В. А. Кыров, Критерий невырожденности группы преобразований,
Матем. заметки, 2009, том 85, выпуск 1, 144–146

https://www.mathnet.ru/mzm4993

Критерий невырожденности группы преобразований

В. А. Кыров

1. Введение. Рассмотрим $n(n+1)/2$-параметрическую локальную группу Ли локальных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$:

$$x_1' = \varphi_1(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_{n(n+1)/2}), \quad \dots, \quad x_n' = \varphi_n(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_{n(n+1)/2}),$$

причем нулевым значениям параметров $a_1, \dots, a_{n(n+1)/2}$ соответствует тождественное преобразование. Базис ее алгебры Ли образуют [1] операторы

$$X_\mu = \lambda_\mu^1(x_1, \dots, x_n)\partial_{x_1} + \dots + \lambda_\mu^n(x_1, \dots, x_n)\partial_{x_n}, \tag{1}$$

где $\mu = 1, \dots, n(n+1)/2$. Двухточечным инвариантом группы преобразований является интеграл системы дифференциальных уравнений [1]:

$$X_\mu(i)f(ij) + X_\mu(j)f(ij) = 0, \qquad \mu = 1, \dots, \frac{n(n+1)}{2}\,. \tag{2}$$

Определение. $n(n+1)/2$-параметрическая локальная группа Ли локальных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$ называется *невырожденной*, если ее двухточечный инвариант имеет открытую и плотную область определения $N \subset R^{2n}$ и удовлетворяет условию невырожденности

$$\frac{\partial(f(ii_1), \dots, f(ii_n))}{\partial(x_1(i), \dots, x_n(i))} \neq 0, \qquad \frac{\partial(f(i_1 i), \dots, f(i_n i))}{\partial(x_1(i), \dots, x_n(i))} \neq 0, \tag{3}$$

где $x_1(i), \dots, x_n(i)$ – координаты точки i, для открытого и плотного множества кортежей $n+1$ точек $\langle ii_1 \dots i_n\rangle$ и $\langle i_1 \dots i_n i\rangle$ из $(\mathbb{R}^n)^{n+1}$, причем пары $\langle ii_1\rangle, \dots, \langle ii_n\rangle, \langle i_1 i\rangle, \dots, \langle i_n i\rangle \in \mathbb{N}$ [2], [3].

В данной работе доказывается критерий, позволяющий по базисным операторам алгебры Ли установить невырожденность ей соответствующей локальной группы Ли локальных преобразований.

Теорема. *Локальная $n(n+1)/2$-параметрическая группа Ли локальных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$ с базисными операторами (1) является невырожденной тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} M_{11}(ii_1) & M_{12}(ii_1) & \cdots & M_{1n}(ii_1) \\ M_{11}(ii_2) & M_{12}(ii_2) & \cdots & M_{1n}(ii_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{11}(ii_n) & M_{12}(ii_n) & \cdots & M_{1n}(ii_n) \end{vmatrix} \neq 0, \tag{4}$$

для открытого и плотного множества кортежей $n+1$ точек $\langle ii_1 \dots i_n\rangle$ из $(\mathbb{R}^n)^{n+1}$, пары $\langle ii_1\rangle, \dots, \langle ii_n\rangle \in N$, $M_{11}, \dots, M_{1n}$ – миноры определителя

$$\begin{vmatrix} z^1 & \cdots & z^n & z^{n+1} & \cdots & z^{2n} \\ \lambda_1^1(i) & \cdots & \lambda_1^n(i) & \lambda_1^1(j) & \cdots & \lambda_1^n(j) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{2n-1}^1(i) & \cdots & \lambda_{2n-1}^n(i) & \lambda_{2n-1}^1(j) & \cdots & \lambda_{2n-1}^n(j) \end{vmatrix},$$

получаемые в пересечении 1-й строки и столбца под номером $k = 1, \dots, n$.

Поставленная задача возникает в теории физических структур при классификации феноменологически симметричных геометрий, т.е. геометрий с невырожденными двухточечными инвариантами (метрическими функциями). Теорема позволяет из набора алгебр Ли $n(n+1)/2$-параметрических групп Ли преобразований пространства $\mathbb{R}^n$ сразу выделить те, которые допускают невырожденный двухточечный инвариант (метрическая функция феноменологически симметричной, т.е. искомой геометрии).

2. Доказательство теоремы. Возьмем $n(n+1)/2$-параметрическую локальную группу Ли локальных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$ с базисными операторами (1). Уравнения инвариантности (2) записываются так:

$$\lambda^1_\mu(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial x_1(i)}+\cdots+\lambda^n_\mu(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial x_n(i)}+\lambda^1_\mu(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial x_1(j)}+\cdots+\lambda^n_\mu(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial x_n(j)}=0,$$

где $\mu=1,\dots,n(n+1)/2$. Матрица этой системы имеет размерность $(n(n+1)/2)\times 2n$, причем ее ранг равен $2n-1$. Поэтому первые $2n-1$ уравнений можно считать функционально независимыми, в противном случае необходимое число уравнений выделяется перенумерацией [2], [3]. Выделенная система $2n-1$ уравнений в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ координат $x_1(i)\dots x_n(i)x_1(j)\dots x_n(j)$ рассматривается как $2n-1$ скалярных произведений

$$(\vec M\cdot\vec F_1)=0,\quad \dots,\quad (\vec M\cdot\vec F_{2n-1})=0,$$

$$\vec M=\left(\frac{\partial f(ij)}{\partial x_1(i)},\dots,\frac{\partial f(ij)}{\partial x_n(i)},\frac{\partial f(ij)}{\partial x_1(j)},\dots,\frac{\partial f(ij)}{\partial x_n(j)}\right),$$

$$\vec F_\nu=(\lambda^1_\nu(i),\dots,\lambda^n_\nu(i),\lambda^1_\nu(j),\dots,\lambda^n_\nu(j)),$$

где $\nu=1,\dots,2n-1$. Заметим, что векторы $\vec F_1,\dots,\vec F_{2n-1}$ линейно независимы в каждой точке некоторого открытого и плотного подмножества из $\mathbb{R}^{2n}$, поскольку иначе им соответствующие базисные операторы из (1) будут линейно зависимыми в этом множестве, что недопустимо.

Рассмотрим $2n-1$ векторов $\vec a_1=(a^1_1,\dots,a^{2n}_1),\dots,\vec a_{2n-1}=(a^1_{2n-1},\dots,a^{2n}_{2n-1})$ из $\mathbb{R}^{2n}$. Под *векторным произведением* $2n-1$ векторов $\vec a_1,\dots,\vec a_{2n-1}$ в $\mathbb{R}^{2n}$ понимается вектор $\vec a=[\vec a_1,\dots,\vec a_{2n-1}]$ с координатами $\vec a=(a^1,\dots,a^{2n})$: $a^\tau=(-1)^{\tau+1}M_{1\tau}$, где $\tau=1,\dots,2n$, $M_{1\tau}$ – минор определителя

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 & \cdots & a^{2n}\\ a^1_1 & a^2_1 & \cdots & a^{2n}_1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a^1_{2n-1} & a^2_{2n-1} & \cdots & a^{2n}_{2n-1}\end{vmatrix}.$$

Лемма. *Векторное произведение $\vec a=[\vec a_1,\dots,\vec a_{2n-1}]$ линейно независимых векторов $\vec a_1=(a^1_1,\dots,a^{2n}_1),\dots,\vec a_{2n-1}=(a^1_{2n-1},\dots,a^{2n}_{2n-1})$ в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ нормально к гиперпространству, натянутому на эти векторы.*

Вернемся снова к доказательству теоремы. Из леммы следует, что компоненты вектора $\vec M$ пропорциональны компонентам векторного произведения $[\vec F_1,\dots,\vec F_{2n-1}]$, значит,

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x_1(i)}=(-1)^{1+1}\omega M_{11}(ij),\quad \dots,\quad \frac{\partial f(ij)}{\partial x_n(i)}=(-1)^{n+1}\omega M_{1n}(ij),$$
$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x_1(j)}=(-1)^{1+1}\omega M_{11}(ji),\quad \dots,\quad \frac{\partial f(ij)}{\partial x_n(j)}=(-1)^{n+1}\omega M_{1n}(ji),$$

где $\omega=\omega(x_1(i),\dots,x_n(i),x_1(j),\dots,x_n(j))$ – ненулевая гладкая функция, причем M_{1m} – минор определителя $\det|\vec a,\vec F_1,\dots,\vec F_{2n-1}|$, $m=1,\dots,n$. Подставляя выше найденные производные в (3), приходим к (4). Таким образом, если группа Ли преобразований невырождена, т.е. выполняются неравенства (3), то имеет место неравенство (4) и наоборот.

Пример. Рассмотрим группу движений евклидовой плоскости

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + c, \qquad y' = x\cos\alpha + y\sin\alpha + d.$$

Базис алгебры Ли образуют операторы $X_1 = \partial_x$, $X_2 = \partial_y$, $X_3 = -y\partial_x + x\partial_y$. Очевидно, $M_{11}(ij) = x_i - x_j$, $M_{12}(ij) = y_j - y_i$. Тогда определитель неравенства (4) равен $(x_k - x_i) \times (y_j - y_i) - (y_k - y_i)(x_j - x_i) \neq 0$. Таким образом, группа движений плоскости Евклида невырождена.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978. **[2]** Г. Г. Михайличенко, *Докл. АН СССР*, **269**:2 (1983), 284–288. **[3]** Г. Г. Михайличенко, *Полиметрические геометрии*, Редакционно-издательский центр НГУ, Новосибирск, 2001.

В. А. Кыров
Горно-Алтайский государственный университет (ГАГУ)
E-mail: kfizika@gasu.ru

Поступило
22.05.2008