В. С. Самовол, Конечно-гладкая нормальная форма автономной системы с двумя чисто мнимыми корнями, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 2, 270–281

https://www.mathnet.ru/mzm2808

Математические заметки

том 80 выпуск 2 август 2006

УДК 517.91

КОНЕЧНО-ГЛАДКАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ ЧИСТО МНИМЫМИ КОРНЯМИ

В. С. Самовол

Рассматривается задача конечно-гладкой нормализации систем обыкновенных дифференциальных уравнений, линейная часть которых имеет два чисто мнимых собственных числа, в то время как другие собственные числа лежат вне мнимой оси.

Библиография: 8 названий.

Введение. В работе рассматривается задача локальной конечно-гладкой приводимости вещественной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений к нормальной форме в окрестности особой точки. Речь пойдет о системах, матрица линейной части которых имеет два чисто мнимых (сопряженных) собственных числа, в то время как другие собственные числа лежат вне мнимой оси. Данная статья является естественным продолжением работы [1], в которой рассматривались системы с одним нулевым собственным значением.

Нормальная форма системы обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно хорошо изучена. В частности, подробно исследована задача аналитической приводимости к нормальной форме (см. работы Брюно, например, [2; гл. 2, 3], [3]). В данной работе нас будет интересовать как задача о виде нормальной формы системы дифференциальных уравнений, так и задача о конечно-гладкой приводимости к ней. Такие задачи также хорошо изучены, однако в большинстве работ исследуются системы с невырожденной особой точкой (или инвариантным многообразием) в то время как даже слабо вырожденные системы весьма мало изучены. По поводу частично вырожденных систем см. [4]. Задача бесконечно-гладкой эквивалентности систем с одним нулевым или парой чисто мнимых собственных чисел рассмотрена в [5]. В этой работе установлено, что из формальной эквивалентности таких систем следует их бесконечно-гладкая эквивалентность (за исключением систем, образующих некоторое исключительное множество коразмерности бесконечность). Задача конечно-гладкой приводимости систем с одним нулевым собственным числом к нормальной форме изучена в [1]. Следует отметить, что в основе использованной в работах [1], [5] методики исследования слабо вырожденных систем (к которым мы относим системы с одним нулевым или парой чисто мнимых собственных чисел)

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00426.

лежит работа [6], в которой исследована связь между формальными и бесконечно-гладкими решениями вырождающихся систем. Отметим также, что в данной работе мы придерживаемся той же логики изложения, в которой выдержана статья [5].

Рассмотрим вещественную автономную систему

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = Q(\xi), \tag{1}$$

где $\xi, Q(\xi) \in \mathbb{R}^{n+2}$, $n > 0$, $Q(\xi)$ – аналитическая функция в некоторой окрестности начала координат, $Q(0) = 0$, матрица $\tilde{A} = Q'(0)$ имеет n собственных чисел, лежащих вне мнимой оси, и пару чисто мнимых собственных чисел. Цель данной работы состоит в определении вида нормальной формы такой системы уравнений и выяснении условий существования конечно-гладкого невырожденного преобразования, приводящего систему (1) к нормальной форме в некоторой окрестности начала координат. Эту задачу мы будем называть *задачей локальной конечно-гладкой нормализации* системы (1).

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – собственные числа матрицы $\tilde{A}$ с ненулевой действительной частью, $\lambda_{n+1} = i\omega$, $\lambda_{n+2} = -i\omega$, где $\omega > 0$, а i – мнимая единица. С помощью стандартного линейного преобразования приведем систему (1) к следующему виду, где матрица $\tilde{A}$ имеет жорданову форму:

$$\begin{aligned} &\frac{dx_j}{dt} = \varepsilon_j x_{j-1} + \lambda_j x_j + f_j(x, y), \qquad j = 1, \ldots, n, \\ &\frac{dy_j}{dt} = \lambda_{n+j} y_j + g_j(x, y), \qquad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь x_j, y_j – комплексные координаты, $y = (y_1, y_2)$. При этом, как обычно в подобных случаях, комплексно сопряженным собственным числам соответствуют комплексно сопряженные уравнения системы, комплексная сопряженность координат и уравнений при всех преобразованиях будет сохраняться. Таким образом, преобразованиям системы (2) будут соответствовать вещественные преобразования системы (1). Ниже все утверждения относительно системы (2) будут естественным образом переноситься на систему (1) и обратно. Переменные x_j мы будем называть гиперболическими или невырожденными, а переменные y_j – вырожденными.

В системе (2) имеется двумерное инвариантное центральное многообразие, на котором в окрестности особой точки интегральные кривые либо замкнуты (случай центра), либо являются спиралями (случай фокуса). В случае центра указанное многообразие единственно и является аналитическим. В случае фокуса оно, вообще говоря, не аналитично и не единственно. В данной статье исследуются системы, имеющие фокус на центральном многообразии. Рассмотрим такую систему вида (2). При этом мы можем отказаться от предположения об аналитичности системы, мы будем считать, что она класса C^∞. На любом центральном многообразии система в случае фокуса может быть приведена формальным преобразованием к следующей нормальной форме (см. формулу (2.7) из [7]):

$$\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dt} = y_1(i\omega + i\varphi(w) + b(w)), \\ &\frac{dy_2}{dt} = y_2(-i\omega - i\varphi(w) + b(w)). \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь и ниже $w = y_1y_2$, $\varphi(w) = \sum_{m=1}^{p} \varphi_m w^m$, а $b(w) = b_0 w^p + \sigma w^{2p}$, где $p \geqslant 1$ – целое число, $\varphi_1, \ldots, \varphi_p, b_0$ – вещественные числа, $b_0 \neq 0$, а число σ равно либо нулю, либо единице. Согласно [5] возможность формального преобразования в случае фокуса на центральном многообразии означает существование преобразования класса C^∞, приводящего систему к виду (3). Будем считать, что в системе (2) указанное преобразование уже сделано. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для любого целого числа $k \geqslant 1$ существует невырожденное преобразование класса C^k, приводящее систему (2), имеющую фокус на центральном многообразии, к нормальной форме следующего вида (для простоты мы сохраним обозначения системы (2)):*

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= \varepsilon_j x_{j-1} + \lambda_j x_j + \sum_{l=1}^{n} a_l^j(y) x_l + \sum_{q=2}^{N} a_q^j(x,y), \qquad j = 1, \ldots, n, \\ \frac{dy_1}{dt} &= y_1(i\omega + i\varphi(w) + b(w)) + \sum_{q=2}^{N} a_q^{n+1}(x,y), \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_2(-i\omega - i\varphi(w) + b(w)) + \sum_{q=2}^{N} a_q^{n+2}(x,y). \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $a_q^j(x,y) = \sum_{|s|=q} a_s^j(y) x^s$ и $a_q^j(y)$, $a_s^j(y)$ – функции класса C^∞. Правая часть системы содержит резонансные полиномы по гиперболическим переменным, степень которых равна некоторому числу $N = N(k)$. Коэффициенты полиномов являются функциями класса C^∞, зависящими от y.

Продолжим изучение системы (2), где на центральном многообразии имеет место фокус. Рассмотрим теперь резонансные соотношения, возникающие в таких системах. Нас прежде всего будут интересовать соотношения, порождающие линейные резонансные члены по невырожденным координатам. Такие резонансные соотношения будем называть *резонансами единичного веса.* Эти резонансы возможны в случае, если для каких-либо $1 \leqslant j_1 \neq j_2 \leqslant n$ выполнено условие $\operatorname{Re}\lambda_{j_1} = \operatorname{Re}\lambda_{j_2}$ и $\lambda_{j_1} = \lambda_{j_2} + im\omega$, где m – целое число. Таким образом, наличие или отсутствие резонансов единичного веса определяется тем, является ли число $(\lambda_{j_1} - \lambda_{j_2})/(i\omega)$ целым. При этом надо иметь в виду то обстоятельство, что исходная система вещественна и, следовательно, равенство $\operatorname{Re}\lambda_{j_1} = \operatorname{Re}\lambda_{j_2}$ всегда выполняется для пары комплексно сопряженных корней. Рассмотрим теперь систему (2), в которой отсутствуют резонансы единичного веса. Для такой системы верны следующие теоремы.

Теорема 2. *Если в системе (2) отсутствуют резонансные соотношения единичного веса и на центральном многообразии имеет место фокус, то существует формальное преобразование, приводящее систему (2) к формальной нормальной* *форме следующего вида (для простоты мы сохраним обозначения системы (2)):*

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= \lambda_j x_j + a^j(w)x_j + \sum_{q=2}^{\infty} a_q^j(x,y), \qquad j=1,\dots,n, \\ \frac{dy_1}{dt} &= y_1(i\omega + i\varphi(w) + b(w)) + \sum_{q=2}^{\infty} a_q^{n+1}(x,y), \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_2(-i\omega - i\varphi(w) + b(w)) + \sum_{q=2}^{\infty} a_q^{n+2}(x,y). \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $a^j(w)$ – многочлены степени p без свободных членов,

$$a_q^j(x,y) = \sum_{|s|=q} a_s^j(y)x^s,$$

где $a_s^j(y)$ – многочлены степени $N_1 = N_1(|s|)$.

Зависимость $N_1 = N_1(|s|)$ имеет линейный характер. Если

$$\operatorname{Re}\lambda_j \neq \sum_{l=1}^{n} s_l \operatorname{Re}\lambda_l,$$

то $a_s^j(y) = 0$ при $1 \leqslant j \leqslant n+2$.

Теорема 3. *Если в системе (2) отсутствуют резонансные соотношения единичного веса и на центральном многообразии имеет место фокус, то для любого целого числа $k \geqslant 1$ существует невырожденное преобразование класса C^k, приводящее систему (2) к нормальной форме следующего вида (для простоты мы сохраним обозначения системы (2)):*

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= \lambda_j x_j + a^j(w)x_j + \sum_{q=2}^{N(k)} a_q^j(x,y), \qquad j=1,\dots,n, \\ \frac{dy_1}{dt} &= y_1(i\omega + i\varphi(w) + b(w)) + \sum_{q=2}^{N(k)} a_q^{n+1}(x,y), \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_2(-i\omega - i\varphi(w) + b(w)) + \sum_{q=2}^{N(k)} a_q^{n+2}(x,y). \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $a^j(y)$ – многочлены степени p без свободных членов,

$$a_q^j(x,y) = \sum_{|s|=q} a_s^j(y)x^s,$$

где $a_s^j(y)$ – многочлены степени $N_1 = N_1(|s|)$.

Зависимость $N_1 = N_1(|s|)$ имеет линейный характер. Если

$$\operatorname{Re}\lambda_j \neq \sum_{q=1}^{n} s_q \operatorname{Re}\lambda_q,$$

то $a_s^j(y) = 0$ *при* $1 \leqslant j \leqslant n+2$. *Здесь* $N_1 = N_1(|s|)$ *– степень полиномов, зависящих от вырожденных переменных, а* $N(k)$ *– степень полиномов по невырожденным координатам.*

1. Вспомогательные утверждения. Напомним, что в случае фокуса на двумерном центральном многообразии, соответствующем паре чисто мнимых собственных значений, система (2) на указанном многообразии может быть приведена невырожденным преобразованием класса C^∞ к виду (3).

Займемся теперь преобразованием линейной (по невырожденным координатам) части системы (2). Для этого рассмотрим соответствующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dz_j}{dt} &= \varepsilon_j z_{j-1} + \lambda_j z_j + \sum_{l=1}^{n} f_l^j(y) z_l, \qquad j = 1, \dots, n, \\ \frac{dy_1}{dt} &= y_1(i\omega + i\varphi(w) + b(w)), \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_2(-i\omega - i\varphi(w) + b(w)), \end{aligned} \tag{7}$$

где $f_l^j(y) = \partial f_j(z, y)/\partial z_l$ при $z = 0$.

Лемма 1. *Для системы* (7) *существует невырожденное преобразование класса* C^∞

$$z = x + H(y)x, \qquad H(0) = 0, \tag{8}$$

приводящее ее к следующей нормальной форме:

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= \varepsilon_j x_{j-1} + \lambda_j x_j + \sum_{l=1}^{n} a_l^j(y) x_l, \qquad j = 1, \dots, n, \\ \frac{dy_1}{dt} &= y_1(i\omega + i\varphi(w) + b(w)), \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_2(-i\omega - i\varphi(w) + b(w)), \end{aligned} \tag{9}$$

которая отличается от системы (4) *лишь отсутствием нелинейных по переменным* $x_1, \dots, x_n$ *членов.*

Нетрудно видеть, что системы (7) и (9) формально эквивалентны. При этом сопрягающее формальное преобразование близко к тождественному и линейно по переменным $x_1, \dots, x_n$. Следовательно, лемма 1 следует из [5], где показано, что в случае двух чисто мнимых собственных чисел формальная эквивалентность при наличии фокуса на центральном многообразии равносильна эквивалентности класса C^∞.

Рассмотрим теперь случай системы (7), в которой отсутствуют резонансные соотношения единичного веса. В этом случае имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. *Если в системе* (7) *нет резонансных соотношений единичного веса, то эта система приводима преобразованием вида* (8) *класса* C^∞ *к следующей нормальной форме*:

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= \lambda_j x_j + a^j(w)x_j, \qquad j=1,\dots,n, \\ \frac{dy_1}{dt} &= y_1(i\omega + i\varphi(w) + b(w)), \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_2(-i\omega - i\varphi(w) + b(w)), \end{aligned} \tag{10}$$

где функции $a^j(w)$ *являются полиномами от* $w = y_1y_2$ *степени не выше* p.

Доказательство. Вследствие условий леммы для системы (7) нормальная форма (9) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= \lambda_j x_j + a^{j1}(y)x_j, \qquad j=1,\dots,n, \\ \frac{dy_1}{dt} &= y_1(i\omega + i\varphi(w) + b(w)), \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_2(-i\omega - i\varphi(w) + b(w)), \end{aligned} \tag{11}$$

где функции $a^{j1}(y)$ принадлежат классу C^∞ и не являются пока полиномами. Будем считать, что система (7) уже приведена к нормальной форме (11). Очевидно, что вследствие отсутствия резонансов единичного веса все слагаемые конечного порядка рядов Тейлора функций $a^{j1}(y)$ являются функциями, зависящими от $w = y_1y_2$. Таким образом, функции $a^{j1}(y)$ можно представить в виде суммы двух бесконечно-гладких слагаемых $a^{j1}(y) = a^{j2}(w) + a^{j3}(y)$, где $a^{j3}(y)$ – плоские функции. Но тогда из работы [5] следует, что существует невырожденное преобразование класса C^∞, приводящее систему (11) к виду

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= \lambda_j x_j + a^{j2}(w)x_j, \qquad j=1,\dots,n, \\ \frac{dy_1}{dt} &= y_1(i\omega + i\varphi(w) + b(w)), \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_2(-i\omega - i\varphi(w) + b(w)). \end{aligned} \tag{12}$$

Представим теперь функции $a^{j2}(w)$ в виде $a^{j2}(w) = \sum_{m=1}^{p} c_{jm}w^m + w^{p+1}c_j(w)$, где $c_j(w)$ – функции класса C^∞. Сделаем в системе (12) преобразование $x_j = u_j + h_j(w)u_j$, $j=1,\dots,n$. Получим

$$\frac{du_j}{dt} = \lambda_j u_j + \left(\sum_{m=1}^{p} c_{jm}w^m\right)u_j + w^{p+1}c_j(w)u_j - \frac{\dot h_j(w)u_j}{1+h_j(w)}, \qquad j=1,\dots,n.$$

В качестве функций $h_j(w)$ необходимо взять функции, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{dh_j}{dw} = \frac{(1+h_j)c_j(w)}{2(b_0 + \sigma w^p)}.$$

Очевидно, данное уравнение имеет решение класса C^∞. Лемма 2 доказана.

Условие отсутствия в системе резонансных соотношений единичного веса весьма существенно. Если оно не выполняется, то нельзя утверждать приводимость к указанной нормальной форме с помощью преобразования класса C^∞. Это показывает пример следующей системы (данный пример аналогичен примеру 1 работы [1]).

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1, \\ \dot{x}_2 &= x_2 + w^p x_2 + w^{p+1} x_1, \\ \dot{y}_1 &= y_1\left(i + \frac{1}{2}w^p\right), \\ \dot{y}_2 &= y_2\left(-i + \frac{1}{2}w^p\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь $w = y_1 y_2$, а $p \geqslant 1$ – натуральное число.

Прямая проверка показывает, что эта система не может быть приведена преобразованием класса C^∞ (даже класса C^{p+2}) к нормальной форме, представляющей собой функцию, линейную по невырожденным переменным с коэффициентами, являющимися полиномами от w степени не выше p.

Действительно, допустим, что существует невырожденное преобразование, приводящее данную систему к искомой форме. Без ограничения общности можно ограничиться лишь преобразованиями, близкими к тождественным (это показывается так же, как и в [8; с. 69]). Предположим теперь, что в результате замены переменных

$$x = u + wBu + H(w)u, \qquad \|H(w)\| = o(w) \tag{14}$$

система (13) приобретет требуемую форму

$$\dot{u} = u + (wD_1 + w^2 D_2 + \dots + w^p D_p)u, \tag{15}$$

где D_j, $j = 1, \dots, p$, – некоторые постоянные матрицы.

Подставляя (14) в систему (13), получаем

$$\begin{aligned} \dot{u} = {} & (E + wB + H(w))^{-1}(E + w^p A_1 + w^{p+1} A_2)(E + wB + H(w))u \\ & - (E + wB + H(w))^{-1}(w^{p+1}B + o(w^{p+1}))u. \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перепишем систему (16) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{u} = {} & \big(E + w^p (E + wB + H(w))^{-1} A_1 (E + wB + H(w))\big)u \\ & + w^{p+1}(E + wB + H(w))^{-1} A_2 (E + wB + H(w))u \\ & - (E + wB + H(w))^{-1}(w^{p+1}B + o(w^{p+1}))u. \end{aligned} \tag{17}$$

Учитывая, что $(E + wB + H(w))^{-1} = E - wB + o(w)$, система (17) может быть преобразована следующим образом:

$$\dot{u} = \big(E + w^p A_1 + w^{p+1}(A_1 B - BA_1 - B + A_2) + o(w^{p+1})\big)u.$$

Для того чтобы последняя система имела требуемый вид (15), необходимо, чтобы матрица B удовлетворяла уравнению

$$A_1B - BA_1 - B + A_2 = 0. \tag{18}$$

Приравнивая элементы, находящиеся во второй строке и первом столбце матриц в уравнении (18), получаем, что $0 = 1$. Данное противоречие доказывает невозможность преобразования (14).

2. Конечно-гладкая нормализация. В этом пункте мы приведем доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Предположим, что система (2) невырожденным преобразованием класса C^∞ может быть приведена к следующему виду (обозначения те же, что и в формуле (4)):

$$\begin{aligned}
\frac{dx_j}{dt} &= \varepsilon_j x_{j-1} + \lambda_j x_j + \sum_{l=1}^{n} a_l^j(y)x_l + \sum_{q=2}^{L+1} a_q^j(x,y) + \alpha^j(x,y), \qquad j = 1,\dots,n,\\
\frac{dy_1}{dt} &= y_1(i\omega + i\varphi(w) + b(w)) + \sum_{q=2}^{L+1} a_q^{n+1}(x,y) + \alpha^{n+1}(x,y),\\
\frac{dy_2}{dt} &= y_2(-i\omega - i\varphi(w) + b(w)) + \sum_{q=2}^{L+1} a_q^{n+2}(x,y) + \alpha^{n+2}(x,y),
\end{aligned} \tag{19}$$

где $L \geqslant 1$ – некоторое целое число; $\alpha^j(x,y) = o(\|x\|^{L+1})$; при $|s| \leqslant L$ выполнены условия

$$a_s^j(y) = 0, \quad \text{если} \quad \sum_{l=1}^{n} s_l\lambda_l \neq \lambda_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n+2. \tag{20}$$

Напомним, что $a_q^j(x,y) = \sum_{|s|=q} a_s^j(y)x^s$.

При $L = 1$ данное предположение следует из леммы 1. Пусть оно верно при некотором $L \geqslant 1$. Покажем, что систему (19) можно привести к такому же виду, где условия (20) будут выполнены уже при $|s| \leqslant L+1$.

Для этого вначале для каждого нерезонансного члена вида $c_s^j(y)x^s$, $|s| = L+1$, построим обычную для таких случаев бесконечно-гладкую замену переменных, в результате которой данный нерезонансный член приобретет вид $\alpha_s^j(y)x^s$, где $\alpha_s^j(y)$ уже будет плоской функцией. Полученная система будет формально эквивалентна системе без резонансных членов при $|s| \leqslant L+1$. Следовательно, согласно [5] она будет бесконечно-гладко эквивалентна этой же системе. В результате преобразования класса C^∞ исходная система приобретет такой вид, в котором указанные резонансные члены исчезнут и, следовательно, условия (20) будут выполнены уже при $|s| \leqslant L+1$.

Пусть теперь в системе (19) условия (20) выполнены для $|s| \leqslant N$, где N – достаточно большое число. Более точно, пусть для числа N выполнено неравенство $N \geqslant N(k)$, где $k \geqslant 1$ – целое число, а число $N(k)$ определено в теореме 1 работы [4]. Тогда для системы (19), где условия (20) выполнены при $|s| \leqslant N(k)$, в соответствии с теоремой 1 из [4] существует близкое к тождественному преобразование класса C^k, в результате применения которого система (19) примет требуемый вид (4). Теорема 1 доказана.

3. Формальная нормализация систем без резонансов единичного веса. Рассмотрим такую систему (2), у которой отсутствуют резонансные соотношения единичного веса. В данном пункте мы ограничимся формальными преобразованиями формальных систем вида (2), имея в виду, что правые части этих систем представляют собой формальные степенные ряды. Покажем теперь, что для таких систем справедлива теорема 2, согласно которой система (2) формально приводима к нормальной форме вида (5).

Доказательство теоремы 2. Используя стандартные рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 1, и лемму 2, приходим к выводу, что система (2) формально приводима к нормальной форме следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= \lambda_j x_j + a^j(w)x_j + \sum_{q=2}^{\infty} a_q^j(x,y), \qquad j=1,\dots,n,\\ \frac{dy_1}{dt} &= y_1(i\omega + i\varphi(w) + b(w)) + \sum_{q=2}^{\infty} a_q^{n+1}(x,y),\\ \frac{dy_2}{dt} &= y_2(-i\omega - i\varphi(w) + b(w)) + \sum_{q=2}^{\infty} a_q^{n+2}(x,y), \end{aligned} \tag{21}$$

где $a_q^j(x,y) = \sum_{|s|=q} a_s^j(y)x^s$, $a_s^j(y)$ – формальные степенные ряды, $1 \leqslant j \leqslant n+2$, $a^j(w)$ – полиномы степени p, зависящие от $w = y_1y_2$. Покажем теперь существование формального преобразования, после которого функции $a_s^j(y)$ также окажутся полиномами. Зафиксируем некоторый резонансный набор $s, |s| > 1$, для которого $a_s^j(y) \neq 0$. Запишем функцию $a_s^j(y)$ в виде формального ряда

$$a_s^j(y) = \sum_{l+m=0}^{\infty} a_{lm}^{sj} y_1^l y_2^m.$$

Поскольку система (21) является формальной нормальной формой, то выполняются резонансные соотношения: если $a_{lm}^{sj} \neq 0$, то $(l-m)\omega + \mathrm{Im}(s_1\lambda_1 + \dots + s_n\lambda_n) = \mathrm{Im}\,\lambda_j$. Отсюда следует, что число $\tilde l = l - m$ зависит только от выбранного резонансного набора $(s_1,\dots s_n)$. Будем для определенности считать, что $\tilde l \geqslant 0$. Функцию $a_s^j(y)$ перепишем в виде

$$a_s^j(y) = y_1^{\tilde l} \sum_{m=0}^{\infty} a_{lm}^{sj} w^m. \tag{22}$$

В формальном ряде (22) выделим слагаемые степени не выше N:

$$a_s^j(y) = y_1^{\tilde l}\biggl(\sum_{m=0}^{N} a_m w^m + \sum_{m=N+k}^{\infty} a_m w^m\biggr), \tag{23}$$

где число $N = N_1(s)$ мы определим позже, а число k будем считать большим или равным единице. Пока ограничимся тем, что будем предполагать, что $N \geqslant 2p$.

Рассмотрим теперь два случая. В первом случае будем предполагать, что в системе (3), описывающей движение на центральном многообразии, коэффициент $\sigma = 1$. Сделаем замену переменных

$$x_j = u_j + c y_1^{\tilde l} w^{N+k-2p} u^s. \tag{24}$$

Соответствующую замену сделаем и для комплексно-сопряженной координаты. Остальные переменные оставим без изменений. Подставляя (24) в (21), получаем, что в уравнении для переменной u_j коэффициент при $y_1^{\tilde{l}} w^{N+k}$ в формальном ряде, являющемся коэффициентом при мономе u^s, будет равен числу

$$a_{N+k} - (\tilde{l} + N + k - 2p)c.$$

Полагая

$$c = \frac{a_{N+k}}{\tilde{l} + N + k - 2p},$$

мы приведем систему к виду, где

$$a_s^j(y) = y_1^{\tilde{l}} \biggl(\sum_{m=0}^{N} \tilde{a}_m w^m + \sum_{m=N+k-1}^{N} \tilde{a}_m w^m \biggr),$$

причем коэффициент $\tilde{a}_{N+k} = 0$.

Повторяя соответствующее преобразование конечное число раз, мы приведем систему к виду, в котором функция $a_s^j(y)$ будет иметь вид $a_s^j(y) = y_1^{\tilde{l}}(a_1(w) + a_2(w))$, где $a_1(w)$ – многочлен степени N, а $a_2(w)$ – формальный ряд, начинающийся со степени $N + K + 1$.

Проводя индукцию по k, получаем существование формального преобразования, приводящего систему к виду, в котором $a_s^j(y) = y_1^{\tilde{l}} \sum_{m=0}^{N} \tilde{a}_m w^m$. Подобное преобразование можно провести для любого резонансного набора s. В итоге мы получаем формальную приводимость системы (2) к виду (5), где функции $a_s^j(y)$ являются многочленами степени $2N + \tilde{l}$.

Рассмотрим теперь случай, когда в системе (3) коэффициент $\sigma = 0$.

По-прежнему считаем, что функция $a_s^j(y)$ имеет вид (23), где число $N = N_1(s)$ мы определим позже. Сделаем замену переменных

$$x_j = u_j + c y_1^{\tilde{l}} w^{N+k-p} u^s \tag{25}$$

с теми же оговорками, что и для преобразования (24). Подставляя (25) в систему (21), получаем, что в уравнении для переменной u_j коэффициент при $y_1^{\tilde{l}} w^{N+k}$ в формальном ряде, являющемся коэффициентом при мономе u^s, будет равен числу

$$a_{N+k} + (a_{jp} - \tilde{l}(b_0 + b_p i) - \langle s, a_p \rangle - b_0(N + k - p))c.$$

Здесь $\langle s, a_p \rangle$ – это скалярное произведение вектора s и вектора $a_p = (a_{1p}, \dots, a_{np})$, координаты a_{mp} которого являются коэффициентами при w^p в функциях $a^j(y) = a^j(w)$, $1 \leqslant j \leqslant n$ системы (21). Параметр b_0 принадлежит системе (3).

Здесь надо положить число c равным

$$c = \frac{a_{N+k}}{\tilde{l}(b_0 + b_p i) + \langle s, a_p \rangle + b_0(N + k - p) - a_{jp}}.$$

Повторяя рассуждения, аналогичные тем, которые использованы в [1] при доказательстве теоремы 2, приводим систему (21) к требуемому виду в рассматриваемом случае. Оценка числа $N_1(s)$ полностью аналогична оценке соответствующего числа, приведенной в [1]. Теорема 2 доказана.

4. Конечно-гладкая нормализация систем без резонансов единичного веса. Данный пункт содержит доказательство теоремы 3.

Доказательство теоремы 3. Согласно теореме 2 система (2), у которой отсутствуют резонансные соотношения единичного веса, формально приводима к нормальной форме вида (21). Но тогда с помощью преобразования класса C^∞, ряд Тейлора которого совпадает с формальным преобразованием системы (2), мы можем привести указанную систему к виду

$$\begin{aligned}
\frac{dx_j}{dt} &= \lambda_j x_j + a^j(w)x_j + a^{j1}(x,y) + a^{j2}(x,y), \qquad j=1,\dots,n,\\
\frac{dy_1}{dt} &= y_1(i\omega + i\varphi(w) + b(w)) + a_1^{n+1}(x,y) + a_2^{n+1}(x,y),\\
\frac{dy_2}{dt} &= y_2(-i\omega - i\varphi(w) + b(w)) + a_1^{n+2}(x,y) + a_2^{n+2}(x,y),
\end{aligned} \tag{26}$$

где функции $a^j(w)$ являются многочленами по w степени p, ряды Тейлора функций $a^{j1}(x,y)$ совпадают с формальными рядами $\sum_{|s|=2}^{\infty} a_s^j(x,y)$, где $a_s^j(x,y) = (a_s^j(y) + \alpha_s^j(y))x^s$, $a_s^j(y)$ – многочлены степени $N_1(s)$, $\alpha_s^j(y)$ – плоские функции, $a^{j2}(x,y)$ – функции, плоские по переменным $x_1,\dots,x_n$, все слагаемые конечной степени являются резонансными членами.

Пусть теперь $k \geqslant 1$ – целое число, а число $N = N(k)$ определено ранее. Тогда для системы (26) в соответствии с теоремой 1 работы [4] существует близкое к тождественному преобразование класса C^k, в результате применения которого система (26) приобретет вид

$$\begin{aligned}
\frac{dx_j}{dt} &= \lambda_j x_j + a^j(w)x_j + \tilde{a}^j(x,y), \qquad j=1,\dots,n,\\
\frac{dy_1}{dt} &= y_1(i\omega + i\varphi(w) + b(w)) + \tilde{a}^{n+1}(x,y),\\
\frac{dy_2}{dt} &= y_2(-i\omega - i\varphi(w) + b(w)) + \tilde{a}^{n+2}(x,y),
\end{aligned} \tag{27}$$

где

$$\tilde{a}^j(x,y) = \sum_{|s|=2}^{N(k)} (a_s^j(y) + \alpha_s^j(y))x^s, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n+2.$$

Полученная система формально эквивалентна системе (6), следовательно, согласно [5] можно с помощью преобразования класса C^∞ избавиться от конечного числа плоских слагаемых в уравнениях системы (27). В результате получаем существование замены переменных класса C^∞, после которой система (27) приобретет требуемый вид (6). Теорема 3 доказана.

В теоремах 2 и 3 мы исходили из того, что в системе отсутствуют резонансные соотношения единичного веса. Данное условие обеспечивало формальную приводимость линейной части системы к полиномиальной нормальной форме (лемма 2). Если указанное условие не выполнено, то приведение к такой нормальной форме не всегда возможно. Однако если предположить, что нормальная форма линейной системы (7) имеет вид (9), где функции $a_l^j(y)$ являются многочленами, то теоремы 2 и 3 остаются верными и без выполнения условия отсутствия резонансных соотношений единичного веса. Это, в частности, означает, что конечно-гладкая нормальная форма системы (2) имеет в такой ситуации полиномиальный вид, однако оценка чисел $N_1(s)$ будет в этом случае другой.

Автор выражает искреннюю благодарность А. Д. Брюно за полезные обсуждения вопросов, связанных с проблематикой данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В. С. Самовол, "Нормальная форма автономной системы с одним нулевым корнем", *Матем. заметки*, **75**:5 (2004), 711–720.

[2] А. Д. Брюно, *Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1979.

[3] А. Д. Брюно, "Аналитическая форма дифференциальных уравнений", *Тр. ММО*, **25** (1971), 119–262.

[4] В. С. Самовол, "Эквивалентность систем дифференциальных уравнений в окрестности особой точки", *Тр. ММО*, **44** (1982), 213–234.

[5] Г. Р. Белицкий, "Гладкая эквивалентность ростков векторных полей", *Функцион. анализ и его прилож.*, **20**:4 (1986), 1–8.

[6] А. Н. Кузнецов, "Дифференцируемые решения вырождающихся систем обыкновенных уравнений", *Функцион. анализ и его прилож.*, **6**:2 (1972), 41–51.

[7] А. Д. Брюно, В. Ю. Петрович, *Нормальные формы системы ОДУ*, Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН № 18, 2000.

[8] В. С. Самовол, "О необходимом и достаточном условии гладкой линеаризации автономной системы на плоскости в окрестности особой точки", *Матем. заметки*, **46**:1 (1989), 67–77.

В. С. Самовол
Государственный университет –
Высшая школа экономики
E-mail: svs46@mail.ru

Поступило
23.11.2005