



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Воронцов, О совместных приближениях в банаховых
пространствах обобщенных функций,
Матем. заметки, 2003, том 73, выпуск 2, 179–194

<https://www.mathnet.ru/mzm188>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 216.73.216.37

14 декабря 2025 г., 19:31:17





УДК 517.988

О СОВМЕСТНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

А. М. Воронцов

Для заданного однородного эллиптического оператора L в частных производных с постоянными комплексными коэффициентами, двух банаховых пространств V_1 и V_2 обобщенных функций в $\mathbb{R}^N$ и компактных множеств X_1 и X_2 в $\mathbb{R}^N$ исследуются совместные аппроксимации в нормах пространств $V_1(X_1)$ и $V_2(X_2)$ (пространств струй-распределений по Уитни) посредством решений уравнения $Lu = 0$ в окрестностях множества $X_1 \cup X_2$. Получена локализационная теорема, позволяющая в определенных условиях сводить указанную аппроксимационную задачу к соответствующим задачам в каждом из пространств по отдельности.

Библиография: 17 названий.

1. Введение

В теории приближений функций решениями однородных эллиптических уравнений $Lu = 0$ на компактах X в $\mathbb{R}^N$ аппроксимации исследуются как в классических топологиях (например, в нормах пространств $C^m(X)$, $\text{Lip}_\alpha(X)$, $L_p(X)$ или в топологии ограничено-поточечной сходимости), так и в “абстрактных”, т.е. в топологиях произвольных подпространств пространства обобщенных функций $(C_0^\infty(\mathbb{R}^N))^*$ с определенным набором условий. При этом, как правило, аппроксимации ведутся в одной фиксированной норме, обладающей какими-либо свойствами однородности и инвариантности. Такие приближения не могут учитывать различные свойства гладкости приближаемых функций на разных подмножествах в X . Таким образом, весьма естественно возникает задача о совместной (одновременной) аппроксимации в нескольких, для начала в двух, различных нормах. Этой тематике посвящен ряд работ (см., например, [1]–[3] и цитируемые там работы), где соответствующие нормы или топологии являются классическими: равномерная, поточечно-ограниченная, липшицева. В контексте абстрактных пространств аппроксимации, насколько это известно автору, данная задача рассматривается впервые. В принципе, возможен целый ряд различных постановок этой задачи. Наиболее естественным на наш взгляд является “уитниевский” подход, развитый в контексте абстрактных аппроксимаций в одной норме в работах [4], [5]. Основной целью

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00618.

настоящей работы является получение “абстрактной” локализационной теоремы (теоремы 3), сводящей задачу совместной аппроксимации в двух нормах к задачам аппроксимации в каждой из этих норм по отдельности (эти задачи считаются априори решенными). Главная трудность здесь состоит в том, что соответствующий локализационный оператор Витушкина, играющий существенную роль в таких задачах, как правило, оказывается неинвариантным в естественным образом возникающих пространствах аппроксимации. Локализационная теорема получена пока при некоторых ограничениях на множество $X = X_1 \cup X_2$. Аналогичные ограничения возникают уже в простейших случаях равномерной рациональной аппроксимации (см. [6]), когда $V_1 = V_2 = C(\mathbb{R}^2)$, а приближения исследуются на объединении двух компактов, на каждом из которых нужна аппроксимация имеет место.

Приведем для наглядности два следствия из упомянутой локализационной теоремы (ее полная формулировка достаточно громоздка и требует введения целого ряда обозначений). Фиксируем произвольные α и β , удовлетворяющие условию $0 < \alpha < \beta < 1$. Рассмотрим задачу о совместных приближениях в пространствах $V_1 = \text{lip}_\alpha$ и $V_2 = \text{lip}_\beta$ (подробнее см. п. 4.1), причем в качестве эллиптического оператора L берется оператор Коши–Римана $L = \partial/\partial\bar{z}$ в $\mathbb{C}_z$. Пусть X_1 и X_2 – компакты в $\mathbb{C}$, $X = X_1 \cup X_2$, $X_0 = X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$. Положим

$$V_{1,2} = \{(f_1, f_2) : f_1 \in \text{lip}_\alpha(X_1), f_2 \in \text{lip}_\beta(X_2), f_1|_{X_0} = f_2|_{X_0}\}$$

с нормой

$$\|(f_1, f_2)\|_{1,2} = \max\{\|f_1\|_{V_1(X_1)}, \|f_2\|_{V_2(X_2)}\},$$

и пусть еще $H_{1,2}$ есть подпространство в $V_{1,2}$, состоящее из тех (f_1, f_2) , для которых f_s голоморфна на $\dot{X}_s$, $s \in \{1, 2\}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть X_1 и X_2 – компакты в $\mathbb{C}$ с условием $\overline{(X_1 \setminus X_2)^\circ} \cap X_2 = \emptyset$. Следующие условия эквивалентны:

- (i) для всякой пары (f_1, f_2) из $H_{1,2}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется функция f , голоморфная в некоторой окрестности X , для которой выполнено условие $\|(f_1 - f, f_2 - f)\|_{1,2} < \varepsilon$;
- (ii) найдутся $p \geq 1$ и $A > 0$ такие, что для всякого открытого круга $B(z, \delta)$ с условием $\overline{B(z, \delta)} \cap X_2 = \emptyset$ выполняется

$$M_*^{1+\alpha}(B(z, \delta) \setminus \dot{X}_1) \leq AM^{1+\alpha}(B(z, p\delta) \setminus X_1),$$

и для всякого открытого круга $B(z, \delta)$ имеет место

$$M_*^{1+\beta}(B(z, \delta) \setminus \dot{X}_2) \leq AM^{1+\beta}(B(z, p\delta) \setminus X_2);$$

- (iii) условия предыдущего пункта выполняются для $p = 1$.

Здесь $M^{1+\alpha}(\cdot)$ (соответственно $M_*^{1+\alpha}(\cdot)$) – обхват (соответственно нижний обхват) по Хаусдорфу порядка $1 + \alpha$ (см. [7]).

Приведем еще одно следствие локализационной теоремы для совместных равномерных и C^1 -приближений. Для произвольного компакта K в $\mathbb{C}$ через $C^1(K)$ обозначим совокупность троек $f = (f_0, f_1, f_2)$ таких, что для f найдется $F \in C^1(\mathbb{C})$, для которой выполнены условия

$$F|_K = f_0, \quad F'_x|_K = f_1, \quad F'_y|_K = f_2, \quad z = x + iy.$$

Уитниевская норма $\|f\|_{1,K}$ в $C^1(K)$ задается как нижняя грань норм $\|F\|_1$ в $C^1(\mathbb{C})$ (норма стандартная, см. п. 4.1 пример 2) среди всех F с указанным выше свойством.

ТЕОРЕМА 2. Пусть X_1 и X_2 – компакты в $\mathbb{C}$ с условием $\overline{(X_1 \setminus X_2)^\circ} \cap X_2 = \emptyset$. Следующие условия эквивалентны:

- (i) для любых $f = (f_0, f_1, f_2) \in C^1(X_2)$ и $g \in C(X_1)$ таких, что $f_0 = g$ на $X_1 \cap X_2$, g голоморфна на $\dot{X}_1$, f_0 голоморфна на $\dot{X}_2$, и любого $\varepsilon > 0$ найдется h , голоморфная в некоторой окрестности $X_1 \cup X_2$, для которой

$$\|g - h\|_{C(X_1)} < \varepsilon \quad \text{и} \quad \|f - (h, h'_x, h'_y)\|_{1, X_2} < \varepsilon;$$

- (ii) $\dot{X}_2$ плотно в X_2 и, кроме того, найдутся $p \geq 1$ и $A > 0$ такие, что для каждого открытого круга $B(z, \delta)$ с условием $\overline{B}(z, \delta) \cap X_2 = \emptyset$ имеет место оценка

$$\alpha(B(z, \delta) \setminus \dot{X}_1) \leq A\alpha(B(z, p\delta) \setminus X_1);$$

- (iii) $\dot{X}_2$ плотно в X_2 и, кроме того, для каждого открытого круга $B(z, \delta)$ с условием $\overline{B}(z, \delta) \cap X_2 = \emptyset$ имеет место равенство

$$\alpha(B(z, \delta) \setminus \dot{X}_1) = \alpha(B(z, \delta) \setminus X_1).$$

Здесь $\alpha(\cdot)$ – аналитическая C -емкость (см. [8]).

В разделе 2 даются необходимые предварительные сведения и формулируется задача о совместной аппроксимации для двух норм, одна из которых “сильнее” другой.

В разделе 3 приводится формулировка основного результата (теоремы 3 и 4) и его доказательство. Здесь существенно используются методы, развитые в работах [9], [4], [5].

В разделе 4 приводятся конкретные примеры использования теоремы 3, в частности, доказываются теоремы 1 и 2 из раздела 1. Для случая аппроксимации на нигде не плотных компактах весьма полезным является предложение 6, представляющее собой обобщение (абстрактный вариант) аналогичных результатов из [10]–[12].

2. Предварительные сведения

2.1. Банаховы пространства $V, V(X), V_{\text{loc}}$. Пусть V – комплексное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, которое содержит $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) = C_0^\infty$ – пространство основных (комплекснозначных) функций и само содержится в $(C_0^\infty)^*$ – пространстве обобщенных функций (распределений). Предположим также, что V наделено структурой топологического C_0^∞ -подмодуля в $(C_0^\infty)^*$. Последнее означает, что при всех $f \in V$ и $\varphi \in C_0^\infty$ имеет место $\varphi f \in V$, причем

$$\|\varphi f\| \leq A(\varphi)\|f\|, \quad (1)$$

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq A(\varphi)\|f\|, \quad (2)$$

где $\langle f, \varphi \rangle$ – действие распределения f на основную функцию φ , а $A(\varphi)$ не зависит от f .

Можно показать [5], что из указанных свойств вытекает непрерывность вложений $C_0^\infty \hookrightarrow V$ и $V \hookrightarrow (C_0^\infty)^*$. Придерживаясь терминологии, предложенной О’Фарреллом [9], будем называть такие пространства V конкретными банаховыми пространствами (КБП).

Для компактного множества X в $\mathbb{R}^N$ обозначим через $I(X)$ замыкание в V линейного подмногообразия $\{f \in V : \text{supp } f \cap X = \emptyset\}$, где $\text{supp } f$ – носитель распределения f .

Банахово пространство $V(X) := V/I(X)$, наделенное факторнормой, рассматривается как наиболее естественное (типа Уитни) “сужение” V на X .

Пусть $\|f\|_X = \inf\{\|f + f_0\| : f_0 \in I(X)\}$ – норма элемента (“струи”) $f_{(X)} = f + I(X)$ в $V(X)$, определенного распределением $f \in V$.

Для произвольного открытого множества D в $\mathbb{R}^N$ определим

$$V_{\text{loc}}(D) = \{f \in (C_0^\infty(D))^* : f\varphi \in V \text{ для всех } \varphi \in C_0^\infty(D)\},$$

где полагается $f\varphi = 0$ вне D (при этом f – обобщенная функция в D). Через V_{loc} будем обозначать $V_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. В пространстве $V_{\text{loc}}(D)$ известным образом вводится топология Фреше (см. [4, с. 253]).

Если X – компакт в D и $f \in V_{\text{loc}}(D)$, то корректно определен элемент $f_{(X)}$. Аналогично, для любого компакта $X' \subseteq X$ и $f_{(X)} \in V(X)$ естественным образом определяется $\|f\|_{X'}$, причем $\|f\|_{X'} \leq \|f\|_X$ (подробнее о КБП см. [9] и [5]).

2.2. Эллиптический оператор L . Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ – мультииндекс $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$. Положим $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_N!$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_N^{\alpha_N}$ при $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ и

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Всюду далее $L(\xi) = \sum_{|\alpha|=r} a_\alpha \xi^\alpha$ – некоторый полином степени $r \geq 1$ с постоянными комплексными коэффициентами a_α , удовлетворяющий условию эллиптичности: $L(\xi) \neq 0$ при всех $\xi \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}^N$. Ассоциируем с $L(\xi)$ однородный эллиптический оператор

$$L = L(\partial) = \sum_{|\alpha|=r} a_\alpha \partial^\alpha$$

порядка r . Хорошо известно, что для такого оператора L существует специальное фундаментальное решение Φ , приведенное, например, в [13, теорема 7.1.20]. Обозначим через $B(a, \delta)$ (соответственно $\overline{B}(a, \delta)$) открытый (соответственно замкнутый) шар с центром $a \in \mathbb{R}^N$ и радиусом $\delta > 0$. Если $B = B(a, \delta)$ и $\theta > 0$, то положим $\theta B = B(a, \theta\delta)$ и $\theta \overline{B} = \overline{B}(a, \theta\delta)$. Пусть $\varphi \in C_0^\infty$. Локализационный оператор Витушкина $\mathcal{V}_\varphi : (C_0^\infty)^* \rightarrow (C_0^\infty)^*$, ассоциированный с L и φ , определяется по формуле $\mathcal{V}_\varphi f = \Phi * (\varphi Lf)$, где $*$ – оператор свертки. Скажем, что $\mathcal{V}_\varphi$ действует инвариантно на V_{loc} , если $\mathcal{V}_\varphi : V_{\text{loc}} \rightarrow V_{\text{loc}}$ и это отображение непрерывно. Последнее эквивалентно тому, что для всякого открытого шара B , содержащего $\text{supp } \varphi$, и для всех $f \in V_{\text{loc}}$ имеет место $\mathcal{V}_\varphi f \in V_{\text{loc}}$ и

$$\|\mathcal{V}_\varphi f\|_{\overline{B}} \leq A(\varphi, B) \|f\|_{\overline{B}}, \quad (3)$$

где $A(\varphi, B)$ не зависит от f .

Надо отметить, что последнее условие выполняется для любого эллиптического оператора L и всякого V , локально эквивалентного какому-либо “классическому” пространству функций в $\mathbb{R}^N$ [9].

2.3. L -аналитические функции и ряды Лорана. Пусть D – открытое множество в $\mathbb{R}^N$. Через $L(D)$ обозначается класс распределений f в D , для которых $Lf = 0$ в D в смысле теории распределений. Из леммы Вейля [14, следствие 11.4.13] следует, что $L(D) \hookrightarrow C^\infty(D)$, т.е. всякое обобщенное решение является классическим, откуда $L(D) \subset V_{\text{loc}}(D)$. Далее, если $\{f_m\}$ – последовательность в $L(D)$ такая, что $f_m \rightarrow f$ в $V_{\text{loc}}(D)$ при $m \rightarrow \infty$, то $f \in L(D)$, поскольку сходимости в $V_{\text{loc}}(D)$ сильнее сходимости в $(C_0^\infty)^*$, а для нее последнее утверждение верно. Следуя [5], назовем функции из $L(D)$ L -аналитическими в D .

Для компактного множества X в $\mathbb{R}^N$ обозначим через $L(X)$ класс функций f , каждая из которых определена и удовлетворяет уравнению $Lf = 0$ в некоторой (для каждой f своей) окрестности X , а через $L_V(X)$ замыкание в $V(X)$ линейного подмногообразия $L(X)_{(X)} = \{f_{(X)} : f \in L(X)\}$. Таким образом, $L_V(X)$ есть класс элементов (струй) из $V(X)$, допускающих приближение в норме $\|\cdot\|_X$ струями, определенными L -аналитическими в окрестности X функциями.

Справедлив следующий фундаментальный факт (см., например, [7, с. 163]): найдется $k > 1$ такое, что если T – распределение с компактным носителем в $B(a, \delta)$ и $f = \Phi * T$, то при $|x - a| > k\delta$ справедливо следующее разложение лорановского типа:

$$f(x) = \langle T(y), \Phi(x - y) \rangle = \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha \partial^\alpha \Phi(x - a),$$

где

$$c_\alpha = (-1)^\alpha (\alpha!)^{-1} \langle T(y), (y - a)^\alpha \rangle,$$

причем указанный ряд сходится в смысле $C^\infty(|x - a| > k\delta)$.

3. Теоремы о совместных приближениях

3.1. Постановка задачи о совместных приближениях. Пусть V_1 и V_2 – КБП с нормами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ соответственно. Для произвольного компакта X в $\mathbb{R}^N$ и $s \in \{1, 2\}$ обозначим через $I_s(X)$ замыкание в V_s линейного подмногообразия $\{f \in V_s : \text{supp } f \cap X = \emptyset\}$, а при $f_s \in V_s$ определим $f_s^{(s)}(X) := f_s + I_s(X)$ – элемент (струя) из $V_s(X)$, построенный по f_s . Далее, пусть $V_2 \xrightarrow{\text{loc}} V_1$, т.е. $V_{2,\text{loc}} \subset V_{1,\text{loc}}$ и вложение непрерывно. Последнее означает, что для любого компакта X найдется компакт $Y \supset X$ такой, что для всякого $f \in V_{2,\text{loc}}$ выполнено $f \in V_{1,\text{loc}}$ и $\|f\|_{1,X} \leq A(X, Y) \|f\|_{2,Y}$, где $A(X, Y)$ не зависит от f . Отметим, что условие локального вложения $V_2 \xrightarrow{\text{loc}} V_1$ позволяет для произвольного компакта X корректно определить по элементу $F_2 \in V_2(X)$ элемент $F_1 \in V_1(X)$ с условием $F_1 = F_2^{(1)}(X)$.

Уточним также, что при $F_s \in V_s(X)$ условие $F_s \in L(\dot{X})$ означает, что $f_s \in L(\dot{X})$ для любого представителя f_s струи F_s . Здесь $\dot{X}$ – внутренность X .

Теперь фиксируем произвольные непустые компакты X_1 и X_2 в $\mathbb{R}^N$ и обозначим $X := X_1 \cup X_2$, $X_0 := X_1 \cap X_2$. Пусть L – эллиптический оператор порядка r (как в п. 2.2). Введем в рассмотрение банахово пространство

$$V_{1,2} := V_{1,2}(X_1, X_2) := \{F = (F_1, F_2) \mid F_s \in V_s(X_s) \text{ при } s \in \{1, 2\} \text{ и } F_1^{(1)}(X_0) = F_2^{(1)}(X_0)\}$$

с нормой

$$\|F\|_{1,2} = \max_{s \in \{1,2\}} \{\|F_s\|_{s,X_s}\},$$

а также его подпространства

$$H_{1,2} := H_{1,2}(X_1, X_2) := \{(F_1, F_2) \mid (F_1, F_2) \in V_{1,2} \text{ и } F_s \in L(\dot{X}_s) \text{ при } s \in \{1, 2\}\},$$

$$W_{1,2} := W_{1,2}(X_1, X_2) := \{(F_1, F_2) \mid (F_1, F_2) \in V_{1,2} \text{ и } F_s \in L_{V_s}(X_s) \text{ при } s \in \{1, 2\}\}.$$

Определим подпространство $L_{1,2} := L_{1,2}(X_1, X_2)$ как замыкание в $V_{1,2}$ линейного подмногообразия $\{(g_{(X_1)}^{(1)}, g_{(X_2)}^{(2)}) : g \in L(X)\}$. Ясно, что $L_{1,2} \subseteq W_{1,2} \subseteq H_{1,2} \subseteq V_{1,2}$ и $L_{1,2}$ является подпространством пар из $V_{1,2}$, допускающих одновременную (или совместную) аппроксимацию в норме $\|\cdot\|_{1,2}$ струями, L -аналитическими в окрестности X . Априори мы будем считать, что подпространства $L_{V_s}(X_s)$, $s \in \{1, 2\}$, в достаточной степени изучены, т.е. условия приближаемости L -аналитическими функциями на компактах в $\mathbb{R}^N$ в каждом из пространств V_s по отдельности для нас известны.

Наша основная задача о совместных приближениях L -аналитическими функциями на компактах в $\mathbb{R}^N$ состоит в следующем.

ЗАДАЧА 1. Найти условия на $F_s \in V_s(X_s)$ (а также на X_s, V_s, L), $s \in \{1, 2\}$, необходимые и достаточные для того, чтобы $(F_1, F_2) \in L_{1,2}$.

Естественным необходимым условием приближаемости является $(F_1, F_2) \in W_{1,2}$. Однако это условие, вообще говоря, не является достаточным, поэтому возникает следующая задача.

ЗАДАЧА 2. Каковы условия на X_s, V_s и L , $s \in \{1, 2\}$, необходимые и достаточные для того, чтобы $W_{1,2} = L_{1,2}$?

В данной работе будет найден ряд достаточных условий для выполнения последнего равенства, а также приведены конкретные примеры наличия аппроксимации.

Перейдем к точным формулировкам.

3.2. Формулировка основного результата. Пусть, как и выше, X_1 и X_2 – непустые компакты в $\mathbb{R}^N$. Будем далее считать, что $X_0 = X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$; иначе задачи 1 и 2 бессодержательны. Введем два условия, которые будут важны в дальнейшем.

УСЛОВИЕ (К) (“существование коридора”). Скажем, что пара (X_1, X_2) удовлетворяет *условию* (К), если $\overline{(X_1 \setminus X_2)^\circ} \cap X_2 = \emptyset$.

Введем обозначение: $Y_{1,2} = \overline{(X_1 \setminus X_2)^\circ}$. Также нам потребуется следующее

УСЛОВИЕ (ПК) (“приближаемость в коридоре”). Пара (X_1, X_2) с условием (К) удовлетворяет *условию* (ПК), если найдется компакт Y_0 , $Y_{1,2} \subset Y_0 \subset (X_1 \setminus X_2)$, такой, что для каждого $x \in (X_1 \setminus X_2) \setminus Y_0$ существуют $\delta_x > 0$ и $p_x \geq 1$, для которых $V_1(\overline{B}(x, p_x \delta_x) \cap X_1) \subset L_{V_1}(\overline{B}(x, \delta_x) \cap X_1)$.

Отметим, что условие (ПК) также включает ограничения на (V_1, L) . В работе [5] приведены примеры, показывающие, что даже в классических случаях p_x может быть строго больше единицы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из условия (ПК) следует [5, § 4, предложение 1], что для любого $x \in (X_1 \setminus X_2) \setminus Y_0$ и для любого $p_x > 1$ найдется $\delta_x > 0$ такое, что при любом $\delta \in (0, \delta_x)$ имеем $V_1(\overline{B}(x, p_x \delta) \cap X_1) \subset L_{V_1}(\overline{B}(x, \delta) \cap X_1)$.

Теперь мы можем сформулировать основной результат этой работы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть V_1 и V_2 – КБП, (V_1, L) удовлетворяет оценке (3) и $V_2 \xrightarrow{\text{loc}} V_1$. Пусть X_1 и X_2 – непустые компакты в $\mathbb{R}^N$ с условием (ПК). Тогда $W_{1,2} = L_{1,2}$.

Непосредственным следствием теоремы 3 и [4, теорема 3] является

ТЕОРЕМА 4. При выполнении условий теоремы 3 пусть $F = (F_1, F_2) \in V_{1,2}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) $F \in L_{1,2}$;
- (ii) для всех открытых шаров B в $\mathbb{R}^N$ имеет место включение

$$F_s \in L_{V_s}(\overline{B} \cap X_s), \quad s \in \{1, 2\};$$

- (iii) найдется (конечное) покрытие $\{B_j\}_{j=1}^J$ компакта X открытыми шарами B_j такое, что для каждого $j \in \{1, \dots, J\}$ выполнено одно из двух условий:

- (a) $B_j \cap Y_0 = \emptyset$, $B_j \cap X_2 \neq \emptyset$, причем $F_2 \in L_{V_2}(\overline{B}_j \cap X_2)$;
- (b) $B_j \cap Y_0 \neq \emptyset$, $B_j \cap X_2 = \emptyset$, причем $F_1 \in L_{V_1}(\overline{B}_j \cap X_1)$.

Предпошлем доказательству теоремы 3 несколько вспомогательных утверждений.

3.3. Вспомогательные утверждения. Пусть всюду далее V_1 и V_2 – КБП, X_1 и X_2 – компакты, $X_0 = X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $(F_1, F_2) \in V_{1,2}$. Тогда для любого компакта $Y \subset (X_1 \setminus X_2)$ и числа $\varepsilon > 0$ найдутся окрестность U_2 компакта X_2 и $f_0 \in V_1$, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) $\text{supp } f_0$ – компакт;
- 2) $f_0 \in V_{2,\text{loc}}(U_2)$;
- 3) $f_{0(X_2)}^{(2)} = F_2$, $f_{0(Y)}^{(1)} = F_1^{(1)}$;
- 4) $\|(f_0, f_0) - (F_1, F_2)\|_{1,2} < \varepsilon$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Здесь и далее, под (f_0, f_0) , для подходящего f_0 , мы понимаем элемент $(f_{0(X_1)}^{(1)}, f_{0(X_2)}^{(2)})$ из $V_{1,2}$, а под разностью $F = (F_1, F_2)$ и $G = (G_1, G_2)$ из $V_{1,2}$ понимаем элемент $F - G = (F_1 - G_1, F_2 - G_2)$, также принадлежащий $V_{1,2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $f_1 \in F_1$ и $f_2 \in F_2$ – некоторые представители классов F_1 и F_2 соответственно. Из условия $(F_1, F_2) \in V_{1,2}$ получаем, что $(f_1 - f_2) \in I_1(X_0)$. Следовательно, для каждого $\delta > 0$ найдется распределение $h_\delta \in V_1$ такое, что $\|h_\delta\|_1 < \delta$ и $f_1 - f_2 + h_\delta = 0$ в окрестности X_0 . Фиксируем функцию $\varphi \in C_0^\infty$ такую, что $\varphi \equiv 0$ в некоторой окрестности Y , $\varphi \equiv 1$ в некоторой окрестности U_2 компакта X_2 . Используя (2) для V_1 , получаем, что $\|h_\delta \varphi\|_1 \leq A(\varphi) \|h_\delta\|_1 < \varepsilon$ при достаточно малом $\delta > 0$. Ясно, что $f_1 - f_2 + h_\delta \varphi = 0$ в окрестности X_0 , и поэтому найдется $h_0 \in V_1$ со свойствами $h_0 = f_1 - f_2 + h_\delta \varphi$ в окрестности X_1 и $h_0 = 0$ в окрестности X_2 . Положим $f_0 = (h_0 + f_2)\psi$, где $\psi \in C_0^\infty$; $\psi \equiv 1$ в окрестности X . Тогда

$f_0 \in V_1$, $f_0 = f_2$ в U_2 , $f_0 = f_1 + h_\delta \varphi$ в окрестности X_1 и, следовательно, $f_0 = f_1$ в окрестности Y , причем $\|(f_0, f_0) - (F_1, F_2)\|_{1,2} = \|h_\delta \varphi\|_{1,X_1} < \varepsilon$. Следовательно, f_0 – нужное распределение.

Таким образом, предложение 1 показывает, что решение задачи 1 для пары $(F_1, F_2) \in V_{1,2}$ вытекает из решения этой же задачи для пары (f_0, f_0) , построенной указанным способом по (F_1, F_2) . Следующие предложения 2 и 3 дополняют предложение 1 в случае, когда $F_s \in L_{V_s}(X_s)$ при $s = 1$ или 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $V_2 \xrightarrow{\text{loc}} V_1$ и $(F_1, F_2) \in V_{1,2}$, причем $F_2 \in L_{V_2}(X_2)$. Тогда для любого компакта $Y \subset (X_1 \setminus X_2)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся $h_0 \in V_1$ и окрестность U_2 компакта X_2 , удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) $\text{supp } h_0$ – компакт;
- 2) $h_{0(Y)}^{(1)} = F_{1(Y)}^{(1)}$;
- 3) $Lh_0 = 0$ в U_2 ;
- 4) $\|(h_0, h_0) - (F_1, F_2)\|_{1,2} < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольное $\eta > 0$ и из условия $F_2 \in L_{V_2}(X_2)$ найдем функцию $g_\eta \in L(X_2) \cap C_0^\infty$ такую, что $\|F_2 - g_\eta\|_{2,X_2} < \eta$. Также для этого $\eta > 0$ возьмем f_0 и φ из доказательства предложения 1. Используя последнюю оценку и то, что $f_{0(X_2)}^{(2)} = F_2$, можно найти распределение f_η и окрестность U_2 (зависящую от η) компакта X_2 такие, что $f_\eta \in V_2$, $f_\eta = f_0 - g_\eta$ в U_2 , $\|f_\eta\|_2 \leq \|f_0 - g_\eta\|_{2,X_2} + \eta < 2\eta$ и функция $\varphi \equiv 1$ в U_2 .

Положим $h_0 = f_0 - f_\eta \varphi$. Тогда h_0 – распределение с компактным носителем, $h_0 \in V_1$, $h_0 \in V_{2,\text{loc}}(U_2)$ и $h_{0(Y)}^{(1)} = f_{0(Y)}^{(1)} = F_{1(Y)}^{(1)}$. Далее, $Lh_0 = Lf_0 - L(\varphi f_\eta) = 0$ в U_2 . Воспользуемся вложением $V_2 \xrightarrow{\text{loc}} V_1$ и свойством (2) для V_2 . Имеем

$$\|h_0 - F_1\|_{1,X_1} \leq \|h_0 - f_0\|_{1,X_1} + \|f_0 - F_1\|_{1,X_1} \leq \|f_\eta \varphi\|_{1,X_1} + \eta \leq (A_1 + 1)\eta,$$

где $A_1 > 0$ зависит лишь от φ и X_1 ,

$$\|h_0 - F_2\|_{2,X_2} = \|f_0 - F_2 - f_\eta \varphi\|_{2,X_2} \leq \|f_0 - F_2\|_{2,X_2} + \|f_\eta \varphi\|_{2,X_2} \leq A_2 \eta,$$

где $A_2 > 0$ зависит лишь от φ . Следовательно, для каждого $\varepsilon > 0$, выбирая $\eta = \varepsilon(\max(A_1 + 1, A_2))^{-1}$, получаем нужное распределение h_0 .

Рассуждения, аналогичные доказательству предложения 2, приводят нас к следующему утверждению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $V_2 \xrightarrow{\text{loc}} V_1$ и $(F_1, F_2) \in W_{1,2}$. Тогда для любого компакта $Y \subset (X_1 \setminus X_2)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется $f_0 \in V_1$, удовлетворяющая следующим условиям: $\text{supp } f_0$ – компакт, $Lf_0 = 0$ в некоторой окрестности компакта $X_2 \cup Y$ и $\|(f_0, f_0) - (F_1, F_2)\|_{1,2} < \varepsilon$.

Теперь мы сформулируем и докажем предложение, касающееся некоторых свойств локализационного оператора Витушкина.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть K – компакт в $\mathbb{R}^N$, $a \in \mathbb{R}^N \setminus K$. Тогда для любых $\delta \in (0, \text{dist}(a, K))$ и $\varphi \in C_0^\infty(B(a, \delta))$ существует $A > 0$ такая, что

$$\|\mathcal{V}_\varphi f\|_{2,K} \leq A\|f\|_{1,\overline{B}(a,\delta)} \quad \text{для всех } f \in V_{1,\text{loc}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $\sigma \in (0, \text{dist}(a, K))$ (которое выберем позднее), и пусть $K_\sigma = \{x \in \mathbb{R}^N : \text{dist}(x, K) \leq \sigma\}$ – σ -раздутие компакта K . Без ограничения общности положим $a = 0$. Пусть $\delta_1 > 0$ такое, что $\overline{B}(0, \delta_1)$ не пересекается с K_σ . Тогда для любых $\varphi \in C_0^\infty(B(0, \delta_1))$ и $f \in V_{1,\text{loc}}$ из определения оператора Витушкина получаем $L(\mathcal{V}_\varphi f) = 0$ вне $\overline{B}(0, \delta_1)$, т.е. имеет смысл норма $\|\mathcal{V}_\varphi f\|_{2,K}$. Далее, выберем $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ так, чтобы для любых $f \in V_{1,\text{loc}}$ и $\varphi \in C_0^\infty(B(0, \delta_2))$ в представлении

$$\mathcal{V}_\varphi f(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha \partial^\alpha \Phi(x), \quad \text{где } x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{B}(0, \delta_2), \quad (4)$$

ряд справа сходиллся в $C^\infty(|x| > \delta_2)$.

Для коэффициентов ряда (4) по правилу дифференцирования распределений имеем

$$|c_\alpha| = |(\alpha!)^{-1} \langle \varphi(y) Lf, y^\alpha \rangle| = (\alpha!)^{-1} |\langle f, L(\varphi(y) y^\alpha) \rangle|.$$

Чтобы оценить коэффициенты c_α , воспользуемся следующей теоремой из теории распределений (см., например, [15, с. 22]).

ТЕОРЕМА А. Пусть множество $M \subset (C_0^\infty)^*$ слабо ограничено (т.е. для любого $\varphi \in C_0^\infty$ и $f \in M$ имеем $|\langle f, \varphi \rangle| \leq A_\varphi$, где A_φ не зависит от f). Тогда для каждого открытого шара B в $\mathbb{R}^N$ найдутся числа $A_1 = A_1(B, M) > 0$ и $m = m(B, M) \in \mathbb{Z}_+$ такие, что оценка

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq A_1 \|\varphi\|_{C^m(\overline{B})}$$

верна для всех $\varphi \in C_0^\infty(B)$ и $f \in M$, где $\|\cdot\|_{C^m(\overline{B})}$ – стандартная норма в $C^m(\overline{B})$ (см. пример 2 из п. 4.1).

Применим это утверждение к открытому шару $B = B(0, \delta)$ для некоторого $\delta \in (0, \delta_2)$ (которое выберем позже) и множеству $M = \{h \in V_1 : \|h\|_1 = 1\}$, слабая ограниченность которого следует из свойства (2) для V_1 . Тогда найдутся числа $A_1 = A_1(B, M) > 0$ и $m = m(B, M) \in \mathbb{Z}_+$ такие, что

$$|\langle h, L(\varphi(y) y^\alpha) \rangle| \leq A_1 \|L(\varphi(y) y^\alpha)\|_{C^m(\overline{B})}$$

для всех $h \in M$ и $\varphi \in C_0^\infty(B)$.

Используя формулу Лейбница, несложно получить, что

$$\|L(\varphi(y) y^\alpha)\|_{C^m(\overline{B})} \leq A_2 |\alpha|^{m+r} \delta^{|\alpha|},$$

где $A_2 > 0$ не зависит от α и δ . Тогда для произвольного $\varphi \in C_0^\infty(B)$ имеем

$$|\langle h, L(\varphi(y) y^\alpha) \rangle| \leq A_3 \|h\|_1 |\alpha|^{m+r} \delta^{|\alpha|}$$

для любых $h \in V_1$, причем $A_3 > 0$ не зависит от h, δ и α . При $p \in \mathbb{Z}_+$ оценим ряд (4) в норме пространства $C^p(K_\sigma)$. В силу последней оценки

$$\begin{aligned} \|\mathcal{V}_\varphi h\|_{C^p(K_\sigma)} &\leq \sum_{|\alpha| \geq 0} |c_\alpha| \|\partial^\alpha \Phi(x)\|_{C^p(K_\sigma)} \\ &\leq A_3 \|h\|_1 \sum_{|\alpha| \geq 0} (\alpha!)^{-1} |\alpha|^{m+r} \delta^{|\alpha|} \|\partial^\alpha \Phi(x)\|_{C^p(K_\sigma)}. \end{aligned}$$

Так как (см. [4, с. 254])

$$|\partial^\alpha \Phi(x)| \leq \alpha! A_4^{|\alpha|} |x|^{-(N-r+|\alpha|)} \cdot (|\log |x|| + 1), \quad x \neq 0, \quad (5)$$

где $A_4 > 1$ – константа, зависящая лишь от вида оператора L , то при $d = \text{dist}(0, K_\sigma)$ имеем

$$\|\mathcal{V}_\varphi h\|_{C^p(K_\sigma)} \leq A_5 \|h\|_1 \sum_{|\alpha| \geq 0} |\alpha|^{m+r} (\alpha!)^{-1} (\alpha_1 + p)! \cdots (\alpha_N + p)! \left(\frac{A_4 \delta}{d}\right)^{|\alpha|},$$

где $A_5 > 0$ не зависит от h . При $\delta \in (0, d/A_4)$ ряд справа будет сходиться; следовательно, для $\varphi \in C_0^\infty(B(0, \delta))$ имеет место оценка

$$\|\mathcal{V}_\varphi h\|_{C^p(K_\sigma)} \leq A_6 \|h\|_1$$

и $A_6 > 0$ не зависит от h .

Далее, для распределения $f \in V_{1,\text{loc}}$ и основной функции $\psi \in C_0^\infty(B(0, \delta))$, $\psi \equiv 1$ на $\text{supp } \varphi$, имеем

$$\mathcal{V}_\varphi f = \Phi * \varphi Lf = \Phi * \varphi L(\psi f) = \mathcal{V}_\varphi(\psi f).$$

Так как $\psi f \in V_1$, то

$$\|\mathcal{V}_\varphi(\psi f)\|_{C^p(K_\sigma)} \leq A_6 \|\psi f\|_1,$$

откуда

$$\|\mathcal{V}_\varphi f\|_{C^p(K_\sigma)} \leq A_7 \|f\|_{1, \overline{B}(0, \delta)}$$

и $A_7 > 0$ не зависит от f , но может зависеть от p .

Покажем, что последняя оценка верна с заменой $\|\cdot\|_{C^p(K_\sigma)}$ на $\|\cdot\|_{2, K}$.

Заметим, что поскольку вложение $C^\infty \hookrightarrow V_{2,\text{loc}}$ непрерывно, для K найдется $\sigma \in (0, \text{dist}(0, K))$ такое, что отображение $\omega \rightarrow \omega_{(K)}$ непрерывно из $C^\infty(K_\sigma)$ в $V_{2,\text{loc}}(K)$. Пространство $C^\infty(K_\sigma)$ является счетно-нормированным пространством, топология в котором может быть задана при помощи следующей метрики (инвариантной относительно сдвигов):

$$\rho(f, g) = \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p} \frac{\|f - g\|_p}{1 + \|f - g\|_p},$$

где $f, g \in C^\infty(K_\sigma)$ и $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{C^p(K_\sigma)}$. Положим $\lambda_p = \max(A_7(p), 1)$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$. Метрика

$$\tilde{\rho}(f, g) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2^{-p}}{\lambda_p} \frac{\|f - g\|_p}{1 + \|f - g\|_p}$$

эквивалентна метрике ρ ; следовательно, непрерывность линейного отображения $\omega \rightarrow \omega_{(K)}$ означает, что существует $A_8 > 0$ такая, что $\|\omega\|_{2,K} \leq A_8 \tilde{\rho}(0, \omega)$, причем A_8 не зависит от ω . Тогда

$$\begin{aligned} \|\mathcal{V}_\varphi f\|_{2,K} &\leq A_8 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2^{-p}}{\lambda_p} \frac{\|\mathcal{V}_\varphi f\|_{C^p(K_\sigma)}}{1 + \|\mathcal{V}_\varphi f\|_{C^p(K_\sigma)}} \\ &\leq A_8 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A_7(p)}{\lambda_p} 2^{-p} \|f\|_{1, \overline{B}(0, \delta_0)} \leq A_9 \|f\|_{1, \overline{B}(0, \delta_0)} \end{aligned}$$

и $A_9 > 0$ не зависит от f .

Итак, мы показали, что для каждой $a \notin K$ найдутся $\delta_0 \in (0, \text{dist}(a, K))$ и $A_9 > 0$ такие, что для любой $\varphi \in C_0^\infty(B(a, \delta_0))$ выполняется

$$\|\mathcal{V}_\varphi f\|_{2,K} \leq A_9 \|f\|_{1, \overline{B}(a, \delta_0)}$$

для всех $f \in V_{1, \text{loc}}$, причем A_9 не зависит от f .

Пусть теперь $B = B(a, \delta)$ – произвольный шар с условием $\delta \in (0, \text{dist}(a, K))$ и $\varphi \in C_0^\infty(B)$. Тогда для каждой $x \in \overline{B}$ найдется $\delta_x \in (0, \text{dist}(x, K))$ и $A_x > 0$ такие, что для любого $\psi_x \in C_0^\infty(B_x)$ (где $B_x = B(x, \delta_x)$) имеем

$$\|\mathcal{V}_{\psi_x} f\|_{2,K} \leq A_x \|f\|_{1, \overline{B}_x}$$

для всех $f \in V_{1, \text{loc}}$ и A_x не зависящей от f .

Система $\{B_x\}_{x \in \overline{B}}$ – открытое покрытие компакта $\overline{B}$; следовательно, из него может быть выделено конечное подпокрытие $\{B_{x_j}\}_{j=1}^J$. Положим $B_j := B_{x_j}$. Для покрытия $\{B_j\}_{j=1}^J$ рассмотрим систему функций $\{\psi_j\}_{j=1}^J$ таких, что

$$\psi_j \in C_0^\infty(B_j), \quad 0 \leq \psi_j \leq 1, \quad j \in \{1, 2, \dots, J\}, \quad \sum_{j=1}^J \psi_j(x) \equiv 1$$

в некоторой окрестности $\overline{B}$. Тогда имеет место равенство

$$\mathcal{V}_\varphi f = \sum_{j=1}^J \mathcal{V}_\varphi \psi_j f.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{V}_\varphi f\|_{2,K} &= \left\| \sum_{j=1}^J \mathcal{V}_\varphi \psi_j f \right\|_{2,K} \leq \sum_{j=1}^J \|\mathcal{V}_\varphi \psi_j f\|_{2,K} \\ &\leq \sum_{j=1}^J A_{x,j} \|f\|_{1, \overline{B}_j \cap \text{supp } \varphi} \leq \sum_{j=1}^J A_{x,j} \|f\|_{1, \overline{B}}. \end{aligned}$$

Последняя оценка завершает доказательство предложения 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отметим, что в предложении 4 условие локального вложения $V_2 \xrightarrow{\text{loc}} V_1$ не требуется.

В доказательстве теоремы 3 нам потребуется следующее уточнение условия (ПК).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть (V_1, L) удовлетворяет условию (3), а X_1 и X_2 удовлетворяют условию (ПК). Тогда для любых $\varepsilon > 0$, шара $B(a, \delta)$ такого, что $\overline{B}(a, \delta) \cap (X_2 \cup Y_0) = \emptyset$, и $f \in V_{1, \text{loc}}$ найдется $g \in L(\overline{B}(a, \delta) \cap X_1) \cap V_{1, \text{loc}}$ такое, что $\|f - g\|_1 < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считаем, что $\overline{B}(a, \delta) \cap X_1 \neq \emptyset$. По условию (ПК) (см. замечание 1) для любых $\eta > 0$ и $x \in \overline{B}(a, \delta) \cap X_1$ найдутся $p_x \geq 1$, $\delta_x \in (0, \text{dist}(x, X_2 \cup Y_0)/p_x)$ и $g_{\eta, x} \in L(\overline{B}(x, \delta_x) \cap X_1) \cap C_0^\infty$ такие, что

$$\|f - g_{\eta, x}\|_{1, \overline{B}(x, \delta_x) \cap X_1} < \frac{\eta}{2}.$$

Из открытого покрытия $\{B(x, \delta_x)\}_{x \in \overline{B}(a, \delta) \cap X_1}$ компакта $\overline{B}(a, \delta) \cap X_1$ выделим конечное подпокрытие $\{B(x_j, \delta_j)\}_{j=1}^J$ и найдем систему функций $\{\varphi_j\}_{j=1}^J$, удовлетворяющих условиям

$$\varphi_j \in C_0^\infty(B(x_j, \delta_j)), \quad 0 \leq \varphi_j \leq 1, \quad j \in \{1, 2, \dots, J\}, \quad \sum_{j=1}^J \varphi_j(x) = 1$$

в некоторой окрестности $\overline{B}(a, \delta) \cap X_1$.

Пусть $g_{\eta, j} := g_{\eta, x_j}$, $j \in \{1, \dots, J\}$. Построим $\{h_j\}_{j=1}^J \subset V_{1, \text{loc}}$ такие, что $h_j \in L(\overline{B}(x_j, \delta_j) \cap X_1)$ и $\|f - h_j\|_1 < \eta$. По определению нормы в $V_1(\overline{B}(x_j, \delta_j) \cap X_1)$ мы можем найти окрестность U_j компакта $\overline{B}(x_j, \delta_j) \cap X_1$, в которой $Lg_{\eta, j} = 0$ и $\|f - g_{\eta, j}\|_{1, \overline{U}_j} < \eta$. Пусть $\tilde{h}_j \in V_1$ такой, что $f - g_{\eta, j} = \tilde{h}_j$ в U_j и $\|\tilde{h}_j\|_1 < \eta$. Тогда распределения $h_j = f - \tilde{h}_j$, $j \in \{1, \dots, J\}$, искомые.

Рассмотрим $f_j = \mathcal{V}_{\varphi_j} f \in V_{1, \text{loc}}$ и $H_j = \mathcal{V}_{\varphi_j} h_j \in V_{1, \text{loc}}$. Из свойства (3) для (V_1, L) получаем

$$\|f_j - H_j\|_{1, X} = \|\mathcal{V}_{\varphi_j}(f - h_j)\|_{1, X} \leq A_j \|f - h_j\|_1 < A_j \eta,$$

где $A_j = A(\varphi_j, B)$ из (3). Положим

$$g = f - \sum_{j=1}^J (f_j - H_j).$$

Тогда

$$Lg = L\left(f - \sum_{j=1}^J f_j\right) + \sum_{j=1}^J LH_j = Lf\left(1 - \sum_{j=1}^J \varphi_j\right) + \sum_{j=1}^J \varphi_j Lh_j = 0$$

в некоторой окрестности $\overline{B}(a, \delta) \cap X_1$. Откуда $g \in L(\overline{B}(a, \delta) \cap X_1) \cap V_{1, \text{loc}}$ и

$$\|f - g\|_{1, X} < \eta \sum_{j=1}^J A_j.$$

Полагая $\eta = \varepsilon / (\sum_{j=1}^J A_j)$, получаем $\|f - g\|_{1, X} < \varepsilon$. Для завершения доказательства остается заметить, что рассуждения, приведенные чуть выше для построения h_j , показывают, что g может быть выбрано так, что $g \in L(\overline{B}(a, \delta) \cap X_1) \cap V_{1, \text{loc}}$ и $\|f - g\|_1 < \varepsilon$.

3.4. Доказательство теоремы 3. Пусть $(F_1, F_2) \in W_{1,2}$ и $\eta > 0$ произвольно. Из условия (ПК) и предложения 3 следует, что найдется $f_0 \in V_1$ с компактным носителем такое, что $Lf_0 = 0$ в некоторой окрестности U компакта $Y_0 \cup X_2$ (в частности, и на $\dot{X}$) и $\|(f_0, f_0) - (F_1, F_2)\|_{1,2} < \eta$. Для доказательства теоремы 3 остается для произвольного $\varepsilon > 0$ найти $G \in L(X)$, удовлетворяющее условию $\|(f_0, f_0) - (G, G)\|_{1,2} < \varepsilon$. Фиксируем $\eta, f_0, U, \varepsilon$ и опишем построение G . Пусть $j = (j_1, \dots, j_N) \in \mathbb{Z}^N$. Для

$$\delta \in \left(0, \frac{1}{10A_4} \cdot \text{dist}(\partial U, X_2 \cup Y_0)\right),$$

где A_4 взято из (5), рассмотрим δ -решетку $\{a_j = (j_1\delta, \dots, j_N\delta)\}_{j \in \mathbb{Z}^N}$ и систему открытых шаров $\{B_j = B(a_j, \delta\sqrt{N})\}_{j \in \mathbb{Z}^N}$, покрывающую $\mathbb{R}^N$. Далее, пусть $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{Z}^N}$ ($\varphi_j \in C_0^\infty(B_j)$, $0 \leq \varphi_j \leq 1$, $\sum_{j \in \mathbb{Z}^N} \varphi_j(x) \equiv 1$) – разбиение единицы, ассоциированное с покрытием $\{B_j\}_{j \in \mathbb{Z}^N}$. Положим $f_j = \mathcal{V}_{\varphi_j} f_0 \in V_{1,\text{loc}}$. Тогда если $B_j \subset U$ или $\overline{B_j} \cap \text{supp } f_0 = \emptyset$, то $f_j \equiv 0$. Также если $B_j \subset \mathbb{R}^N \setminus X$, то $Lf_j \equiv 0$ в окрестности X .

Предположим, что $X \setminus U \neq \emptyset$ (иначе f_0 – требуемое приближение) и обозначим $J = \{j \in \mathbb{Z}^N : \overline{B_j} \cap (X \setminus U) \neq \emptyset\}$. Множество J конечно, причем в силу выбора δ для всех $j \in J$ имеем $\overline{B_j} \cap (X_2 \cup Y_0) = \emptyset$. При каждом $j \in J$ и ε_0 (которое выберем позже) для шара B_j и f_0 , используя предложение 5, найдем $g_j \in L(\overline{B_j} \cap X_1) \cap V_{1,\text{loc}}$ такое, что $\|f_0 - g_j\|_1 < \varepsilon_0$. Положим $G_j = \mathcal{V}_{\varphi_j} g_j \in V_{1,\text{loc}}$ и рассмотрим

$$G = f_0 - \sum_{j \in J} (f_j - G_j) \in V_{1,\text{loc}}.$$

Тогда $G \in L(X)$ (см. доказательство предложения 5), причем из (3) получаем

$$\|G - f_0\|_{1,X_1} \leq \sum_{j \in J} \|f_j - G_j\|_{1,X_1} \leq \sum_{j \in J} A_j^{(1)} \|f_0 - g_j\|_1 < \varepsilon_0 \sum_{j \in J} A_j^{(1)},$$

где $A_j^{(1)}$ зависят только от φ_j и B_j . Далее,

$$\|G - f_0\|_{2,X_2} \leq \sum_{j \in J} \|f_j - G_j\|_{2,X_2} = \sum_{j \in J} \|\mathcal{V}_{\varphi_j}(f_0 - g_j)\|_{2,X_2}.$$

В силу выбора δ из предложения 4 находим

$$\|\mathcal{V}_{\varphi_j}(f_0 - g_j)\|_{2,X_2} \leq A_j^{(2)} \|f_0 - g_j\|_{1,\overline{B_j}},$$

где $A_j^{(2)}$ не зависят от ε_0 , откуда

$$\|G - f_0\|_{2,X_2} < \varepsilon_0 \sum_{j \in J} A_j^{(2)}.$$

Полагая

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{\max(\sum_{j \in J} A_j^{(1)}, \sum_{j \in J} A_j^{(2)})},$$

получаем требуемое распределение G .

4. Некоторые примеры и следствия

4.1. Примеры применения теорем 3 и 4. Здесь мы сформулируем следствия доказанных нами теорем только для аппроксимации некоторых классов функций, поскольку формулировки этих следствий для индивидуальных функций рассматриваемых классов немедленно вытекают из теорем 3 и 4 и соответствующих критериев аппроксимации в каждом V_s .

ПРИМЕР 1. Пусть E – замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^N$, $t \in (0, 1)$. Банахово пространство $\text{lip}_t(E)$ определяется как класс всех функций $f: E \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\|f\|_{0,E} = \sup_{x \in E} |f(x)| < \infty, \quad \|f\|'_{t,E} = \sup_{\delta > 0} \frac{\omega_E(f, \delta)}{\delta^t} < \infty,$$

$\omega_E(f, \delta) = o(\delta^t)$ при $\delta \rightarrow 0$, где $\omega_E(f, \cdot)$ – модуль непрерывности f на E .

Норма в этом пространстве задается равенством

$$\|f\|_{t,E} = \|f\|_{0,E} + \|f\|'_{t,E}.$$

При $E = \mathbb{R}^N$ индексы E в записи норм опускаем и полагаем $\text{lip}_t = \text{lip}_t(\mathbb{R}^N)$. Условия (1) и (2) для пространств lip_t , $t \in (0, 1)$, проверяются элементарно. Следовательно, lip_t – КБП. По теореме Уитни [16, с. 206] для произвольного компакта K в $\mathbb{R}^N$ пространство струй $\text{lip}_t(K)$ изоморфно введенному выше пространству функций $\text{lip}_t(K)$.

Фиксируем произвольные α и β , удовлетворяющие $0 < \alpha < \beta < 1$, и рассмотрим задачу о совместных приближениях в пространствах $V_1 = \text{lip}_\alpha$ и $V_2 = \text{lip}_\beta$ в $\mathbb{R}^2$, причем в качестве эллиптического оператора L возьмем оператор Коши–Римана $\partial/\partial\bar{z}$ в $\mathbb{C}_z$. Нетрудно непосредственно установить, что $V_2 \xrightarrow{\text{loc}} V_1$ и для пары (V_1, L) (а также и для пары (V_2, L)) выполнено (3) (см. [9]).

Пусть X_1 и X_2 – компакты в $\mathbb{R}^2$ (напомним, что $X = X_1 \cup X_2$, $X_0 = X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$). Тогда

$$\begin{aligned} V_{1,2} &= \{(f_1, f_2) \mid f_1 \in \text{lip}_\alpha(X_1), f_2 \in \text{lip}_\beta(X_2) \text{ и } f_1|_{X_0} = f_2|_{X_0}\}, \\ H_{1,2} &= \{(f_1, f_2) \in V_{1,2} \mid f_s \text{ голоморфна на } \dot{X}_s, s \in \{1, 2\}\}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Достаточно воспользоваться теоремой 4 (см. п. 3.2) и теоремой О’Фаррелла [17]. Заметим, что в теореме 1 условие (ПК) не требуется, поскольку оно автоматически следует из (ii).

ПРИМЕР 2. В этом примере положим $V_1 = BC^0(\mathbb{R}^2)$, $V_2 = BC^1(\mathbb{R}^2)$ и $L = \partial/\partial\bar{z}$, где $BC^m(\mathbb{R}^N)$, $m \in \mathbb{Z}_+$, – пространство всех m раз непрерывно дифференцируемых функций $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ с конечной нормой

$$\|f\|_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\partial^\alpha f(x)|.$$

Выполнение условий (1), (2) для V_1 и V_2 проверяется элементарно. Справедливость (3) для (V_1, L) следует из [8, гл. 2, § 3]. Также очевидно, что $V_2 \xrightarrow{\text{loc}} V_1$.

Для произвольного компакта K в $\mathbb{R}^2$ пространство $BC^0(K)$ (которое будем обозначать $C(K)$) есть пространство непрерывных функций на K с равномерной нормой $\|\cdot\|_{0,K}$. Пространство $BC^1(K)$ (его будем обозначать $C^1(K)$) определяется выше в разделе 2 как факторпространство $BC^1(\mathbb{R}^2)/I(K)$, где $I(K)$ есть замыкание в $BC^1(\mathbb{R}^2)$ линейного подмногообразия $\{f \in BC^1(\mathbb{R}^2) : \text{supp } f \cap K = \emptyset\}$. Последнее определение по теореме Уитни [16, с. 210] эквивалентно более наглядному определению пространства $C^1(K)$, данному в разделе 1.

Пусть, как и ранее, X_1 и X_2 – непустые компакты в $\mathbb{R}^2$. Тогда

$$V_{1,2} = \{(f_1, F_2) \mid f_1 \in C(X_1), F_2 = (h_0, h_1, h_2) \in C^1(X_2) \text{ и } f_1|_{X_0} = h_0|_{X_0}\},$$

$$H_{1,2} = \{(f_1, F_2) \in V_{1,2} \mid f_1 \text{ голоморфна на } \dot{X}_1, h_0 \text{ голоморфна на } \dot{X}_2\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Следует воспользоваться теоремой Витушкина [8, гл. 2, § 3], результатом Дж. Вердеры [7, теорема 1] и теоремой 4 (см. также [5, теорема 4 (ii)]). Так же, как и в примере 1, здесь условие (ПК) следует из (ii).

Другие примеры наличия и отсутствия совместных приближений, подтверждающие “существование” условий теорем 3 и 4, планируется привести в последующей работе.

4.2. Совместные приближения на нигде не плотных компактах в $\mathbb{R}^N$. Фиксируем КБП V и оператор L .

УСЛОВИЕ (А). Скажем, что для непустого компакта K в $\mathbb{R}^N$ и пары (V, L) выполнено *условие (А)*, если найдется полином p такой, что $Lp \equiv 1$ и $p|_K \in L_V(K)$.

Очевидно, что условию (А) могут удовлетворять только нигде не плотные компакты K в $\mathbb{R}^N$ и одновременно все полиномы с условием $Lp \equiv 1$. Для таких компактов верна следующая теорема, частные случаи которой можно найти в [10]–[12].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть K – компакт в $\mathbb{R}^N$, удовлетворяющий условию (А). Пусть C^∞ плотно в V_{loc} и (V, L) удовлетворяет (3). Тогда $V(K) = L_V(K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F \in V(K)$ и $f \in F$ – некоторый представитель класса F , причем такой, что $\text{supp } f$ – компакт. Предположим, что $\text{supp } f \cup K \subset B = B(0, R)$, где $R > 0$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. По условию найдется $\varphi \in C_0^\infty(B)$ такая, что $\|\varphi - f\|_K < \varepsilon/2$.

Пусть p – полином такой, что $Lp \equiv 1$, и для любого $\eta > 0$ найдется $g_\eta \in L(K) \cap V_{\text{loc}}$ такой, что $\|p - g_\eta\|_K < \eta$. По определению нормы $\|\cdot\|_K$ можно добиться неравенства $\|p - g_\eta\|_{\bar{B}} < \eta$ (см. доказательство предложения 5). Пусть далее $\psi \in C_0^\infty$, $\psi \equiv 1$ на шаре $B(0, R)$. Тогда из равенства (см. [4, с. 255])

$$\varphi = \Phi * L\varphi = \Phi * [L\varphi L(\psi p)] = \mathcal{V}_L\varphi(\psi p)$$

и свойства (3) находим

$$\begin{aligned} \|\varphi - \mathcal{V}_L\varphi(\psi g_\eta)\|_K &= \|\mathcal{V}_L\varphi(\psi p - \psi g_\eta)\|_K \leq \|\mathcal{V}_L\varphi(\psi p - \psi g_\eta)\|_{\bar{B}} \\ &\leq A_1 \|\psi p - \psi g_\eta\|_{\bar{B}} \leq A_2 \|p - g_\eta\|_{\bar{B}} \leq A_2 \eta, \end{aligned}$$

где $A_1 = A_1(\varphi, B) > 0$ и $A_2 = A_2(\varphi, \psi, B) > 0$ не зависят от η . Положим $\eta = \varepsilon/(2A_2)$. Поскольку $h = \mathcal{V}_L\varphi(\psi g_\eta) \in L(K) \cap V_{\text{loc}}$ и

$$\|F - h\|_K \leq \|f - \varphi\|_K + \|\varphi - h\|_K < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

в силу произвольности ε $f \in L_V(K)$.

В качестве следствия теоремы 3 и предложения 6 получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть для каждого $s \in \{1, 2\}$ V_s – КБП, пара (V_s, L) удовлетворяет (3) и C^∞ плотно в $V_{s, \text{loc}}$. Пусть также $V_2 \xrightarrow{\text{loc}} V_1$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) при каждом $s \in \{1, 2\}$ для компакта X_s и пары (V_s, L) выполнено условие (A);
- (ii) $V_{1,2}(X_1, X_2) = L_{1,2}(X_1, X_2)$.

Автор искренне признателен П. В. Парамонову и К. Ю. Федоровскому за внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Rubel L. A., Stray A. Joint approximation in the unit disc // J. Approximation Theory. 1983. V. 37. №1. P. 44–50.
- [2] Gonzalez F. P., Stray A. Farrell and Mergelyan sets for H^p spaces // Michigan Math. J. 1989. V. 36. P. 379–386.
- [3] Даниелян А. А. О некоторых задачах, возникающих из проблемы Рубеля об одновременной аппроксимации // Докл. РАН. 1995. Т. 341. №1. С. 10–12.
- [4] Paramonov P. V., Verdera J. Approximation by solutions of elliptic equations on closed subsets of Euclidean space // Math. Scand. 1994. V. 74. P. 249–259.
- [5] Бовен А., Парамонов П. В. Аппроксимация мероморфными и целыми решениями эллиптических уравнений в банаховых пространствах распределений // Матем. сб. 1998. Т. 189. №4. С. 481–502.
- [6] Davie A. M., Øksendal B. K. Rational approximation on the union of sets // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 29. №3. P. 581–584.
- [7] Verdera J. C^m -approximation by solutions of elliptic equations and Calderon–Zygmund operators // Duke Math. J. 1987. V. 55. P. 157–187.
- [8] Витушкин А. Г. Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений // УМН. 1967. Т. 22. №6. С. 141–199.
- [9] O’Farrell A. G. T -invariance // Proc. Roy. Irish Acad. 1992. V. 92 A. №2. P. 185–203.
- [10] Khavinson D. On uniform approximation by harmonic functions // Michigan Math. J. 1987. V. 34. P. 465–473.
- [11] Готье П. М., Парамонов П. В. Аппроксимация гармоническими функциями в C^1 -норме и гармонический C^1 -поперечник компактных множеств в $\mathbb{R}^n$ // Матем. заметки. 1994. Т. 53. №4. С. 21–30.
- [12] Горохов Ю. А. Аппроксимация гармоническими функциями в C^m -норме и гармоническая C^m -вместимость компактных множеств в $\mathbb{R}^n$ // Матем. заметки. 1997. Т. 62. №3. С. 372–382.
- [13] Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными (в 4-х томах). Т. 1. М.: Мир, 1986.
- [14] Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными (в 4-х томах). Т. 2. М.: Мир, 1986.
- [15] Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.
- [16] Стейн И. М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
- [17] O’Farrell A. G. Hausdorff content and rational approximation in fractional Lipschitz norms // Trans. Amer. Math. Soc. 1977. V. 228. P. 187–206.