leq c \left(\varepsilon^{-1} \int_Q \zeta^{t(n-2)-2-0} |W|^2 d\xi + \varepsilon \int_Q \zeta^{tn-0} \chi^2 \left| \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta^{-t} V) \right|^2 d\xi \right) \\ &\leq c \{ \varepsilon^{-1} (\mathcal{E}_u + \mathcal{L}_u) + \varepsilon (I_1 + \mathcal{E}_u + \mathcal{L}_u) \}. \end{aligned}$$

Итак, согласно (4.10) и (4.11)

$$c\mathcal{E}_u \geq I_1 + 2I_2 \geq I_1 - C\{\varepsilon^{-1}(\mathcal{E}_u + \mathcal{L}_u) + \varepsilon I_1\}.$$

Выбирая $\varepsilon > 0$ малым в достаточной степени и учитывая (4.7), приходим к окончательному соотношению

$$\int_Q \zeta^{t(n-2)-2-0} \chi^2 |V|^2 d\xi \leq cI_1 \leq C(\mathcal{E}_u + \mathcal{L}_u). \quad (4.14)$$

Подведем итоги. Благодаря (3.5) и (4.8)

$$w = W - tV = W^\circ - tV^\circ,$$

т.е. во всех случаях оценки (4.2) и (4.14) гарантируют, что

$$\int_Q \zeta^{t(n-2)-2-0} \chi^2 |w|^2 d\xi \leq C(\mathcal{E}_u + \mathcal{L}_u), \quad (4.15)$$

причем ζ^{-0} такое же, как и слева в (4.7). Выберем срезку χ так, чтобы $\chi = 1$ на некоторой собственной подобласти ω_0 области ω , и введем параболоидальное множество Π_0 равенством (1.1) с заменой ω на ω_0 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $u \in C_0^\infty(\bar{\Pi})$ и $u = 0$ вблизи торца $\{x \in \bar{\Pi} : z = R\}$. Тогда справедливо неравенство

$$\int_{\Pi_0} \mathcal{R}_n(z)^{-2} |u_n(y, z)|^2 dy dz \leq c (\mathcal{E}(u; \Omega) + \|u; L_2\{x \in \Pi : z \in (R, 2^{1+t}R)\}\|^2), \quad (4.16)$$

где

$$\mathcal{R}_n(z) = \begin{cases} z \left[1 + \log \left(\frac{z}{R} \right) \right] & \text{при } t = (n-2)^{-1}, \\ z \left[1 + \log \left(\frac{z}{R} \right) \right]^2 & \text{при } t = n^{-1}, \\ z & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

5. Оценки весовых норм компонент v_α . Заметим, что

$$e_{n\alpha}(u) = \frac{\partial}{\partial y_\alpha} [w + t\zeta^{-1}\eta_\beta v_\beta] + \zeta^t \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta^{-t} v_\alpha). \quad (5.1)$$

Получим, далее, оценку весового интеграла от квадрата суммы $\mathcal{V}(\xi) = \eta_\beta v_\beta(\xi)$, причем исключим очевидные случаи $t = 0$ (т.е. $s = 0$ и Π – полуцилиндр) и $n = 2$ (см. замечание 5.2).

Введем весовые функции $\mathcal{P}_0$ и $\mathcal{P}$ равенствами

$$\mathcal{P}_0(\zeta) = \zeta^{t(n-2)^{-2}} L(\zeta)^{-2\lambda_0(t)}, \quad \mathcal{P}(\zeta) = \zeta^{t(n-2)^{-2}} L(\zeta)^{-2\lambda(t)},$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_0(n^{-1}) &= \lambda(n^{-1}) = 2, & \lambda_0([n-2]^{-1}) &= \lambda([n-2]^{-1}) = 1, \\ \lambda_0(3[n-2]^{-1}) &= \frac{1}{2}, & \lambda(3[n-2]^{-1}) &= 1, \end{aligned} \quad (5.2)$$

и $\lambda_0(t) = \lambda(t)$ для остальных значений t . В соответствии с (3.4) и (4.14)

$$\left| \int_Q \zeta \mathcal{P}_0(\zeta) \chi(\eta)^2 e_{nn}(u; \xi) V(\xi) d\xi \right| \leq c(\mathcal{E}_u + \mathcal{L}_u). \quad (5.3)$$

Пусть J – интеграл из (5.3). Вспоминая формулы для $e_{nn}(u)$ и V (см. (3.3) и (3.5)), обнаруживаем, что

$$\frac{1}{2}J = - \int_Q \chi^2 [(\zeta \mathcal{P}_0)_{,\zeta} w + t \mathcal{P}_{0,\zeta} \mathcal{V}] V d\xi - \int_Q \chi^2 \mathcal{P}_{0w} \mathcal{V}_{,\zeta} d\xi - \int_Q t \chi^2 \zeta^{-1} \mathcal{P}_0 \mathcal{V} \mathcal{V}_{,\zeta} d\xi.$$

Обозначим интегралы в левой части через J_1 , J_2 и tJ_3 . Несложные вычисления дают соотношение

$$0 < c\zeta^{-2} \mathcal{P}(\zeta) \leq |(\zeta^{-1} \mathcal{P}_0(\zeta))_{,\zeta}| \leq C\zeta^{-2} \mathcal{P}(\zeta),$$

где $\zeta \in [T, \infty)$ (важно то, что в случаях $t = n^{-1}$ и $t = (n-2)^{-1}$ показатель $t(n-2) - 3$ степени ζ в $\zeta^{-1} \mathcal{P}_0(\zeta)$ отрицательный, а для $t = 3(n-2)^{-1}$ величины $\lambda_0(t)$ и $\lambda(t)$ различны). Таким образом,

$$|J_3| \geq c \int_Q \zeta^{-2} \mathcal{P}(\zeta) |\chi(\eta) \mathcal{V}(\xi)|^2 d\xi, \quad c > 0.$$

Кроме того, в силу (4.15) и (4.14)

$$|J_1| \leq c\{\varepsilon^{-1}(\mathcal{E}_u + \mathcal{L}_u) + \varepsilon|J_3|\}, \quad \varepsilon \in (0, 1).$$

Так как $2\mathcal{V}_\zeta = \zeta t^{-1}[e_{33}(u) - 2w_{,\zeta}]$ (см. (3.3)), учитывая (3.4) и (4.15), имеем

$$|J_2| \leq c\left\{\mathcal{E}_u + \mathcal{L}_u + \int_Q \chi^2 |(\zeta \mathcal{P}_0)_{,\zeta}| w^2 d\xi\right\} \leq C(\mathcal{E}_u + \mathcal{L}_u).$$

Осталось взять ε малым и, собрав приведенные неравенства, написать

$$\int_Q \chi(\eta)^2 \zeta^{-2} \mathcal{P}(\zeta) |\eta_\beta v_\beta(\xi)|^2 d\xi \leq c(\mathcal{E}_u + \mathcal{L}_u). \quad (5.4)$$

Теперь вернемся к рассмотрению (5.1) и выберем срезающую функцию $\chi_0 \in C_0^\infty(\omega_0)$ так, чтобы $0 \leq \chi_0 \leq 1$ и $\chi_0 = 1$ на собственной подобласти ω_1 области ω_0 . Фиксируем индекс $\alpha = 1, \dots, n-1$ (суммирование по нему не производится). Благодаря (3.4) и (5.1)

$$\begin{aligned} C\mathcal{E}_u &\geq c \int_Q \zeta^{(n-2)t} e_{n\alpha}(u)^2 d\xi \geq \int_Q \chi_0^2 \mathcal{P} e_{n\alpha}(u)^2 d\xi \equiv I_1 + 2I_2, \\ I_1 &= \int_Q \chi_0^2 \mathcal{P} \{ |(w + t\zeta^{-1}\mathcal{V})_{,\alpha}|^2 + \zeta^{2t} |(\zeta^{-t}v_\alpha)_{,\zeta}|^2 \} d\xi, \\ I_2 &= \int_Q \chi_0^2 \mathcal{P} (w + t\zeta^{-1}\mathcal{V})_{,\alpha} \zeta^t (\zeta^{-t}v_\alpha)_{,\zeta} d\xi. \end{aligned}$$

Проинтегрируем по частям I_2 , в результате получим, что

$$\begin{aligned} c|I_2| &\leq \int_Q \chi_0 \mathcal{P} |w + t\zeta^{-1}\mathcal{V}| \zeta^t |(\zeta^{-t}v_\alpha)_{,\zeta}| d\xi + \int_Q \chi_0^2 (\zeta^t \mathcal{P})_{,\zeta} |w + t\zeta^{-1}\mathcal{V}| \zeta^{-t} |v_{\alpha,\alpha}| d\xi \\ &\quad + \int_Q \chi_0^2 \mathcal{P} |(w + t\zeta^{-1}\mathcal{V})_{,\zeta}| \cdot |v_{\alpha,\alpha}| d\xi. \end{aligned}$$

Заметим, что в соответствии с обозначениями $e_{jk}(u)$

$$2(w + t\zeta^{-1}\mathcal{V})_{,\zeta} = e_{nn}(u) - 2t\zeta^{-2}\mathcal{V}_{,\zeta} 2v_{\alpha,\alpha} = e_{\alpha\alpha}(u),$$

и, обратившись к (4.15), (5.4) и (3.4), получим

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq c[\varepsilon^{-1}(\mathcal{E}_u + \mathcal{L}_u) + \varepsilon I_1] + c(\mathcal{E}_u + \mathcal{L}_u) + c(\mathcal{E}_u + \mathcal{L}_u)^{1/2} \mathcal{E}_u^{1/2} \\ &\leq C\{(1 + \varepsilon^{-1})(\mathcal{E}_u + \mathcal{L}_u) + \varepsilon I_1\}, \end{aligned}$$

причем $\varepsilon > 0$ мало. Теперь приходим к соотношению

$$\int_Q \mathcal{P} \zeta^{2t} \left| \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta^{-t} \chi_0 v_\alpha) \right|^2 d\xi \leq I_1 \leq c(\mathcal{E}_u + \mathcal{L}_u). \quad (5.5)$$

Отсюда с помощью неравенств Харди (показатель $t(n-2) - 2 + 2t = (tn-3) + 1$ критический при $t = 3n^{-1}$) выводим после обратных к (3.1) замен следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. В условиях предложения 4.1 при любом $\alpha = 1, \dots, n-1$ величина

$$\int_{\Pi_1} \mathcal{R}_\alpha(z)^{-2} |u_\alpha(y, z)|^2 dy dz$$

не превосходит правой части (4.16). Здесь $\mathcal{R}_\alpha(z) = z^{2-s} (1 + \log(z/R))^{\Lambda(t)}$, $\Lambda(t) = \lambda(t)$ при $t \neq 3n^{-1}$ (см. (5.2)) и показатель

$$\Lambda(3n^{-1}) = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 2, \\ 2 & \text{при } n = 3, \\ 1 & \text{при } n > 3. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Поскольку $\chi_0 v_\alpha \in C_0^\infty(Q)$, то $f^\infty = 0$ для функции $f = \zeta^{-1} \chi_0 v_\alpha$, и для неособых (т.е. $\Lambda(t) = 0$) показателей t можно в (5.5) использовать лемму 2.2, не различая в ней утверждений 1) и 2). При $t = n^{-1}$ и $t = 3(n-2)^{-1}$ применяем лемму 2.4, в которой $k = 2$ и $k = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Если $n = 2$, то $\alpha = 1$ и $e_{21}(u) = w_{,1} + v_{1,\zeta} + t(2\zeta)^{-1} \eta_1 e_{11}(u)$. Поэтому в оценке (5.4) нет необходимости, и мы обнаруживаем, что

$$\int_Q \zeta^{-2} L(\zeta)^{-2\lambda(t)} \left| \frac{\partial}{\partial \zeta} (\chi_0 v_1) \right|^2 d\xi \leq c(\mathcal{E}_u + \mathcal{L}_u),$$

т.е. дополнительные логарифмы не появляются (см. (2.2) и (2.6)).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. В трехмерной ситуации $3n^{-1} = (n-2)^{-1}$, и лемма 2.3 при $k = 2$ дает $\Lambda(3n^{-1}) = \lambda([n-2]^{-1}) + 1 = 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. При $n > 3$ все особые показатели различны, т.е. случаи $t = (n-2)^{-1}$ и $t = 3n^{-1}$ обслуживаются леммами 2.4 и 2.3 при $k = 1$.

6. Весовое неравенство Корна. Рассечем Π на части

$$\Pi^j = \{x \in \Pi : 2^{j-1} < R^{-1}z < 2^j\}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (6.1)$$

Положим $h = 2^{-j}$ и сделаем замену координат

$$(y, z) \mapsto X = (Y, Z) = (h^s y, hz). \quad (6.2)$$

При этом Π^j трансформируется в стандартное множество

$$\tilde{\Pi} = \{(Y, Z) : R < 2Z < 2R, Z^{-s}Y \in \omega\}.$$

Положим теперь

$$\pi^j = \{x \in \Pi^j : z^{-s}y \in \omega_1\}, \quad \tilde{\pi} = \{(Y, Z) : R < 2Z < 2R, Z^{-s}Y \in \omega_1\} \subset \tilde{\Pi},$$

где $\omega_1 \subset \omega$ введена в п. 5. Будем понимать под $w_{,\alpha}$ и $w_{,n}$ производные w по Y_α и Z . Нормируем последнюю компоненту вектора u :

$$\mathcal{W} = h^{s-1}w. \quad (6.3)$$

После указанных замен имеем

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(u; \Pi) &\geq \int_{\Pi^j} \left\{ \left| \frac{\partial w}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial w}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial v_\alpha}{\partial y_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial y_\alpha} \right|^2 \right\} dy dz \\
 &= h^{-1-s(n-1)} \int_{\tilde{\Pi}} \{ h^2 |w_{,n}|^2 + |h^s w_{,\alpha} + h v_{\alpha,n}|^2 + h^{2s} |v_{\alpha,\beta} + v_{\beta,\alpha}|^2 \} dY dZ \\
 &= h^{3-s(n+1)} \int_{\tilde{\Pi}} \{ |\mathcal{W}_{,n}|^2 + h^{2(s-1)} |\mathcal{W}_{,\alpha} + v_{\alpha,n}|^2 + h^{4(s-1)} |v_{\alpha,\beta} + v_{\beta,\alpha}|^2 \} dX \\
 &\geq c h^{3-s(n+1)} \mathcal{E}(v, \mathcal{W}; \tilde{\Pi}).
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

В (6.3) производится суммирование по $\alpha, \beta = 1, \dots, n-1$. Известен (см. [6]–[8] и др.) следующий вариант неравенства Корна:

$$\begin{aligned}
 &\int_{\tilde{\Pi}} [|\mathcal{W}_{,n}|^2 + |\mathcal{W}_{,\beta}|^2 + |v_{\beta,n}|^2 + |v_{\beta,\alpha}|^2 + |\mathcal{W}|^2 + |v_\alpha|^2] dX \\
 &\leq c \left\{ \mathcal{E}(v, \mathcal{W}; \tilde{\Pi}) + \int_{\tilde{\Pi}} [|\mathcal{W}|^2 + |v_\alpha|^2] dX \right\}.
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

После замен, обратных к (6.2) и (6.3), умножая (6.5) на $h^{3-s(n+1)}$ и учитывая (6.4), получим, что

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Pi^j} \left(\left| \frac{\partial w}{\partial z} \right|^2 + h^{2(1-s)} \left| \frac{\partial w}{\partial y_\alpha} \right|^2 + h^{2(1-s)} \left| \frac{\partial v_\alpha}{\partial z} \right|^2 + h^{4(1-s)} \left| \frac{\partial v_\beta}{\partial y_\alpha} \right|^2 \right. \\
 &\quad \left. + h^2 |w|^2 + h^{4-2s} |v_\alpha|^2 \right) dx \leq c \left\{ \mathcal{E}(u; \Pi^j) + \int_{\pi^j} (h^2 |w|^2 + h^{4-2s} |v_\alpha|^2) dx \right\}.
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Обращаясь к (6.1), видим, что $R(2z)^{-1} < h < Rz^{-1}$ на Π^j , а значит, в (6.6) можно писать под интегралами z^{-1} на месте h . В результате оказывается, что перед $|w|^2$ и $|v_\alpha|^2$ в последнем интеграле появляются весовые множители $\mathcal{R}_n(z)^{-2}$ и $\mathcal{R}_\alpha(z)^{-2}$, определенные в предложениях 4.1 и 5.1. Единственный недочет – отсутствие логарифмов – легко устраняется: умножим неравенство на число $[1 - \log h]^{-2\Lambda(t)}$, меньшее 1 из-за $\Lambda(t) > 0$, заменим в подынтегральных выражениях $-\log h$ на $\log(z/R)$ и отбросим “лишние” степени $[1 + \log(z/R)]^{-1}$ в правой части. Поскольку постоянная в модифицированных указанным способом неравенствах (6.6) не зависит от j , то, суммируя их по $j = 1, 2, \dots$, приходим к соотношению

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Pi} \left(1 + \log \frac{z}{R} \right)^{-2\Lambda(t)} \left\{ \left| \frac{\partial w}{\partial z} \right|^2 + z^{2(s-1)} \left| \frac{\partial w}{\partial y_\alpha} \right|^2 + z^{2(s-1)} \left| \frac{\partial v_\alpha}{\partial z} \right|^2 + z^{4(s-1)} \left| \frac{\partial v_\alpha}{\partial y_\beta} \right|^2 \right. \\
 &\quad \left. + z^{-2} |w|^2 + z^{2s-4} |v_\alpha|^2 \right\} dx \leq c \left\{ \mathcal{E}(u; \Pi) + \int_{\Pi_1} (\mathcal{R}_n^{-2} |w|^2 + \mathcal{R}_\alpha^{-2} |v_\alpha|^2) dx \right\}.
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

ТЕОРЕМА 6.1. Для вектор-функции $u = (v, w) \in C_0^\infty(\bar{\Omega})^n$ справедливо весовое неравенство Корна

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} (1 + |\log(1 + z^2)|)^{-\Lambda(t)} \left\{ \left| \frac{\partial w}{\partial z} \right|^2 + (1 + z^2)^{s-1} \left[\left| \frac{\partial w}{\partial y_\alpha} \right|^2 + \left| \frac{\partial v_\alpha}{\partial z} \right|^2 \right] \right. \\
 &\quad \left. + (1 + z^2)^{2(s-1)} \left| \frac{\partial v_\alpha}{\partial y_\beta} \right|^2 + (1 + z^2)^{-1} |w|^2 + (1 + z^2)^{s-2} |v_\alpha|^2 \right\} dx \leq x \mathcal{E}(u; \Omega).
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Здесь $\alpha, \beta = 1, \dots, n-1$, $\Lambda(t)$ – показатель, введенный в предложении 5.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подобное (6.5) неравенство Корна

$$\|u; H^1(\Omega \cap B_{3R})\|^2 \leq c\{\mathcal{E}(u; \Omega) + \|u; L_2(\Omega \cap B_R)\|^2\}$$

позволяет при помощи умножения на срезку перейти к случаю вектор-функции u , аннулирующейся при $|x| < 2R$ и потому определенной на Π . Используя теперь неравенство (6.7) совместно с предложениями 4.1 и 5.1, предоставляющими оценку последнего интеграла в (6.6), и заменяя весовые множители эквивалентными, выводим (6.8).

7. О разрешимости задач теории упругости в энергетическом классе.

Ввиду простоты случая $n = 2$ (см. замечание 7.1) и ввиду сомнительности прикладного значения случаев $n > 3$ ограничимся рассмотрением трехмерного упругого тела Ω . Введем тензор напряжений $\sigma(u)$ с декартовыми компонентами

$$\sigma_{jk}(u; x) = a_{jk}^{pq}(x) \varepsilon_{pq}(u; x). \quad (7.1)$$

В (7.1) a_{jk}^{pq} – измеримые ограниченные функции, подчиненные условиям симметричности и эллиптичности

$$a_{jk}^{pq}(x) = a_{pk}^{jq}(x) = a_{kp}^{qj}(x), \quad c_a S_{jk} S_{jk} \leq a_{jk}^{pq}(x) S_{jk} S_{pq} \leq C_a S_{pq} S_{pq}, \quad (7.2)$$

где x – любая точка в Ω , c_a и C_a – некоторые положительные постоянные, S_{jk} – элементы (произвольной) симметрической матрицы, т.е. $S_{pq} = S_{qp}$.

Рассмотрим задачу теории упругости

$$\begin{aligned} -\sigma_{jk,k}(u; x) &= f_j(x), & x \in \Omega, \\ \nu_k(x) \sigma_{jk}(u; x) &= 0, & x \in \partial\Omega \setminus \Gamma, \quad u_j(x) = 0, & x \in \Gamma. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Здесь $j, k = 1, 2, 3$ (суммирование по k), $f = (f_1, f_2, f_3)$ – вектор массовых сил, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$ и $\Gamma \subset \partial\Omega$. Если $\Gamma = \emptyset$, то именуем (7.3) задачей Неймана. Разумеется, мы имеем дело и со смешанной краевой задачей (7.3), при этом считаем, что

$$\Gamma \subset \partial\Omega \cap B_{2R}, \quad \text{mes}_2 \Gamma > 0. \quad (7.4)$$

Обозначим через $\mathcal{H}$ пополнение $C_0^\infty(\bar{\Omega} \setminus \Gamma)^3$ по норме

$$\|u; \mathcal{H}\| = (\mathcal{E}(u; \Omega) + \|u; L_2(\Omega \cap B_R)\|^2)^{1/2}. \quad (7.5)$$

Очевидно, что $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, назовем его энергетическим. Как обычно, под энергетическим (обобщенным) решением u задачи (7.3) подразумевается элемент пространства $\mathcal{H}$, удовлетворяющий при любой пробной функции $U \in \mathcal{H}$ интегральному тождеству

$$E(u, U) = (f_j, U_j)_\Omega. \quad (7.6)$$

Здесь $E(u, u)$ – функционал упругой энергии:

$$E(u, U) = (\sigma_{jk}(u), \varepsilon_{jk}(U))_\Omega.$$

В силу (7.2), (7.1) $E(u, U) = E(U, u)$ и

$$c\mathcal{E}(u; \Omega) \leq E(u, u) \leq C\mathcal{E}(u; \Omega),$$

причем $c > 0$. Квадратичные формы $\mathcal{E}(u; \Omega)$ и $E(u, u)$ вырождаются только на жестких смещениях

$$r(x) = \tau + \rho \times x, \quad (7.7)$$

где $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ и $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ – постоянные векторы, а ‘ $\times$ ’ – векторное произведение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. Пусть $\Gamma = \emptyset$. Если $s \leq 1/4$, то при любых $\tau, \rho \in \mathbb{R}^3$ вектор (7.7) попадает в $\mathcal{H}$. В противном случае включение $r \in \mathcal{H}$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \rho_1 = \rho_2 = 0 \quad \text{при } s \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \quad \rho = 0, \quad \tau_3 = 0 \quad \text{при } s \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \\ \rho = 0, \quad \tau = 0 \quad \text{при } s \in \left(\frac{3}{4}, 1\right). \end{aligned} \quad (7.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверка отрицающего утверждения проста: при нарушении условий (7.8) расходится интеграл слева в (6.8). Для того чтобы установить принадлежность r энергетическому пространству, нужно построить последовательность в $C_0^\infty(\bar{\Omega})^3$, приближающую r по норме (7.5). Для элементов базиса

$$(1, 0, 0), \quad (0, 1, 0), \quad (0, 0, 1), \quad (-y_2, y_1, 0), \quad (z, 0, -y_1), \quad (0, z, -y_2) \quad (7.9)$$

в линейале жестких смещений эти приближения выглядят так:

$$\begin{aligned} \left(\chi_N, 0, -y_1 \frac{\partial}{\partial z} \chi_N\right), \quad \left(0, \chi_N, -y_2 \frac{\partial}{\partial z} \chi_N\right), \quad (0, 0, \chi_N), \quad (-y_2 \chi_N, y_1 \chi_N, 0), \\ \left(z \chi_N, 0, -y_1 \frac{\partial}{\partial z} [z \chi_N]\right), \quad \left(0, z \chi_N, -y_2 \frac{\partial}{\partial z} [z \chi_N]\right). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Здесь $N = 1, 2, \dots$, а в качестве $\chi_N(z)$ сначала возьмем $\chi([RN]^{-1}z)$, где $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$,

$$\chi(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 1, \\ 1 & \text{при } t > 2. \end{cases}$$

Рассчитывая деформации (1.4) для разностей соответственных векторов в (7.9) и (7.10), находим, что функционал (1.3), вычисленный для этих разностей, оказывается равным

$$O(N^{4s-3}), \quad O(N^{4s-3}), \quad O(N^{2s-1}), \quad O(N^{2s-1}), \quad O(N^{4s-1}), \quad O(N^{4s-1}).$$

Отсюда следует нужное утверждение для $s \neq 1/4, 1/2, 3/4$. В критических случаях положим $\chi_N(z) = \chi([\log(RN)]^{-1} \log z)$. Нетрудно убедиться в том, что при $s = 1/4, 1/2, 3/4$ соответственно для первой, второй и третьей пары упоминавшихся разностей функционал (1.3) есть $O(|\log N|^{-1})$ и также является бесконечно малым при $N \rightarrow \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Для $n > 3$ критическими значениями параметра s оказываются

$$3(n+1)^{-1}, \quad 3(n+3)^{-1}, \quad (n-1)^{-1}, \quad (n+1)^{-1} \quad (7.11)$$

(они отвечают тем $t = s(1-s)^{-1}$, для которых $\Lambda(t) > 0$). При изменении s от 1 до $-\infty$ переход через показатели (7.11) сопровождается покиданием энергетического класса очередным жестким смещением, сортировка последних представляется несложной алгебраической задачей. Для $n = 2$ имеется только одно критическое значение $s = 1/3$ ($s = 3/5$ отторгнуто замечанием 5.2). При этом жесткие поступательные смещения $(1, 0)$ и $(0, 1)$ всегда принадлежат $\mathcal{H}$, а поворот $(-x_2, x_1)$ — лишь в случае $s < 1/3$.

Следующие две теоремы возникают, как обычно, согласно теореме Рисса о функционале в гильбертовом пространстве.

ТЕОРЕМА 7.1. *Предположим, что $\Gamma = \emptyset$, а функции*

$$\begin{aligned} x &\mapsto (1 + |\log(1 + z^2)|)^{\Lambda(t)} (1 + |z|)^{2-s} f_\alpha(x), & \alpha = 1, 2, \\ x &\mapsto (1 + |\log(1 + z^2)|)^{\Lambda(t)} (1 + |z|) f_3(x) \end{aligned} \quad (7.12)$$

принадлежат $L_2(\Omega)$.

1) Пусть $s \leq 1/4$. Задача Неймана (7.6) имеет решение $u \in \mathcal{H}$ в том и только том случае, если $(f_j, r_j)_\Omega = 0$ для любого жесткого смещения r ; это решение определено с точностью до произвольного слагаемого вида (7.7).

2) Утверждение 1) сохраняет силу и для $s \in (1/4, 1)$, если последнюю фразу в нем составить при учете условий (7.8).

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть выполнено требование (7.4), а функции (7.12) попадают в $L_2(\Omega)$. Тогда смешанная задача (7.6) имеет единственное решение $u \in \mathcal{H}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. Не следует путать понятия “энергетическое решение” и “решение с конечной энергией”. Так при $\Gamma = \emptyset$ произвольный вектор r из (7.7) удовлетворяет однородным уравнениям (7.3) и для него $E(r, r) = 0$, однако предложение 7.1 указывает жесткие смещения, не принадлежащие $\mathcal{H}$ и потому не являющиеся энергетическими решениями. В случае (7.4) каждому вектору r , нарушающему (7.8), также сопоставляется решение u^r однородной задачи (7.3) с конечной (теперь ненулевой!) энергией. Это решение представимо в виде $u^r = r + \mathcal{U}^r$, где $\mathcal{U}^r$ компенсирует невязку, оставленную r в условиях Дирихле на $\Gamma \neq \emptyset$, и попадает в энергетический класс после умножения на срезку χ_N из (7.10).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Назаров С. А. Неравенства Корна, асимптотически точные для тонких областей // Вестн. СПбГУ. Матем., мех., астроном. 1992. № 8. С. 19–24.
- [2] Кондратьев В. А., Олейник О. А. О зависимости констант в неравенстве Корна от параметра, характеризующего геометрию области // УМН. 1989. Т. 44. № 6. С. 157–158.
- [3] Kondratiev V. A., Oleinik O. A. Korn's type inequalities for a class of unbounded domains and applications to boundary-value problems in elasticity // Elasticity. Mathematical methods and application / ed. G. Eason, R. W. Ogden. Chichester: Horwood, 1990. P. 211–233.
- [4] Kondratiev V. A., Oleinik O. A. Hardy's and Korn's type inequalities and their applications // Rend. Mat. Appl. (7). 1990. V. 10. P. 641–666.
- [5] Nazarov S. A., Plamenevsky B. A. Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin: Walter de Gruyter, 1994.
- [6] Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
- [7] Кондратьев В. А., Олейник О. А. Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенство Корна // УМН. 1988. Т. 43. № 5. С. 55–98.
- [8] Oleinik O. A. Korn's type inequalities and applications to elasticity. Convegno internazionale in memoria di Vito Volterra // Atti Accad. Naz. Lincei. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Mem. (9) Mat. Appl. 1992. V. 92. P. 183–209.