



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Ядченко, А. В. Романовский, К проблеме Айзекса
о конечных p -разрешимых линейных группах,
Матем. заметки, 2001, том 69, выпуск 1, 144–152

<https://www.mathnet.ru/mzm491>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 216.73.216.37

14 декабря 2025 г., 19:30:53





УДК 512.542

К ПРОБЛЕМЕ АЙЗЕКСА

О КОНЕЧНЫХ p -РАЗРЕШИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУППАХ

А. А. Ядченко, А. В. Романовский

В данной работе исследуется конечная Π -обособленная комплексная неприводимая линейная группа G . Определены условия, при которых ее S_Π -подгруппа нормальна в G и абелева. Результаты являются решением известной проблемы Айзекса в некоторых частных случаях.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Обобщая теорему Ито [1] о p -разрешимых комплексных линейных группах степени $n < p$, Уинтер [2] доказал, что силовская p -подгруппа разрешимой неприводимой комплексной линейной группы G степени n нормальна в G , если n не делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv -1, 0, 1 \pmod{p}$. В [3]–[5] показано, что результат Уинтера верен и для p -разрешимых групп степени $n < 2p$. Вопрос о его справедливости для p -разрешимых групп был поставлен Айзексом [6] на международной конференции по теории групп в Санта Круз. Этому направлению, наряду с работами [7] и [8], посвящена и данная статья.

УСЛОВИЕ А. G есть Π -обособленная группа, удовлетворяющая каждому из следующих требований:

- 1) имеет точный неприводимый характер φ степени n , не делящейся на такую степень $q^\alpha > 1$ простого числа q , что $q^\alpha \equiv 0, 1 \pmod{p}$ для всех $p \in \Pi$;
- 2) содержит абелеву $S_{\pi(n)}$ -подгруппу.

УСЛОВИЕ В. G есть Π -обособленная группа, имеющая точный неприводимый характер φ степени q^α , где q – простое число и $q^{\alpha_1} \not\equiv -1, 0, 1 \pmod{p}$ для всех $0 < \alpha_1 \leq \alpha$ и всех $p \in \Pi$.

ТЕОРЕМА. Если группа G удовлетворяет условию А или условию В, то ее S_Π -подгруппа абелева и нормальна в G .

2. Некоторые обозначения и предварительные результаты. Всюду подгруппой будем понимать конечную группу, под характером – комплексный характер, Π обозначает некоторое множество простых чисел, p и q везде обозначают некоторые простые числа. Π -обособленной называется группа, любой главный фактор которой есть либо Π -группа, либо Π' -группа; $\mathbb{Z}_+$ – множество целых неотрицательных чисел; $\alpha_i = 1, \dots, p$

есть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$; $\text{char}(G) = \{\sum_i \alpha_i \varphi_i \mid \alpha_i \in \mathbb{Z}_+, \varphi_i \in \text{Irr}(G)\}$; $\text{Irr}(G)^\#$ – множество всех неприводимых характеров группы G за исключением главного 1_G ; если $\varphi, \psi \in \text{char}(G)$, то

$$(\varphi, \psi)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \varphi(x) \overline{\psi(x)}$$

– внутреннее произведение характеров φ и ψ . Остальные обозначения стандартны, их можно найти, например, в [9] и [10].

ЛЕММА 1. Пусть $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$ – все различные корни степени p из 1 и $l = \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_i$, где $\alpha_{i=1, \dots, p} \in \mathbb{Z}_+$, есть рациональное число. Тогда l есть целое число, $\alpha_{i=2, \dots, p} = \alpha_2$ и $l = \alpha_1 - \alpha_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из того, что алгебраические числа $\varepsilon_{i=2, \dots, p}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

ЛЕММА 2. Пусть $\varphi \in \text{char}(G)$, $g \in G$, $o(g) = p$ и $\varphi(g) \in \mathbb{Q}$. Тогда

$$\varphi(g) = \alpha_\varphi - \beta_\varphi, \quad \varphi(1) = \alpha_\varphi + \beta_\varphi(p-1),$$

где $\alpha_\varphi = (\varphi_{\langle g \rangle}, 1_{\langle g \rangle})_{\langle g \rangle}$ и $\beta_\varphi = (\varphi_{\langle g \rangle}, \lambda)_{\langle g \rangle}$, $\lambda \in \text{Irr}(\langle g \rangle)^\#$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы 1, так как $\varphi(g)$ есть сумма корней степени p из 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\varphi(g) = 0$ в лемме 2, то $\varphi(1) = \beta_\varphi p$.

ЛЕММА 3. Пусть группа G имеет точный неприводимый характер φ степени n . Если G содержит абелеву $S_{\pi(n)}$ -подгруппу R , то $|R/R \cap Z(G)| = n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку R есть абелева $S_{\pi(n)}$ -подгруппа, то $(n, |Cl(g)|) = 1$ для всех $g \in R$. Пусть $R_0 = R \cap Z(G)$. Тогда по теореме Бернсайдса [10, теорема 3.8] для всех $g \in R \setminus R_0$ имеем, что $\varphi(g) = 0$. Следовательно, ввиду [10, упр. 2.16] $|R/R_0|$ делит n . Но n делит $|G : Z(G)|$, т.е. n делит $|RZ(G)/Z(G)|$, и так как

$$RZ(G)/Z(G) \simeq R/R \cap Z(G) = R/R_0,$$

то $|R/R_0| = n$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть группа $G = PQ$, где P – подгруппа порядка p в G , $|Q| = q^\alpha$, $Q \trianglelefteq G$, имеет неприводимый характер φ такой, что $\varphi(1) = q^r$ и $q^{r_1} \not\equiv -1, 0, 1 \pmod{p}$ для всех $0 < r_1 \leq r$. Тогда $[P, Q] \subseteq \text{Ker } \varphi \cap Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Уинтера

$$P \text{Ker } \varphi / \text{Ker } \varphi \trianglelefteq G / \text{Ker } \varphi.$$

Отсюда и из того, что $Q \trianglelefteq G$, получаем, что

$$P \text{Ker } \varphi / \text{Ker } \varphi \subseteq Z(G / \text{Ker } \varphi).$$

Значит, ввиду [9, теорема 2.2.1] $[P \text{Ker } \varphi, G] \subseteq \text{Ker } \varphi$. Поскольку $[P, Q] \subseteq [P \text{Ker } \varphi, G]$, то $[P, Q] \subseteq \text{Ker } \varphi$. Но $[P, Q] \subseteq G' \subseteq Q$. Следовательно, $[P, Q] \subseteq \text{Ker } \varphi \cap Q$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть группа $G = PO_{p'}(G)$, где P – подгруппа порядка p в G , имеет точный неприводимый характер φ степени n и содержит абелеву $S_{\pi(n)}$ -подгруппу R . Если n не делится на степень $q^\alpha > 1$ простого числа q такую, что $q^\alpha \equiv 0, 1 \pmod{p}$, то подгруппа P нормальна в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем положить, что $P \subseteq N_G(R)$. Тогда $R = [P, R] \times C_R(P)$ и так как $R \cap Z(G) \subseteq C_R(P)$, то по лемме 3 $|[P, R]|$ делит n . Пусть $q \in \pi(n)$ и Q есть P -инвариантная силовская q -подгруппа из $[P, R]$. Тогда PQ есть группа Фробениуса с ядром Q , по одному из свойств которой $|Q| = q^{\alpha_1} \equiv 1 \pmod{p}$ для некоторого числа α_1 . Но $|Q|$ делит $|[P, R]|$, а $|[P, R]|$ делит n , что отмечено выше. Значит, q^{α_1} делит n . Если $\alpha_1 \neq 0$, т.е. $[P, R] \neq 1$, то мы получим противоречие с условием леммы. Значит, $\alpha_1 = 0$ и, следовательно, $[P, R] = 1$, т.е. $R \subseteq C_G(P)$. Это означает, что $(n, |Cl(x)|) = 1$ для всех $x \in P$. Применим теорему Бернсайда. Пусть $P = \langle x \rangle$. Если $x \in Z(G)$, то лемма верна. Если же $\varphi(x) = 0$, то по следствию 1 p делит $\varphi(1)$, что опять противоречит условию леммы.

Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Если группа $G = PO_{p'}(G)$, где P – подгруппа порядка p в G , имеет точный неприводимый характер φ степени q^r , где $q^{r_1} \not\equiv -1, 0, 1 \pmod{p}$ для всех $0 < r_1 \leq r$, то $P \trianglelefteq G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Q есть P -инвариантная силовская q -подгруппа из $O_{p'}(G)$ и $G_1 = PQ$. Известно, что $Q = [P, Q]C_Q(P)$. Покажем, что $[P, Q] = 1$. Предположим, что это не так, т.е. $[P, Q] \neq 1$.

Пусть $Z = Z(Q)$. Тогда $P \subseteq N_G(Z)$ и $Z = [P, Z] \times C_Z(P)$. Пусть $g \in Z$. Поскольку $|Cl(g)|$ есть q' -число для всех $g \in Z$ и по условию леммы $\varphi(1) = q^r$, то $(\varphi(1), |Cl(g)|) = 1$. Тогда $g \in Z(G)$ или $\varphi(g) = 0$. Очевидно, $\varphi(g) = 0$ для всех $g \in [P, Z]^\#$. Предположим, что $[P, Z] \neq 1$. Тогда по теореме 4.2.7 из [9] $\varphi_{[P, Z]} = k\rho_{[P, Z]}$, где $k \in \mathbb{N}$ и $\rho_{[P, Z]}$ есть регулярный характер подгруппы $[P, Z]$. Значит,

$$\varphi(1) = k\rho(1) = k|[P, Z]| = kq^{\alpha_1},$$

что приводит к противоречию с условием леммы, ибо $q^{\alpha_1} \equiv 1 \pmod{p}$ и $0 < \alpha_1 \leq r$. Поэтому $[P, Z] = 1$ и, следовательно, $Z \subseteq Z(G_1)$. Так как по предположению $[P, Q] \neq 1$, то заключаем, что $Z = Z(G_1)$.

Рассмотрим характер

$$\varphi_{G_1} = \sum_{i=1}^t \alpha_i \varphi_i, \quad (1)$$

где $\varphi_i \in \text{Irr}(G_1)$ и $\alpha_i = (\varphi_{G_1}, \varphi_i)_{G_1} \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, t$.

Легко видеть, что

$$\varphi_i(1) \in \{1, p, pq^{\alpha'_i}, q^{\beta'_i}\}, \quad (2)$$

где $\alpha'_i > 0$, $\beta'_i > 0$, $i = 1, \dots, t$. Поскольку $Z = Z(G_1)$, то

$$(\varphi_i)_Z = \varphi_i(1)\lambda_i, \quad (3)$$

где $\lambda_i \in \text{Irr}(Z)$, $i = 1, \dots, t$, и, следовательно,

$$(\varphi_Z) = \left(\sum_{i=1}^t \alpha_i \varphi_i \right)_Z = \sum_{i=1}^t \alpha_i (\varphi_i)_Z = \sum_{i=1}^t \alpha_i \varphi_i(1) \lambda_i. \quad (4)$$

Далее, $[P, Q] \trianglelefteq Q$ и так как $[P, Q] \neq 1$, то $L = [P, Q] \cap Z \neq 1$. Значит, существует элемент $g \in L$ такой, что $o(g) = q$. Тогда согласно утверждениям (3), (4) имеем, что

$$(\varphi_i)_{\langle g \rangle} = \varphi_i(1) (\lambda_i)_{\langle g \rangle} \quad (5)$$

для всех $i = 1, \dots, t$ и

$$\varphi_{\langle g \rangle} = \sum_{i=1}^t \alpha_i \varphi_i(1) (\lambda_i)_{\langle g \rangle}. \quad (6)$$

Как отмечено выше, возможны два случая: $g \in Z(G)$ или $\varphi(g) = 0$. Покажем, что в каждом из этих случаев существуют неприводимые характеры $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s$, входящие в разложение (1) характера φ_{G_1} , такие, что

$$\varphi_i(1) = q^{\beta'_i} > 1, \quad i = 1, \dots, s. \quad (7)$$

Пусть сначала $g \in Z(G)$. Тогда $\varphi(g) = \varphi(1) \lambda^*(g)$ и поскольку характер φ точный, то $\lambda^* \in \text{Irr}(\langle g \rangle)^\#$. Следовательно, в равенствах (5), (6)

$$(\lambda_i)_{\langle g \rangle} = \lambda^* \neq 1_{\langle g \rangle}, \quad i = 1, \dots, t. \quad (8)$$

Пусть в рассматриваемом случае в равенстве (5) $\varphi_k(1) = 1$ для некоторого $1 \leq k \leq t$. Тогда

$$(\varphi_k)_{\langle g \rangle} = (\lambda_k)_{\langle g \rangle} = 1_{\langle g \rangle},$$

поскольку $g \in [P, Q] \subseteq G'_1 \subseteq \text{Кер } \varphi_k$. Противоречие. Значит, $\varphi_i(1) \neq 1$ для всех $i = 1, \dots, t$. Тогда из выражения (2) имеем, что

$$\varphi_i(1) \in \{p, pq^{\alpha'_i}, q^{\beta'_i}\} \quad (9)$$

для всех $i = 1, \dots, t$. Предположим, что среди степеней неприводимых компонент φ_i , $i = 1, \dots, t$, характера φ_{G_1} нет q -чисел. Тогда

$$\varphi_i(1) \in \{p, pq^{\alpha'_i}\} \quad (10)$$

для всех $i = 1, \dots, t$. Отсюда и из выражения (1) вытекает, что

$$\varphi(1) = \sum_{i=1}^t \alpha_i \varphi_i(1) = \sum_{i=1}^{t_1} \alpha_i p + \sum_{i=t_1+1}^t \alpha_i pq^{\alpha'_i} = p \left(\sum_{i=1}^{t_1} \alpha_i + \sum_{i=t_1+1}^t \alpha_i q^{\alpha'_i} \right).$$

Получаем, что p делит $\varphi(1)$, что противоречит условию доказываемой леммы. Это противоречие указывает на то, что наше предположение о несуществовании неприводимых компонент $\varphi_i, i = 1, \dots, t$, характера φ_{G_1} , степени которых есть q -числа, ошибочно.

Итак, в случае $g \in Z(G)$ справедливость соотношения (7) установлена.

Пусть теперь $\varphi(g) = 0$. Тогда по лемме 2 $\alpha_\varphi = \beta_\varphi$, где $\beta_\varphi = (\varphi_{\langle g \rangle}, \lambda^*)_{\langle g \rangle}$ и λ^* есть некоторый фиксированный неглавный неприводимый характер подгруппы $\langle g \rangle$. Используя равенство (6), вычислим β_φ :

$$\begin{aligned} \beta_\varphi &= (\varphi_{\langle g \rangle}, \lambda^*) = \left(\sum_{i=1}^t \alpha_i \varphi_i(1) (\lambda_i)_{\langle g \rangle}, \lambda^* \right)_{\langle g \rangle} \\ &= \sum_{i=1}^t \alpha_i \varphi_i(1) ((\lambda_i)_{\langle g \rangle}, \lambda^*)_{\langle g \rangle} = \sum_{i=1}^{t_2} \alpha_i \varphi_i(1), \end{aligned}$$

где $\varphi_i, i = 1, \dots, t_2$, — характеры такие, что

$$(\varphi_i)_{\langle g \rangle} = \varphi_i(1) (\lambda_i)_{\langle g \rangle} = \varphi_i(1) \lambda^*. \quad (11)$$

Поскольку $g \in G'_1$ и $\lambda^* \neq 1_{\langle g \rangle}$, то $\varphi_i(1) \neq 1$ для всех $i = 1, \dots, t_2$. Поэтому для $\varphi_i(1), i = 1, \dots, t_2$, выполняется утверждение (9). Предположим, что $\varphi_i(1), i = 1, \dots, t_2$, удовлетворяют соотношению (10). Тогда

$$\beta_\varphi = \sum_{i=1}^{t_2} \alpha_i \varphi_i(1) = rp$$

для некоторого $r \in \mathbb{N}$. Отсюда и из леммы 2 получаем, что

$$\varphi(1) = \alpha_\varphi + \beta_\varphi(q-1) = (\alpha_\varphi - \beta_\varphi) + \beta_\varphi q = \beta_\varphi q = rpq.$$

Это противоречит тому, что $\varphi(1)$ есть p' -число. Следовательно, среди чисел $\varphi_i(1), i = 1, \dots, t_2$, есть q -числа. Как видим, и в случае $\varphi(g) = 0$ соотношение (7) имеет место.

Применив к характерам из соотношения (7) лемму 4, получим

$$[P, Q] \subseteq \bigcap_{i=1}^s (\text{Ker } \varphi_i \cap Q) = \left(\bigcap_{i=1}^s \text{Ker } \varphi_i \right) \cap Q = L_1.$$

Поскольку $L \subseteq [P, Q]$, то $L \subseteq L_1$. Тогда $g \in L_1$, т.е. $g \in \text{Ker } \varphi_i, i = 1, \dots, s$. Отсюда имеем $(\varphi_i)_{\langle g \rangle} = \varphi_i(1) 1_{\langle g \rangle}, i = 1, \dots, s$, т.е. $(\lambda_i)_{\langle g \rangle} = 1_{\langle g \rangle}, i = 1, \dots, s$. Получили противоречие с равенствами (8), если $g \in Z(G)$, и с равенствами (11), если $\varphi(g) = 0$. Поэтому $L_1 = L = 1$ и, следовательно, $[P, Q] = 1$.

Поскольку $[P, Q] = 1$, т.е. $Q \subseteq C_G(P)$, то для всех $x \in P$ имеем, что $(\varphi(1), |Cl(x)|) = 1$. Тогда по теореме Бернсайда для всех $x \in G$ либо $\varphi(x) = 0$, либо $x \in Z(G)$. При выполнении первого утверждения мы получим противоречие условия леммы со следствием 1, а при выполнении второго — ее доказательство.

3. Доказательство теоремы. Проведем индукцию по $|G|$.

Обозначим S_Π -подгруппу группы G через H , $S_{\Pi'}$ -подгруппу группы G через M и $S_{\pi(n)}$ -подгруппу группы G , существующую по условию А теоремы, через R . Пусть также X есть максимальная собственная нормальная подгруппа группы G .

Предположим вначале, что $|G : X|$ есть Π' -число. По теореме Клиффорда

$$\varphi_X = e \sum_{i=1}^t \varphi_i,$$

где $\varphi_{i=1, \dots, t} \in \text{Irr}(X)$ и e, t — числа, делящие $|G : X|$. Поскольку числа $\varphi_{i=1, \dots, t}(1)$ делят $\varphi(1)$ и подгруппы

$$R \text{Ker } \varphi_i / \text{Ker } \varphi_i \simeq R / R \cap \text{Ker } \varphi_i, \quad i = 1, \dots, t,$$

абелевы, то группы $X / \text{Ker } \varphi_i, i = 1, \dots, t$, удовлетворяют условию теоремы. Так как $|X / \text{Ker } \varphi_i| < |G|, i = 1, \dots, t$, то согласно индукции

$$H \text{Ker } \varphi_i / \text{Ker } \varphi_i \trianglelefteq X / \text{Ker } \varphi_i, \quad i = 1, \dots, t,$$

т.е. $H \text{Ker } \varphi_i \trianglelefteq X, i = 1, \dots, t$. Следовательно,

$$H = \bigcap_{i=1}^t (H \text{Ker } \varphi_i) \trianglelefteq X,$$

т.е. $H \trianglelefteq G$. Абелевость подгруппы H вытекает из точности характера φ и того, что $\varphi(1)$ есть Π' -число. Итак, если $|G : X|$ есть Π' -число, то теорема верна.

Пусть теперь $|G : X|$ есть Π -число. Рассмотрим вначале случай, когда S_Π -подгруппа X_Π из X неединична.

Так как характер φ_X неприводим, то по индукции

$$X_\Pi = H \cap X \text{char } X \trianglelefteq G,$$

т.е. $X_\Pi \trianglelefteq G$ и подгруппа X_Π абелева. Покажем, что $|G : X| = p$ для некоторого $p \in \Pi$. Предположим противное. Пусть P есть силовская p -подгруппа группы $G, p \in \Pi$. Так как $|G : X| \neq p$ по предположению и X есть максимальная собственная нормальная подгруппа группы G , то $PX \neq G$. Очевидно, подгруппа PX удовлетворяет условиям теоремы и по индукции по $|G|$ ее утверждениям, т.е. $PX_\Pi \trianglelefteq PX$ и подгруппа PX_Π абелева. Следовательно, $P \subseteq C_G(X_\Pi)$ для всех $p \in \Pi$. Значит, $H \subseteq C_G(X_\Pi)$. Так как $C_G(X_\Pi) \trianglelefteq G$ и $|G : C_G(X_\Pi)|$ по выше установленному факту не может быть Π' -числом, то $C_G(X_\Pi) = G$, т.е. $X_\Pi \subseteq Z(G)$. Из абелевости подгруппы P для всех $p \in \Pi$ и из [10, теорема 5.6] вытекает, что p не делит $|G' \cap X_\Pi|$ для всех $p \in \pi(X_\Pi)$. Следовательно, $G' \neq G$, и так как группа G не содержит нормальных подгрупп, индекс которых в G есть Π' -число, то $|G : G'|$ есть Π -число. Можем считать, что $G' \subseteq X$ и, следовательно, $|G : X| = p$ для некоторого $p \in \Pi$.

Пусть λ есть линейная неприводимая компонента характера φ_{X_Π} и $T = I_G(\lambda)$. Предположим, что $T = G$. Тогда $\varphi_{X_\Pi} = \varphi(1)\lambda$, т.е. $\varphi(x) = \varphi(1)\lambda(x)$ для всех $x \in X_\Pi$. Значит, $X_\Pi \subseteq Z(\varphi) = Z(G)$ и $X = X_\Pi \times M$, т.е. $M \trianglelefteq G$. Согласно [7, лемма 2] группа G имеет неприводимый характер ψ такой, что $\psi(1) = \varphi(1)$ и $X_\Pi = \text{Ker } \psi$. По индукции

$$H \text{Ker } \psi / \text{Ker } \psi \trianglelefteq G / \text{Ker } \psi,$$

т.е. $H \text{Ker } \psi \trianglelefteq G$, и поскольку $\text{Ker } \psi \subseteq H$, то $H \trianglelefteq G$. Абелевость подгруппы H очевидна.

Пусть теперь $T \neq G$. По теореме 6.11 из [10] существует характер $\xi \in \text{Irr}(T)$ такой, что $\varphi = \xi^G$ и

$$(\xi_{X_\Pi}, \lambda)_{X_\Pi} \neq 0.$$

Поскольку $\varphi(1) = \xi(1)|G : T|$ есть Π' -число, можем считать, что $H \subseteq T$. Значит, $MT = G$, т.е. $M \cap T$ есть $S_{\Pi'}$ -подгруппа из T .

Обозначим $I = I_X(\lambda)$. Легко видеть, что $I = X_\Pi(M \cap T)$. Тогда из [10, лемма 13.3] вытекает, что существует единственное продолжение $\mu \in \text{Irr}(I)$ характера λ такое, что

$$M \cap T \subseteq \text{Ker}(\det \mu),$$

и так как $\det \mu = \mu$ (см. [10, упр. 2.3]), то $M \cap T \subseteq \text{Ker } \mu$. Это означает, что $\mu_{M \cap T} = 1_{M \cap T}$. Отсюда, а также из того, что

$$X = X_\Pi M = X_\Pi(M \cap T)M = IM$$

и [10, упр. 5.2] вытекает, что

$$(\mu^X)_M = (\mu^{IM})_M = (\mu_{I \cap M})^M = (\mu_{X_\Pi(M \cap T) \cap M})^M = (\mu_{M \cap T})^M = (1_{M \cap T})^M.$$

Но так как

$$((1_{M \cap T})^M, 1_M)_M \neq 0,$$

из последнего выражения следует, что

$$((\mu^X)_M, 1_M)_M \neq 0. \quad (12)$$

По теореме 6.11 из [10] $\mu^X \in \text{Irr}(X)$. Далее, характер $\mu^G = (\mu^X)^G$ является либо неприводимым, либо приводимым.

Предположим сначала, что $\mu^G \in \text{Irr}(G)$. По соответствию Фробениуса для характеров имеем, что

$$(\mu^G, \mu^G)_G = ((\mu^G)_I, \mu)_I \neq 0.$$

Так как $\mu_{X_\Pi} = \lambda$, то

$$((\mu^G)_{X_\Pi}, \lambda)_{X_\Pi} \neq 0.$$

Следовательно,

$$(\mu^G, \lambda^G)_G \neq 0.$$

Отсюда и из соответствия Фробениуса для характеров вытекает, что

$$(\mu^G, \lambda^G)_G = (((\mu^G)_H)_{X_\Pi}, \lambda)_{X_\Pi} = (((\mu^G)_H, \lambda^H))_H \neq 0. \quad (13)$$

Поскольку $|H : X_\Pi| = |G : X| = p$ и $H \subseteq T$, то характер λ^H приводим и все его неприводимые компоненты линейны. Пусть τ есть одна из общих неприводимых компонент характеров $(\mu^G)_H$ и λ^H , существующих согласно соотношению (13). Значит,

$$((\mu^G)_H, \tau)_H = (\mu^G, \tau^G)_G \neq 0. \quad (14)$$

С другой стороны, из неравенства (12) вытекает, что

$$\begin{aligned} 0 \neq ((\mu^X)_M, 1_M)_M &\leq \sum_{x \in G/X} (((\mu^X)^x)_M, 1_M)_M = \left(\left(\sum_{x \in G/X} (\mu^X)^x \right)_M, 1_M \right)_M \\ &= (((\mu^G)_X)_M, 1_M)_M = ((\mu^G)_M, 1_M)_M = (\mu^G, 1_M^G)_G. \end{aligned}$$

Отсюда, из соотношения (14) и из [8, теорема 2] следует, что $\mu^G(1)$ является Π' -числом. Но тогда

$$\mu^G(1) = |G : I| = |G : X_\Pi(M \cap T)| = \frac{|H||M|}{|X_\Pi||M \cap T|} = p|M : M \cap T|$$

делится на $p = |H : X_\Pi|$. Противоречие.

Пусть теперь характер μ^G не является неприводимым. Значит,

$$\mu^G = \sum_{i=1}^p \psi_i, \quad \psi_{i=1, \dots, p} \in \text{Irr}(G).$$

Очевидно, что $(\psi_k)_X = \mu^X$ для некоторого $1 \leq k \leq p$. Тогда

$$\begin{aligned} \psi_k(1) &= \mu^X(1) = \mu(1)|X : I| = |X : X_\Pi(M \cap T)| \\ &= |X_\Pi M : X_\Pi(M \cap T)| = |M : M \cap T|, \\ \varphi(1) &= \xi(1)|G : T| = \xi(1)|HM : H(M \cap T)| = \xi(1)|M : M \cap T|, \end{aligned}$$

т.е. получаем, что $\psi_k(1)$ делит $\varphi(1)$. Далее, из соотношения (12) получаем, что

$$((\mu^X)_M, 1_M)_M = (((\psi_k)_X)_M, 1_M)_M = ((\psi_k)_M, 1_M)_M = (\psi_k, (1_M)^G)_G \neq 0.$$

Ясно, что отсюда

$$(\overline{\psi}_k, (1_{\overline{M}})^{\overline{G}})_{\overline{G}} \neq 0,$$

где $\overline{G} = G/K$, $\overline{M} = MK/K$, $K = \text{Ker } \psi_k$ и $\overline{\psi}_k \in \text{Irr}(\overline{G})$ есть характер, соответствующий характеру ψ_k группы G . Мы показали, что группа $\overline{G}$ и характер $\overline{\psi}_k$ удовлетворяют

условию теоремы 3 из [8]. По этой теореме $HK/K \trianglelefteq G/K$. Отсюда $HK \trianglelefteq G$. Поскольку $(\psi_k)_X = \mu^X$, то

$$K \cap X \subseteq \text{Ker } \mu \subseteq I = X_{\Pi}(M \cap T).$$

Пусть $M \subseteq K$. Но $M \subseteq X$. Тогда из последних включений получаем, что $M \subseteq M \cap T$, т.е. $M \subseteq T$. Так как $H \subseteq T$, то $G = HM \subseteq T$, т.е. $T = G$. В этом случае, как мы убедились, теорема верна. Следовательно, $M \not\subseteq K$ и $HK \neq G$. Это противоречит тому, что группа G не содержит нормальную подгруппу, индекс которой в G есть P' -число. Итак, в случае $X_{\Pi} \neq 1$ теорема верна.

Пусть теперь $X_{\Pi} = 1$. Тогда $X = M$. Рассмотрим подгруппу P_0X , где $|P_0| = p \in \Pi$. Поскольку характер φ_{P_0X} неприводим, то по леммам 5 и 6 получаем, что $P_0 \trianglelefteq P_0X$, т.е. $P_0 \subseteq C_G(X) \trianglelefteq G$. Из максимальности подгруппы X в группе G имеем, что $C_G(X) = G$, т.е. $X = M \subseteq Z(G)$. Это означает, что $H \trianglelefteq G$. Абелевость подгруппы H установлена выше.

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ito N. On the theorem of N. F. Blichfeldt // Nagoya Math. J. 1953. V. 15. P. 75–77.
- [2] Winter D. L. On finite solvable linear groups // Ill. J. Math. 1971. V. 15. № 3. P. 425–428.
- [3] Winter D. L. Solvability of certain p -solvable linear groups of finite order // Pacific J. Math. 1970. V. 34. № 3. P. 827–835.
- [4] Winter D. L. On the structure of certain p -solvable linear groups // J. Algebra. 1974. V. 31. № 3. P. 543–546.
- [5] Isaacs I. M. Complex p -solvable linear groups // J. Algebra. 1973. V. 24. № 3. P. 513–530.
- [6] Isaacs I. M. The Santa Cruz conference on finite groups // Proc. Symp. Pure Math. 1980. V. 37. P. 377–384.
- [7] Романовский А. В., Ядченко А. А. О силовских подгруппах линейных групп // Матем. сб. 1988. Т. 137(179). № 4(12). С. 568–573.
- [8] Романовский А. В., Ядченко А. А. Мономиальные характеры и нормальные подгруппы конечных групп // Укр. матем. ж. 1991. Т. 43. № 78. С. 991–996.
- [9] Gorenstein D. Finite Groups. New York: Harper and Row, 1968.
- [10] Isaacs I. M. Character Theory of Finite Groups. New York: Acad. Press, 1976.

Институт математики НАН Беларуси, г. Гомель
E-mail: goim@nauka.belpak.gomel.by

Поступило
12.07.1999
Исправленный вариант
08.06.2000