



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Кулагин, Об алгебраической независимости значений гипергеометрических функций одного класса,
Матем. заметки, 1996, том 59, выпуск 3, 402–414

<https://www.mathnet.ru/mzm1728>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 216.73.216.37

14 декабря 2025 г., 19:38:55



ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ ЗНАЧЕНИЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА

В. А. Кулагин

Введение. Пусть $f_1(z), \dots, f_m(z)$ – E-функции, составляющие решение системы дифференциальных уравнений

$$y'_i = q_{i,0} + \sum_{j=1}^m q_{i,j} y_j, \quad i = 1, \dots, m,$$

$q_{i,j} \in \mathbb{C}(z)$, α – алгебраическое число, отличное от нуля и полюсов всех $q_{i,j}$.

В работе [1] А. Б. Шидловский доказал, что алгебраическая независимость над $\mathbb{Q}$ чисел $f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$ эквивалентна алгебраической независимости над $\mathbb{C}(z)$ функций $f_1(z), \dots, f_m(z)$. Для применения этой теоремы к конкретным функциям многими авторами были разработаны методы доказательства алгебраической независимости функций над $\mathbb{C}(z)$ (история вопроса освещена в монографии [2]).

В работах В. Х. Салихова [3], [4] и Ф. Бейкерса, В. Д. Браунвелла и Г. Хекмана [5] были созданы глубокие методы доказательства алгебраической независимости гипергеометрических функций и их последовательных производных. В их результатах на значения параметров гипергеометрических функций накладывались некоторые ограничения. В том числе такие, что в символах, стоящих в числителях и знаменателях коэффициентов степенных рядов функций, не должны происходить существенные сокращения (“невырожденные” случаи).

В работе [6], используя теорему А. Б. Шидловского, другим методом была доказана общая теорема об алгебраической независимости значений E-функций, которая может быть применена к гипергеометрическим функциям в “вырожденных” случаях.

В настоящей статье, являющейся продолжением работы [6], эта теорема применяется к конкретным E-функциям.

Рассмотрим функцию

$$\varphi_{k,m}(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_1 + 1)_n \cdots (\lambda_k + 1)_n (\mu_1 + n) \cdots (\mu_m + n)} \left(\frac{z}{k}\right)^{nk},$$

где $(\lambda)_n = \lambda(\lambda + 1) \cdots (\lambda + n - 1)$, $\lambda_i, \mu_j \neq -1, -2, \dots$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, m$, $k, m \in \mathbb{N}$.

Пусть $\{a\} = \{a_1, \dots, a_k\}$, $\{b\} = \{b_1, \dots, b_k\}$, все $a_i, b_i \in \mathbb{C}$. В дальнейшем $\{a\} \equiv \{b\} \pmod{\mathbb{Z}}$ означает, что существует перестановка $i_1, \dots, i_k$ чисел $1, \dots, k$ такая, что $(a_j - b_{i_j}) \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, k$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $k > 2$ – простое число, $\alpha \neq 0$ – алгебраическое число, $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{Q}$, $\lambda_i, \mu_j \neq -1, -2, \dots$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq m$.

Тогда для алгебраической независимости чисел

$$\varphi_{k,m}(\alpha), \varphi'_{k,m}(\alpha), \dots, \varphi_{k,m}^{(k+m-1)}(\alpha) \quad (1)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$(\mu_j - \lambda_i) \notin \mathbb{N}, \quad 1 \leq i \leq k, \quad 1 \leq j \leq m; \quad (2)$$

$$(\mu_i - \mu_j) \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad 1 \leq i, j \leq m; \quad (3)$$

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \not\equiv \left\{0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}\right\} \pmod{\mathbb{Z}}. \quad (4)$$

Для доказательства требуется следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $\mu_j \in \mathbb{Q}$, $-\mu_j \notin \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, m$,

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \equiv \left\{\lambda, \lambda + \frac{1}{k}, \dots, \lambda + \frac{k-1}{k}\right\} \pmod{\mathbb{Z}}, \quad 0 < \lambda < \frac{1}{k}.$$

Тогда

- 1) если k – четное число и выполняются условия (2), (3) и

$$\frac{k}{2}(2\lambda - \mu_j) \notin \mathbb{Z}, \quad 1 \leq j \leq m, \quad (5)$$

то числа (1) алгебраически независимы,

- 2) если k – нечетное число, то для алгебраической независимости чисел (1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись только условия (2) и (3).

Формулировки теорем опубликованы в [7]. Достаточность условий теоремы 1 при $k = 1, 2$ была установлена А.Б. Шидловским [8]. Доказательство теоремы 1 использует результат В.Х. Салихова [3] (случай $m = 0$).

1. Вспомогательные утверждения. Рассмотрим дифференциальное уравнение с комплексными коэффициентами

$$y' + \left(\frac{a}{z} + b\right)y + \frac{c}{z} = hz^n + gz^m, \quad (6)$$

$$a \notin \mathbb{N}, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0; n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, \quad n \geq m.$$

Введем обозначение $P(z) = hz^n + gz^m$. Если $h \neq 0$ и $g \neq 0$, то положим $N = \max\{-1, n\}$, $M = \min\{0, m+1\}$.

ЛЕММА 1. Если уравнение (6) имеет частное решение $v \in \mathbb{C}(z)$, то $P(z) \neq 0$, a в представима в виде суммы

$$v = \sum_{i=M}^N x_i z^i, \quad x_i \in \mathbb{C}, \quad x_N \neq 0, \quad x_M \neq 0. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В конечной части плоскости особой точкой функции v может быть только точка $z = 0$. В ее окрестности v представима в виде суммы $v = x_r z^r + \dots + x_l z^l$, $l, r \in \mathbb{Z}$, $x_r \neq 0$, $x_l \neq 0$. Подставляя v в (6) и сравнивая коэффициенты при z^l , а затем при z^{r-1} , получим утверждение леммы.

СЛЕДСТВИЕ. Если $a \notin \mathbb{N}$, $b \neq 0$ и $c \neq 0$, то уравнение $y' + (a/z + b)y + c/z = 0$ не имеет решений из $\mathbb{C}(z)$.

ЛЕММА 2. Если $a \notin \mathbb{Z}$ или $b \neq 0$, то уравнение $y' + (a/z + b)y = 0$ не имеет решений из $\mathbb{C}(z)$, кроме $y \equiv 0$.

Утверждение очевидно.

Пусть $v \in \mathbb{C}(z)$ есть решение (6) и имеет место (7).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Систему линейных уравнений относительно $x_N, \dots, x_M$, полученную в результате сравнения в уравнении (6) коэффициентов при всех степенях z после подстановки в него (7), будем называть *определяющей системой уравнений* для v .

В дальнейшем, если две системы аналитических в некоторой области функций $F_1, \dots, F_n$ и $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ алгебраически эквивалентны над $\mathbb{C}(z)$, то это будем обозначать $(F_1, \dots, F_n) \sim (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$. (Определение алгебраической эквивалентности см. в [9, с. 264].)

ЛЕММА 3. Пусть функции $u_1(z), \dots, u_n(z)$ линейно над $\mathbb{C}(z)$ выражаются через функции $v_1(z), \dots, v_n(z)$

$$u_i(z) = q_{i,0} + \sum_{j=1}^n q_{i,j} v_j(z), \quad i = 1, \dots, n,$$

и определитель $|q_{i,j}| \neq 0$, $1 \leq i, j \leq n$.

Тогда $(u_1(z), \dots, u_n(z)) \sim (v_1(z), \dots, v_n(z))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО имеется в [2, с. 239].

ЛЕММА 4. Пусть $(\mu_j - \lambda_i) \notin \mathbb{N}$, $l_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, k$, а функция F получена из $\varphi_{k,m}$ заменой параметров $\lambda_i \rightarrow \lambda_i + l_i$, $i = 1, \dots, k$.

Тогда $(F, F', \dots, F^{(m+k-1)}) \sim (\varphi_{k,m}, \varphi'_{k,m}, \dots, \varphi_{k,m}^{(m+k-1)})$.

Эта лемма при $m = 0$ доказана В.Х. Салиховым [3] (доказательство имеется также в [2, с. 330]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\delta = z \frac{d}{dz}$. Пусть для некоторого s , $1 \leq s \leq k$, $l_s \geq 1$, и функция f получена из F заменой $\lambda_s \rightarrow \lambda_s - 1$. Легко проверить, что

$$(\delta + k(\lambda_s + l_s))(F) = k(\lambda_s + l_s)f, \quad (8)$$

и F удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\mathcal{L}(y) = k^m z^k, \quad (9)$$

где дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ имеет вид

$$\mathcal{L} = \left(\prod_{i=1}^k (\delta + k(\lambda_i + l_i)) - z^k \right) \prod_{j=1}^m (\delta + k\mu_j).$$

Из (8) и (9) получаем, что функции

$$f, f', \dots, f^{(m+k-1)} \quad (10)$$

линейно над $\mathbb{C}(z)$ выражаются через функции

$$F, F', \dots, F^{(m+k-1)}. \quad (11)$$

Докажем теперь, что функции (11) таким же образом выражаются через (10). С помощью равенств

$$\delta + k\mu_j = \delta + k(\lambda_s + l_s) + k(\mu_j - \lambda_s - l_s)$$

оператор $\mathcal{L}$ представим в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1(\delta + k(\lambda_s + l_s)) + \gamma, \quad (12)$$

где

$$\mathcal{L}_1 = \delta^{k+m-1} + a_{k+m-2}\delta^{k+m-2} + \dots + a_0, \quad a_i \in \mathbb{C}[z],$$

$$\gamma = z^k k^m \prod_{j=1}^m (\lambda_s + l_s - \mu_j).$$

По условию леммы $(\mu_i - \lambda_j) \notin \mathbb{N}$, и поэтому $\gamma \neq 0$. Из (12) и (8) получим $\mathcal{L}(F) = \mathcal{L}_1(\delta + k(\lambda_s + l_s))(F) + \gamma F = k(\lambda_s + l_s)\mathcal{L}_1(f) + \gamma F$, а так как $F(z)$ удовлетворяет (9), то

$$F(z) = \frac{k^m z^k}{\gamma} + k \frac{(\lambda_s + l_s)}{\gamma} \mathcal{L}_1(f). \quad (13)$$

Функция $f(z)$, аналогично $F(z)$, удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{L}_2(y) = k^m z^k, \quad (14)$$

где оператор $\mathcal{L}_2$ получается из $\mathcal{L}_1$ заменой $\lambda_s \rightarrow \lambda_s - 1$. Из (13), (12) и (14) получим, что функции (11) линейно над $\mathbb{C}(z)$ выражаются через функции (10). Следовательно, эти совокупности функций алгебраически эквивалентны над $\mathbb{C}(z)$.

После нужного количества повторений указанных рассуждений получим утверждение леммы.

2. Доказательство теоремы 2. Можно считать, ввиду леммы 4, что $\lambda_i = \lambda + (i - 1)/k$, $i = 1, \dots, k$. Обозначим $\Lambda = \lambda k + k - 1$,

$$\psi_\Lambda(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(\Lambda + 1)_n}.$$

Функция

$$\varphi_k(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_1 + 1)_n \cdots (\lambda_k + 1)_n} \left(\frac{z}{k}\right)^{nk}$$

связана с $\psi_\Lambda(z)$ следующим образом:

$$\varphi_k(z) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_\Lambda(\xi^i z), \quad (15)$$

где ξ – первообразный корень степени k из 1. Доказательство разложения $\varphi_k(z)$ в сумму (15) имеется в [2, с. 340]. В дальнейшем для удобства считаем $\xi = \exp\{2\pi i/k\}$. Рассмотрим функции

$$\left. \begin{aligned} \omega_j(z) &= \psi_\Lambda(\xi^j z), \quad j = 1, \dots, k, \\ \omega_{k+i}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{s=1}^k (\lambda + 1 + \frac{s-1}{k})_n (\mu_1 + n) \cdots (\mu_i + n)} \left(\frac{z}{k}\right)^{nk}, \\ i &= 1, \dots, m, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} y'_j &= \left(-\frac{\Lambda}{z} + \xi^j\right) y_j + \frac{\Lambda}{z}, \quad j = 1, \dots, k, \\ y'_{k+1} &= -\frac{k}{z} \mu_1 y_{k+1} + \frac{1}{z} (y_1 + \dots + y_k), \\ y'_{k+i} &= -\frac{k}{z} \mu_i y_{k+i} + \frac{k}{z} y_{k+i-1}, \quad i = 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Покажем, что

$$(\varphi_{k,m}, \varphi'_{k,m}, \dots, \varphi_{k,m}^{(k+m-1)}) \sim (\omega_1, \dots, \omega_{k+m}). \quad (18)$$

Исходя из равенства $\varphi_{k,m}(z) = \omega_{k+m}(z)$ и пользуясь уравнениями системы (17), получим: если $i = 1, \dots, m-1$, то

$$\varphi_{k,m}^{(i)} = \left(\frac{k}{z}\right)^i \omega_{k+m-i} + \sum_{j=0}^{i-1} a_{i,j} \omega_{k+m-j},$$

а если $i = m$, то

$$\varphi_{k,m}^{(m)} = \frac{1}{z} \left(\frac{k}{z}\right)^{m-1} \sum_{j=1}^m \omega_j + \sum_{j=0}^{m-1} a_{m,j} \omega_{k+m-j}, \quad a_{i,j} \in \mathbb{C}(z).$$

Индукцией по i легко доказать, что функции $\varphi_{k,m}^{(i)}$, $i = m+1, \dots, m+k-1$, можно представить в виде линейной формы

$$\begin{aligned} \varphi_{k,m}^{(i)} &= \sum_{j=1}^k \left(\sum_{s=0}^{i-m} b_{i,s} \xi^{js} \right) \omega_j + \sum_{j=0}^{m-1} a_{i,j} \omega_{k+m-j}, \\ b_{i,s}, a_{i,j} &\in \mathbb{C}(z), \quad b_{i,i-m} \neq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\varphi_{k,m}^{(i)}$, $i = 0, 1, \dots, m + k - 1$, линейно над $\mathbb{C}(z)$ выражаются через функции (16), и определитель матрицы перехода равен $\prod_{1 \leq i < j \leq k} (\xi^i - \xi^j) \prod_{s=0}^{k-1} b_{m+s,s} \neq 0$. По лемме 3 эквивалентность (18) доказана. Поэтому для доказательства теоремы достаточно установить ее утверждение для чисел $\omega_1(\alpha), \dots, \omega_m(\alpha)$.

1) Пусть k – четное число, $k = 2l$. Докажем, что функции (16) удовлетворяют условиям А), В), С) и D) теоремы работы [1]. Для $n = k + 1, \dots, k + m$ положим $\beta = 2\Lambda - k\mu_{n-k}$.

А) Функции $\omega_1(z), \dots, \omega_k(z)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$. Это доказано в [8].

В) Дифференциальное уравнение $y'_i = (\xi^i - \Lambda/z)y_i + \Lambda/z$, $i = 1, \dots, k$, не имеет решений из $\mathbb{C}(z)$ (следствие из леммы 1).

С) Дифференциальное уравнение $y' = (\xi^i - \xi^j)y$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq k$, имеет только тривиальное решение из $\mathbb{C}(z)$. Очевидно.

D) Докажем, что для $n = k + 1, \dots, m$ и любого решения $v_{i,j} \in \mathbb{C}(z)$ системы дифференциальных уравнений

$$y'_{i,j} = \left(\frac{\beta}{z} - \xi^i - \xi^j \right) y_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq k, \quad (19)$$

такого, что $v_{i,j} = v_{j,i}$, и любого набора натуральных $t_1, \dots, t_k$ система дифференциальных уравнений

$$Y' + Y(A_{n-1} - q_{n,n}E_{n-1}) + Q_{n-1} = V_{n-1}, \quad (20)$$

где $Y = (y_1, \dots, y_{n-1})$, $A_{n-1} = (q_{i,j})$ – матрица коэффициентов при $y_1, \dots, y_{n-1}$ первых $n - 1$ уравнений системы (17), E_{n-1} – единичная матрица порядка $n - 1$, $V_{n-1} = (u_1, \dots, u_k, 0, \dots, 0)$,

$$\dim V_{n-1} = n - 1, \quad u_i = \frac{\Lambda}{z} \sum_{j=1}^k t_j v_{i,j}, \quad Q_{n-1} = (q_{n,1}, \dots, q_{n,n-1}),$$

не имеет решений, состоящих из рациональных функций.

Из леммы 2 следует, что решение $v_{i,j} \in \mathbb{C}(z)$ системы (19) имеет вид

$$v_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta \notin \mathbb{Z} \text{ или } |i - j| \neq l, \\ c_{i,j} z^\beta, & \text{если } \beta \in \mathbb{Z} \text{ и } |i - j| = l, \quad c_{i,j} \in \mathbb{C}. \end{cases} \quad (21)$$

Рассмотрим функции (21), для которых $c_{i,j} = c_{j,i}$ ($1 \leq i, j \leq k$). Тогда в (20) V_{n-1} имеет вид: $V_{n-1} = z^{\beta-1}(a_1, \dots, a_k, 0, \dots, 0)$, где все $a_i = 0$, если $\beta \notin \mathbb{Z}$, а при $\beta \in \mathbb{Z}$

$$a_i = \begin{cases} \Lambda c_{i,i+l} t_{i+l}, & 1 \leq i \leq l, \\ \Lambda c_{i,i-l} t_{i-l}, & l < i \leq k. \end{cases} \quad (22)$$

Для этого заметим, что при $\beta \in \mathbb{Z}$ для каждого i , $1 \leq i \leq k$, существует только одно j , $1 \leq j \leq k$, для которого $|i - j| = l$, а именно: $j = i + l$, если $i \leq l$, и $j = i - l$, если $i > l$.

Из предположения $c_{i,j} = c_{j,i}$, $1 \leq i, j \leq k$, следует

$$a_{i+l}t_{i+l} = a_i t_i. \quad (23)$$

Докажем теперь, что для $n = k + 1, \dots, k + m$ соответствующая система (20) не имеет решений, состоящих из рациональных функций. Рассмотрим следующие случаи.

1.1) Пусть $n = k + 1$. Тогда $\beta = 2\Lambda - k\mu_1$ и (20) имеет вид

$$y'_i + \left(\xi^i + \frac{1}{z}(k\mu_1 - \Lambda) \right) y_i + \frac{1}{z} = a_i z^{\beta-1}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (24)$$

Из условия (2) следует, что при любом i , $0 \leq i \leq k - 1$,

$$\left(\mu_1 - \lambda - \frac{i}{k} \right) \notin \mathbb{N}, \text{ т.е. } k\mu_1 - \Lambda = (k(\mu_1 - \lambda) - k + 1) \notin \mathbb{N}.$$

Если найдется $a_i = 0$, то по следствию леммы 1, i -е уравнение системы (24) не имеет решений из $\mathbb{C}(z)$. Предположим, что $\beta \in \mathbb{Z}$ и все $a_i \neq 0$. Возможны три подслучая:

а) Пусть $\beta = 0$. Тогда $2\Lambda - k\mu_1 = 2\lambda k + 2k - 2 - k\mu_1 = 0$, или $\frac{k}{2}(2\lambda - \mu_1) = 1 - k$, что противоречит условию (5). Следовательно, этот случай невозможен.

в) Пусть $\beta > 0$ и (24) имеет некоторое решение $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{C}(z)$. По лемме 1 v_j разложима в сумму $v_j = x_{0,j} + x_{1,j}z + \dots + x_{\beta-1,j}z^{\beta-1}$ и определяющая система линейных уравнений для v_j имеет вид

$$\left. \begin{aligned} (\mu_1 - \mu_2)x_{0,j} &= 1, \\ (\Lambda - k\mu_1 - i)x_{i,j} &= \xi^j x_{i-1,j}, \quad i = 1, \dots, \beta - 1, \\ a_j &= \xi^i x_{\beta-1,j}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Так как $(\Lambda - k\mu_1) \notin \mathbb{Z}$, то $x_{i,j} \neq 0$, $i = 0, 1, \dots, \beta - 1$. Перемножая эти равенства и сокращая результат на $x_{0,j} \cdots x_{\beta-1,j}$, получим

$$a_j(\mu_1 - \mu_2) \prod_{i=0}^{\beta-1} (\Lambda - k\mu_1 - i) = \xi^j \beta. \quad (26)$$

Разделим левые и правые части (26) при $j = k$ и $j = l$. Учитывая (23), получим $t_k = t_l \exp(\beta \pi i)$. Следовательно, β – четное число. Но $\beta = 2\Lambda - k\mu_1 = 2(l(2\Lambda - \mu_1) + k - 1)$ и поэтому $l(2\Lambda - \mu_1) \in \mathbb{Z}$, что противоречит условию (5).

с) $\beta < 0$. Этот случай аналогичен предыдущему.

1.2) Пусть $n = k + 2$, $\beta = 2\Lambda - k\mu_2$. Положим $\sigma = k(\mu_1 - \mu_2)$. В данном случае система (20) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} y'_i + \left(\xi^i + \frac{1}{z}(k\mu_2 - \Lambda) \right) y_i + \frac{1}{z} y_{k+1} &= a_i z^{\beta-1}, \quad i = 1, \dots, k, \\ y'_{k+1} - \frac{\sigma}{z} y_{k+1} + \frac{k}{z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Если $\sigma = 0$, то последнее уравнение, очевидно, не имеет решений из $\mathbb{C}(z)$ и утверждение доказано. Предположим, что $\sigma \neq 0$. Интегрируя это уравнение, найдем $y_{k+1} = k/\sigma + c_0 z^\sigma$, $c_0 \in \mathbb{C}$. Рассмотрим теперь подсистему из k первых уравнений (27)

$$\begin{aligned} y'_i + \left(\xi^i + \frac{1}{z}(k\mu_2 - \Lambda) \right) y_i + \frac{k}{\sigma z} + c_0 z^{\sigma-1} &= a_i z^{\beta-1}, \\ i &= 1, \dots, k, \end{aligned} \quad (28)$$

и докажем, что она не имеет решений, состоящих из рациональных функций. Если $c_0 = 0$, то это доказывается аналогично 1.1).

Пусть $c_0 \neq 0$, $\sigma \in \mathbb{Z}$. Допустим, что утверждение неверно: существуют $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{C}(z)$, удовлетворяющие системе (28). Рассмотрим два подслучая.

а) $a_i = 0$, $i = 1, \dots, l$. Тогда из (23) следует, что $a_i = 0$ при $i = l + 1, \dots, k$. По лемме 2 каждую функцию f_j можно разложить в сумму

$$f_j = \sum_{i=0}^{\sigma-1} x_{i,j} z^i, \quad \text{если } \sigma \in \mathbb{N}, \quad (29)$$

и

$$f_j = \sum_{i=\sigma}^{-1} x_{i,j} z^i, \quad \text{если } -\sigma \in \mathbb{N}, \quad x_{i,j} \in \mathbb{C}. \quad (30)$$

Если имеет место (29), то определяющая система для f_j имеет вид

$$\left. \begin{aligned} (\mu_1 - \mu_2)(\Lambda - k\mu_2)x_{0,j} &= 1, \\ (\Lambda - k\mu_2 - i)x_{i,j} &= x_{i-1,j}\xi^i, \quad i = 1, \dots, \sigma - 1, \\ c_0 &= -x_{\sigma-1,j}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Аналогично тому, как из (25) было получено (26), из (31) при $\mu_1 \neq \mu_2$ получим равенство

$$c_0(\mu_2 - \mu_1) \prod_{i=0}^{\sigma-1} (\Lambda - k\mu_2 - i) = \xi^{\sigma j},$$

в котором левая часть не зависит от j . Поэтому при $j = 1$ и $j = k$ она должна иметь одно и то же значение, т.е. $\xi^\sigma = \xi^{\sigma k} = \exp(2\pi i \sigma) = 1$. Так как $\xi^\sigma = \exp(2\pi i (\mu_1 - \mu_2))$, то отсюда следует, что $(\mu_1 - \mu_2) \in \mathbb{Z}$, вопреки условию (3).

Случай, когда имеет место (30), рассматривается аналогично.

б) Пусть для некоторого r , $1 \leq r \leq l$, $a_r \neq 0$. Тогда из (23) следует, что $a_{r+l} \neq 0$. Рассмотрим r -е и $(r+l)$ -е уравнения системы (27) и докажем, что они не могут одновременно иметь решения из $\mathbb{C}(z)$. Допустим противное: пусть $f_r, f_{r+l} \in \mathbb{C}(z)$ и удовлетворяют рассматриваемым уравнениям. Предположим, что $\sigma > 1$ и $\beta > \sigma$ (остальные возможные случаи рассматриваются аналогично). Пусть j принимает значение r или $r+l$. По лемме 1

$$f_j = \sum_{i=0}^{\beta-1} x_{i,j} z^i, \quad x_{i,j} \in \mathbb{C},$$

и определяющая система для f_j имеет вид

$$\left. \begin{aligned} (\Lambda - k\mu_2)(\mu_1 - \mu_2)x_{0,j} &= 1, \\ (\Lambda - k\mu_2 - i)x_{i,j} &= x_{i-1,j}\xi^j, \quad i = 1, \dots, \sigma-1, \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$$(\Lambda - k\mu_1)x_{\sigma,j} = x_{\sigma-1,j}\xi^j + c_0, \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} (\Lambda - k\mu_2 - i)x_{i,j} &= x_{i-1,j}\xi^j, \quad i = \sigma+1, \dots, \beta-1, \\ a_j x_{\beta-1,j} &= x_{\beta-1,j}\xi^j. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Из (32) и (34) соответственно получим равенства

$$(\mu_1 - \mu_2)x_{\sigma-1,j} \prod_{i=0}^{\sigma-1} (\Lambda - k\mu_2 - i) = \xi^{j(\sigma-1)}, \quad (35)$$

$$a_j \prod_{i=\sigma+1}^{\beta-1} (\Lambda - k\mu_2 - i) = \xi^{j(\beta-\sigma)} x_{\sigma,j}, \quad x_{\sigma,j} \neq 0. \quad (36)$$

Положив в (35) $j = r$ и $j = r+l$, и разделив одноименные части полученных равенств, найдем

$$x_{\sigma-1,r+l} = x_{\sigma-1,r} e^{\pi i(\sigma-1)}. \quad (37)$$

Точно так же из (36) с помощью (23) получим

$$t_{r+l}x_{\sigma,r+l} = t_r x_{\sigma,r} e^{\beta \pi i}. \quad (38)$$

Из (5) следует, что β – нечетное число, поскольку $\beta = 2\Lambda - k\mu_2 = k(2\lambda - \mu_2) + 2k - 2$. Аналогично, $(2\Lambda - k\mu_1)$ – нечетное число, а тогда их разность, равная $k(\mu_1 - \mu_2) = \sigma$ – четное число. Поэтому (37) и (38) соответственно примут вид

$$x_{\sigma-1,r+l} = -x_{\sigma-1,r}, \quad (39)$$

$$t_{r+l}x_{\sigma,r+l} = -t_r x_{\sigma,r}. \quad (40)$$

Рассмотрим уравнение (33) при $j = r$ и $j = r + l$:

$$(\Lambda - k\mu_1)x_{\sigma,r} = \xi^r x_{\sigma-1,r} + c_0, \quad (41)$$

$$(\Lambda - k\mu_1)x_{\sigma,r+l} = \xi^{r+l} x_{\sigma-1,r+l} + c_0 = -\xi^r x_{\sigma-1,r+l} + c_0. \quad (42)$$

Из (39), (40) и (42) получим

$$(k\mu_1 - \Lambda)t_r x_{\sigma,r} = t_{r+l}(\xi^r x_{\sigma-1,r} + c_0). \quad (43)$$

Так как $t_r, t_{r+l} \in \mathbb{N}$, то из (41) и (43) следует $x_{\sigma,r} = 0$, что по предположению невозможно. Полученное противоречие доказывает утверждение при $n = k + 2$.

1.3) Пусть $k + 2 < n \leq k + m$. Тогда соответствующая система (20) имеет вид (положим $\beta = 2\Lambda - k\mu_{n-k}$, $\sigma = k(\mu_{n-k-1} - \mu_{n-k})$)

$$\left. \begin{aligned} y'_i + \left(\xi^i + \frac{1}{z}(k\mu_{n-k} - \Lambda) \right) y_i + \frac{1}{z} y_{k+1} &= a_i z^{\beta-1}, \quad i = 1, \dots, k, \\ y'_i + \frac{k}{z}(\mu_{n-k} - \mu_{i-k}) y_i + \frac{k}{z} y_{k+1} &= 0, \quad i = k+1, \dots, n-2, \\ y'_{n-1} - \frac{\sigma}{z} y_{n-1} + \frac{k}{z} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Если $\sigma = 0$, то последнее уравнение не имеет решений из $\mathbb{C}(z)$ и утверждение доказано. Пусть $\sigma \neq 0$. Тогда интегрируя это уравнение, получим $y_{n-1} = \frac{k}{\sigma} + c_{n-1} z^\sigma$, $c_{n-1} \in \mathbb{C}$. Из предыдущих уравнений найдем

$$y_i = \prod_{j=i}^{n-1} (\mu_{j-k} - \mu_{n-k})^{-1} + c_i z^\sigma, \quad c_i \in \mathbb{C}, \quad i = k+1, \dots, n-2.$$

Поэтому подсистема из первых k уравнений будет иметь вид, аналогичный системе (28), и, следовательно, также не имеет решений, состоящих из рациональных функций. Утверждение 1) теоремы доказано.

2) Пусть k – нечетное число. Тогда по лемме 2 система (19) имеет только тривиальное решение из $\mathbb{C}(z)$. Действительно, для любых $i, j, 1 \leq i, j \leq k$, равенство $\xi^i + \xi^j = 0$ выполняться не может. Поэтому для каждого $n, k+1 \leq n \leq k+m$, в соответствующей системе (20) вектор $V_{n-1} \equiv 0$. Заметим, что при доказательстве утверждения 1) теоремы для четных значений k в тех случаях, когда все $a_i = 0$, т.е. когда $V_{n-1} \equiv 0$, использовались только условия (2) и (3), а четность k и условие (5) не использовались. Поэтому (2) и (3) при нечетном k являются достаточными условиями.

Докажем теперь необходимость этих условий. Допустим, что (2) не выполняется: пусть для некоторых $r, s, r \geq 1, s \geq 1, \mu_s - \lambda_r = l \in \mathbb{N}$. Можно считать, что $s = 1$. Докажем, что функции $\omega_{k+1}, \omega'_{k+1}, \dots, \omega_{k+1}^{(k)}$ алгебраически зависимы над $\mathbb{C}(z)$. Рассмотрим функцию

$$f = f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_1 + 1)_n \cdots (\lambda_r + l)_n \cdots (\lambda_k + 1)_n (\mu_1 + n)} \left(\frac{z}{k} \right)^{nk},$$

которая получается из ω_{k+1} заменой $\lambda_r \rightarrow \lambda_r + l - 1$. По лемме 4 $(\omega_{k+1}, \omega'_{k+1}, \dots, \omega_{k+1}^{(k)}) \sim (f, f', \dots, f^{(k)})$. Так как $(\mu_1 + n)(\lambda_r + l)_n = (\lambda_r + l)(\lambda_r + l + 1)_n$, то

$$f(z) = \frac{1}{(\lambda_r + l)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_1 + 1)_n \cdots (\lambda_r + l + 1)_n \cdots (\lambda_k + 1)_n} \left(\frac{z}{k} \right)^{nk}.$$

Но тогда $f(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению k -о порядка и, следовательно, $f(z), f'(z), \dots, f^{(k)}(z)$ алгебраически зависимы над $\mathbb{C}(z)$.

Докажем теперь необходимость условия (3). Допустим, что оно не выполняется: например, $\mu_2 - \mu_1 = l \in \mathbb{N}$. Докажем, что $\omega_1, \dots, \omega_{k+2}$ алгебраически зависимы над $\mathbb{C}(z)$. Обозначим

$$v = v(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_1 + 1)_n \cdots (\lambda_k + 1)_n (\mu_2 + n)} \left(\frac{z}{k} \right)^{nk}.$$

Тогда $l\omega_{k+2} = \omega_{k+1} - v$, и поэтому $(\omega_1, \dots, \omega_{k+2}) \sim (v, \omega_1, \dots, \omega_{k+1})$. Легко проверить равенство

$$\begin{aligned} \omega_{k+1} &= \sum_{n=1}^l \frac{1}{\prod_{i=1}^k (\lambda_i + 1)_n (\mu_1 + n)} \left(\frac{z}{k} \right)^{nk} \\ &+ \prod_{i=1}^k (\lambda_i + 1)_l^{-1} \left(\frac{z}{k} \right)^{kl} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_1 + 1 + l)_n \cdots (\lambda_k + 1 + l)_n (\mu_2 + n)} \left(\frac{z}{k} \right)^{nk}, \end{aligned}$$

из которого по лемме 4 следует $(\omega_{k+1}, \omega'_{k+1}, \dots, \omega_{k+1}^{(k)}) \sim (v, v', \dots, v^{(k)})$. Ранее было установлено (см. (18)), что $(\omega_{k+1}, \omega'_{k+1}, \dots, \omega_{k+1}^{(k)}) \sim (\omega_1, \dots, \omega_{k+1})$ и $(v, v', \dots, v^{(k)}) \sim (v, \omega_1, \dots, \omega_k)$. Следовательно, $(\omega_1, \dots, \omega_{k+1}) \sim (v, \omega_1, \dots, \omega_k)$. Таким образом, ω_{k+1} алгебраически над $\mathbb{C}(z)$ зависит от $v, \omega_1, \dots, \omega_k$, и тем самым утверждение теоремы доказано.

3. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим два случая.

1. Существует $\lambda \in \mathbb{Q}$, $0 < \lambda < 1/k$, такое, что

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \equiv \left\{ \lambda, \lambda + \frac{1}{k}, \dots, \lambda + \frac{k-1}{k} \right\} \pmod{\mathbb{Z}}. \quad (44)$$

Тогда по теореме 2 утверждение теоремы доказано.

2. Предположим, что для любого $\lambda \in \mathbb{Q}$ (44) не выполняется. В этом случае необходимость условий теоремы доказывается так же, как в теореме 2, а достаточность установлена в работе [10].

Марийский государственный университет

Поступило

16.06.93

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шидловский А. Б. О критерии алгебраической независимости значений одного класса целых функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1959. Т. 23. № 1. С. 35–66.
- [2] Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.
- [3] Салихов В. Х. Формальные решения линейных дифференциальных уравнений и их применение в теории трансцендентных чисел // Тр. ММО. 1988. Т. 51. С. 223–256.
- [4] Салихов В. Х. Об алгебраической независимости значений гипергеометрических Е-функций // Докл. АН СССР. 1989. Т. 307. № 2. С. 284–287.
- [5] Beukers F., Brownawell W. D., Heckman G. Siegel normality // Ann. Math. 1988. V. 127. P. 279–308.
- [6] Кулагин В. А. Об алгебраической независимости значений одного подкласса целых функций // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 6. С. 46–51.
- [7] Кулагин В. А. Об алгебраической независимости значений некоторых гипергеометрических функций // УМН. 1987. Т. 42. № 2(254). С. 233–234.
- [8] Шидловский А. Б. О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых функций // Тр. ММО. 1959. Т. 8. С. 283–320.
- [9] Ван дер Варден В. Л. Алгебра. М.: Наука, 1987.
- [10] Кулагин В. А. Об алгебраической независимости значений одного подкласса Е-функций // Диофантовы приближения / ред. П. Л. Ульянов. Сб. статей. Т. II. М.: Изд-во МГУ, 1986. С. 50–63.