Е. И. Бунина, Автоморфизмы полугруппы неотрицательных обратимых матриц порядка два над частично упорядоченными коммутативными кольцами,
Матем. заметки, 2012, том 91, выпуск 1, 3–11

Математические заметки

Том 91 выпуск 1 январь 2012

УДК 512.643+512.552.2

Автоморфизмы полугруппы неотрицательных обратимых матриц порядка два над частично упорядоченными коммутативными кольцами

Е. И. Бунина

В работе описываются автоморфизмы полугруппы неотрицательных обратимых матриц размера два над коммутативным частично упорядоченным кольцом с обратимой двойкой.

Библиография: 3 названия.

Пусть R – упорядоченное кольцо, $G_n(R)$ – подполугруппа группы $\mathrm{GL}_n(R)$, состоящая из матриц с неотрицательными элементами. В работе [1] Михалев и Шаталова описали все автоморфизмы полугруппы $G_n(R)$ в случае, когда R является линейно упорядоченным телом и $n \geqslant 2$. В работе [2] Бунина и Михалев описали все автоморфизмы полугруппы $G_n(R)$, если R – произвольное линейно упорядоченное ассоциативное кольцо с $1/2$, $n \geqslant 3$. В работе [3] Бунина и Семенов описали автоморфизмы полугруппы $G_n(R)$ в случае, когда R является коммутативным частично упорядоченным кольцом, содержащим $\mathbb{Q}$, $n \geqslant 3$.

В этой работе мы описываем автоморфизмы полугруппы $G_2(R)$ для частично упорядоченных коммутативных колец с $1/2$. Полное описание (совпадающее с описанием при $n \geqslant 3$) получается для кольца, в котором каждый элемент является суммой конечного числа обратимых.

1. Необходимые определения и понятия, формулировка основной теоремы. Пусть R – ассоциативное (коммутативное) кольцо с 1.

Определение 1. Кольцо R называется *частично упорядоченным*, если на нем задано отношение частичного порядка $\leqslant$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\forall x, y, z \in R\ (x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z)$;

2) $\forall x, y \in R\ (0 \leqslant x \wedge 0 \leqslant y \Rightarrow 0 \leqslant xy)$.

Мы будем рассматривать такие частично упорядоченные кольца, в которых $1/2 \geqslant 0$.

Такие элементы r кольца R, для которых $0 \leqslant r$, называются *неотрицательными*. Множество всех неотрицательных элементов кольца R обозначается через R_+.

Определение 2. Пусть R – частично упорядоченное кольцо. Через $G_n(R)$ обозначается подполугруппа группы $\mathrm{GL}_n(R)$, состоящая из всех матриц с неотрицательными элементами.

Множество всех обратимых элементов кольца R обозначается через R^*. Если $1/2 \in R$, то множество R^* бесконечно, так как оно содержит все $1/2^n$ для $n \in \mathbb{N}$. Множество $R_+ \cap R^*$ обозначается через R_+^*. Если $1/2 \in R$, то оно также бесконечно.

Определение 3. Пусть $I = I_2$, $\Gamma_2(R)$ – группа, состоящая из всех обратимых в $G_2(R)$ матриц, $\Sigma_2 = \{e, (12)\}$ – симметрическая группа порядка 2, S_σ – матрица перестановки $\sigma \in \Sigma_2$, в нашем случае таких матриц всего две: I и $S = S_{(12)}$; $S_2 = \{S_\sigma \mid \sigma \in \Sigma_n\} = \{I, S\}$, $\mathrm{diag}[d_1, d_2]$ – диагональная матрица с элементами d_1, d_2 на диагонали, $d_1, d_2 \in R_+^*$. Через $D_2(R)$ обозначим группу всех обратимых диагональных матриц из $G_2(R)$.

Определение 4. Если $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ – подмножества в $G_2(R)$, то положим

$$C_{\mathscr{A}}(\mathscr{B}) = \{a \in \mathscr{A} \mid \forall b \in \mathscr{B}\, (ab = ba)\}.$$

Пусть E_{ij} – матричная единица.

Определение 5. Через $B_{ij}(x)$, $i \neq j$, обозначим матрицу $I + xE_{ij}$. Через $\mathbf{P}$ обозначаем подполугруппу в $G_2(R)$, порожденную матрицами S, $B_{ij}(x)$ ($x \in R_+$, $i \neq j$) и $\mathrm{diag}[\alpha_1, \alpha_2] \in D_2(R)$.

Определение 6. Две матрицы $A, B \in G_2(R)$ называются *$\mathscr{P}$-эквивалентными* (см. [1]), если существуют матрицы $A_j \in G_2(R)$, $j = 0, \dots, k$, $A = A_0, B = A_k$, и матрицы $P_i, \widetilde{P}_i, Q_i, \widetilde{Q}_i \in \mathbf{P}$, $i = 0, \dots, k-1$, такие, что $P_i A_i \widetilde{P}_i = Q_i A_{i+1} \widetilde{Q}_i$.

Определение 7. Через $\mathrm{GE}_2^+(R)$ обозначим подполугруппу в $G_2(R)$, порожденную всеми матрицами, $\mathscr{P}$-эквивалентными матрицам из $\mathbf{P}$.

Определение 8. Если G – некоторая полугруппа, то гомоморфизм $\lambda(\,\cdot\,)\colon G \to G$ называется *центральным гомоморфизмом* G, если $\lambda(G) \subset Z(G)$. Отображение $\Omega(\,\cdot\,)\colon G \to G$ такое, что $\forall X \in G$

$$\Omega(X) = \lambda(X) \cdot X,$$

где $\lambda(\,\cdot\,)$ – центральный гомоморфизм, называется *центральной гомотетией.*

Для каждой матрицы $M \in \Gamma_2(R)$ пусть Φ_M обозначает автоморфизм полугруппы $G_2(R)$ такой, что $\forall X \in G_2(R)$ $\Phi_M(X) = MXM^{-1}$. Для каждого $y(\,\cdot\,) \in \mathrm{Aut}(R_+)$ через Φ^y обозначим автоморфизм полугруппы $G_2(R)$ такой, что $\forall X = (x_{ij}) \in G_2(R)$ $\Phi^y(X) = \Phi^y((x_{ij})) = (y(x_{ij}))$.

Основным результатом этой работы является следующая

Теорема. *Пусть Φ – автоморфизм полугруппы $G_2(R)$, $1/2 \in R$, R – коммутативное частично упорядоченное кольцо, для которого R_+ порождается неотрицательными обратимыми элементами кольца R. Тогда на полугруппе $\mathrm{GE}_2^+(R)$*

$$\Phi = \Phi_M \circ \Phi^c \circ \Omega,$$

где $M \in \Gamma_2(R)$, $c(\,\cdot\,) \in \mathrm{Aut}(R_+)$, а $\Omega(\,\cdot\,)$ – центральная гомотетия полугруппы $\mathrm{GE}_2^+(R)$.

2. Построение автоморфизма Φ'. В этом пункте мы предполагаем, что фиксирован некоторый автоморфизм $\Phi \in \mathrm{Aut}(G_2(R))$, $1/2 \in R$, и с помощью него строим новый автоморфизм $\Phi' \in \mathrm{Aut}(G_2(R))$ такой, что $\Phi' = \Phi_{M'} \circ \Phi$ для некоторой матрицы $M' \in \Gamma_2(R)$ и $\Phi'(S) = S$.

Лемма 1 [3]. *Имеем* $\forall x, y \in R_+$ $(x + y = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge y = 0)$.

Лемма 2 (ср. с леммой 2 работы [3]). *Если* Φ – *автоморфизм полугруппы* $G_2(R)$, $1/2 \in R$, *то*

1) $\Phi(\Gamma_2(R)) = \Gamma_2(R)$,
2) $\Phi(D_2(R)) = D_2(R)$.

Доказательство. 1) Так как $\Gamma_2(R)$ является подгруппой всех обратимых матриц полугруппы $G_2(R)$, то $\Phi(\Gamma_2(R)) = \Gamma_2(R)$.

2) Рассмотрим множество $\mathscr{F}$ всех матриц $A \in \Gamma_2(R)$, коммутирующих со всеми матрицами, сопряженными к A.

Рассмотрим
$$B = \mathrm{diag}[\alpha_1, \alpha_2] \in D_2(R).$$
Пусть
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \Gamma_2(R), \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix} \in \Gamma_2(R).$$
Имеем
$$\sum_{k=1}^{2} a'_{ik} \cdot a_{kj} = 0 \qquad \text{для} \quad i \neq j.$$
Значит, $a'_{ik} \cdot a_{kj} = 0$ для $i \neq j$ (по лемме 1). Тогда $A^{-1}BA \in D_2(R)$ – диагональная матрица, поэтому $D_2(R) \subset \mathscr{F}$.

Пусть существует матрица $C \in \mathscr{F} \setminus D_2(R)$,
$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$
Сопряжем C с помощью матрицы $\mathrm{diag}[d, 1]$. Сопряженная матрица (C') имеет вид
$$C' = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}d^{-1} \\ c_{21}d & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Использовав соотношение $CC' = C'C$, получаем $c_{11}^2 + c_{12}c_{21}d = c_{11}^2 + c_{21}c_{12}d^{-1}$. Если взять $d = 2$, то получим
$$0 = 3 \cdot (c_{12}c_{21}) = c_{12}c_{21} + c_{12}c_{21} + c_{12}c_{21},$$
откуда $c_{12}c_{21} = 0$. Пусть
$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}.$$
Тогда
$$0 = \gamma_{11}c_{12} + \gamma_{12}c_{22},$$

откуда
$$\gamma_{11}c_{12}=0.$$
Кроме того,
$$1=\gamma_{11}c_{11}+\gamma_{12}c_{21}.$$
Домножив это равенство на c_{12}, получим $c_{12}=0$. Аналогично, $c_{21}=0$. Таким образом, $\mathscr{F}=D_2(R)$ и, значит, $\Phi(D_2(R))=D_2(R)$.

Лемма 3. *Если Φ является автоморфизмом полугруппы $G_2(R)$, то существует матрица $M\in\Gamma_2(R)$ такая, что $\Phi_M\Phi(S)=S$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу
$$A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\Phi(S),$$
для нее $A^2=I$. Следовательно, $ab+db=0$, откуда (по лемме 1) $ab=0$. С другой стороны, $a^2+bc=1$. Домножив это равенство на a^2, получим $(a^2)^2=a^2$. Значит, a^2 является идемпотентом, а следовательно, $e_1=a^2$ и $e_2=bc$ – это ортогональные идемпотенты, в сумме дающие 1 (может быть, какой-то из этих идемпотентов нулевой). Мы знаем, что $S\cdot \mathrm{diag}[\alpha,\beta]\ne \mathrm{diag}[\alpha,\beta]\cdot S$ ни для каких обратимых $\alpha\ne\beta$ (так как сопряжение матрицей S диагональной матрицы меняет местами элементы диагонали). Значит, так как по лемме 2 диагональные матрицы переходят в диагональные, то же самое верно для матрицы A. Возьмем $\alpha=1=a^2+bc$ и $\beta=a^2/2+bc$. Тогда α и β обратимы и $A\cdot\mathrm{diag}[\alpha,\beta]=\mathrm{diag}[\alpha,\beta]\cdot A$. Значит, $\alpha=\beta$, т.е. $a^2=0$. Следовательно, $bc=1$. Так как $abc=0$, то $a=0$. Аналогично, $d=0$. Таким образом,
$$A=\begin{pmatrix} 0 & b\\ b^{-1} & 0\end{pmatrix}.$$
После сопряжения матрицы A с помощью диагональной матрицы $M^{-1}=\mathrm{diag}[b,1]$, мы получим матрицу S. Таким образом, мы нашли матрицу $M\in\Gamma_2(R)$ такую, что $\Phi_M\Phi(S)=S$.

По нашему автоморфизму Φ мы построили новый автоморфизм $\Phi'=\Phi_M\Phi$ такой, что $\Phi'(S)=S$. Предположим, что такой автоморфизм Φ' фиксирован.

Лемма 4. *В наших предположениях для любых $x_1,x_2\in R^*_+$ таких, что $x_1\ne x_2$,*
$$\Phi'(A_1)=\Phi'(\mathrm{diag}[x_1,1])=\mathrm{diag}[\xi_1,\eta_1],$$
$$\Phi'(A_2)=\Phi'(\mathrm{diag}[x_2,1])=\mathrm{diag}[\xi_2,\eta_2],$$
где $\xi_1\eta_1^{-1}\ne\xi_2\eta_2^{-1}$.

Доказательство. Предположим, что для некоторых различных $x_1,x_2\in R^*_+$ имеет место $\xi_1\eta_1^{-1}=\xi_2\eta_2^{-1}$, т.е.
$$\Phi'(A_1)=\Phi'(\mathrm{diag}[x_1,1])=\mathrm{diag}[\xi,\eta]=A_1',$$
$$\Phi'(A_2)=\Phi'(\mathrm{diag}[x_2,1])=\alpha\cdot\mathrm{diag}[\xi,\eta]=A_2'.$$
Значит, ${\Phi'}^{-1}(\alpha I)={\Phi'}^{-1}(A_1'{A_2'}^{-1})=\mathrm{diag}[x_1x_2^{-1},1]=\mathrm{diag}[\beta,1]$, где $1\ne\beta\in R^*_+$, что невозможно. Таким образом, $\xi_1\eta_1^{-1}\ne\xi_2\eta_2^{-1}$.

3. Основная теорема. В этом пункте мы докажем основную теорему.

Лемма 5. *В наших предположениях для автоморфизма* $\Phi' \in \mathrm{Aut}(G_2(R))$ *такого, что* $\Phi'(S) = S$, $\lambda \in R_+$,

$$\Phi'(B_{12}(\lambda)) = \begin{pmatrix} 1 & b_\lambda \\ c_\lambda & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{где} \quad b_\lambda c_\lambda = 0.$$

Доказательство. Имеем

$$\Phi'(B_{12}(\lambda)) = \begin{pmatrix} a_\lambda & b_\lambda \\ c_\lambda & d_\lambda \end{pmatrix} \in G_2(R).$$

Пусть для каждого $x \in R_+^*$

$$\Phi'(\mathrm{diag}[x,1]) = \mathrm{diag}[\xi(x), \eta(x))], \qquad \xi(x), \eta(x) \in R_+^*.$$

Тогда для любого $x \in (R_+)^*$

$$\begin{aligned}\Phi'(B_{12}(x\lambda)) &= \Phi'(\mathrm{diag}[x,1] B_{12}(\lambda)\,\mathrm{diag}[x^{-1},1]) \\ &= \mathrm{diag}[\xi(x), \eta(x)] \begin{pmatrix} a_\lambda & b_\lambda \\ c_\lambda & d_\lambda \end{pmatrix} \mathrm{diag}[\xi(x)^{-1}, \eta(x)^{-1}] = \begin{pmatrix} a_\lambda & \nu(x) b_\lambda \\ \nu(x)^{-1} c_\lambda & d_\lambda \end{pmatrix}\end{aligned}$$

для $\nu(x) = \xi(x)\eta(x)^{-1}$.

По лемме 4 для $x_1 \neq x_2$ имеем $\nu(x_1) \neq \nu(x_2)$. Для каждого $x \in R_+$ $\Phi'(B_{12}(\lambda))$ и $\Phi'(B_{12}(x\lambda))$ коммутируют. Напишем это условие в матричной форме для $x \in (R_+)^*$:

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} a_\lambda & b_\lambda \\ c_\lambda & d_\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\lambda & \nu(x) b_\lambda \\ \nu(x)^{-1} c_\lambda & d_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_\lambda & \nu(x) b_\lambda \\ \nu(x)^{-1} c_\lambda & d_\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\lambda & b_\lambda \\ c_\lambda & d_\lambda \end{pmatrix} \\ \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_\lambda^2 + \dfrac{b_\lambda c_\lambda}{\nu(x)} & \nu(x) a_\lambda b_\lambda + b_\lambda d_\lambda \\ a_\lambda c_\lambda + \dfrac{c_\lambda d_\lambda}{\nu(x)} & \nu(x) c_\lambda b_\lambda + d_\lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_\lambda^2 + \nu(x) b_\lambda c_\lambda & a_\lambda b_\lambda + \nu(x) b_\lambda d_\lambda \\ \dfrac{a_\lambda c_\lambda}{\nu(x)} + c_\lambda d_\lambda & \dfrac{b_\lambda c_\lambda}{\nu(x)} + d_\lambda^2 \end{pmatrix}.\end{gathered}$$

Следовательно, $\nu(x)^{-1} b_\lambda c_\lambda = \nu(x) b_\lambda c_\lambda$ для различных $x \in R_+^*$. Так как в том числе $\nu(x) = 2$ для некоторого x, то

$$0 = \frac{3}{2} b_\lambda c_\lambda = \frac{1+1+1}{2} b_\lambda c_\lambda,$$

откуда $b_\lambda c_\lambda = 0$.

Используем условие $(B_{12}(\lambda))^2 = \mathrm{diag}[2,1] \cdot B_{12}(\lambda) \cdot \mathrm{diag}[1/2, 1]$:

$$\begin{pmatrix} a_\lambda^2 & b_\lambda(a_\lambda + d_\lambda) \\ c_\lambda(a_\lambda + d_\lambda) & d_\lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_\lambda & \nu(2) b_\lambda \\ \nu(2)^{-1} c_\lambda & d_\lambda \end{pmatrix},$$

из которого следует $a_\lambda^2 = a_\lambda$, $d_\lambda^2 = d_\lambda$.

Таким образом,

$$\Phi'(B_{12}(\lambda)) = \begin{pmatrix} a_\lambda & b_\lambda \\ c_\lambda & d_\lambda \end{pmatrix}, \qquad \text{где} \quad a_\lambda^2 = a_\lambda, \quad d_\lambda^2 = d_\lambda, \quad b_\lambda c_\lambda = 0.$$

Вспомним, что эта матрица обратима во всем матричном кольце $M_2(R)$, т.е. существуют (не обязательно неотрицательные) элементы $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$ такие, что

$$\begin{pmatrix} a_\lambda & b_\lambda\\ c_\lambda & d_\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_\lambda & b_\lambda\\ c_\lambda & d_\lambda\end{pmatrix}=I.$$

Следовательно, $a_\lambda\alpha+c_\lambda\beta=a_\lambda\alpha+b_\lambda\gamma=1$. Значит, $(a_\lambda\alpha)b_\lambda=b_\lambda$, $(a_\lambda\alpha)c_\lambda=c_\lambda$. Домножая эти равенства на a_λ, мы получаем $a_\lambda b_\lambda=b_\lambda$, $a_\lambda c_\lambda=c_\lambda$. Домножая теперь равенство $a_\lambda\alpha+c_\lambda\beta=1$ на a_λ, мы получим $a_\lambda=1$. Аналогично, $d_\lambda=1$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Для любых* $\lambda,\mu\in R_+$

$$b_\lambda c_\mu=b_\mu c_\lambda=0.$$

Доказательство. Действительно, произведение матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & b_\lambda\\ c_\lambda & 1\end{pmatrix}\qquad\text{и}\qquad\begin{pmatrix} 1 & b_\mu\\ c_\mu & 1\end{pmatrix}$$

является образом матрицы $B_{12}(\lambda+\mu)$, поэтому тоже должно иметь единицы на диагонали. Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 7. *Существуют такие ортогональные идемпотенты* $\theta,1-\theta\in R_+$, *что*

$$\Phi'(B_{12}(\theta))=B_{12}(b_1),\qquad \Phi'(B_{12}(1-\theta))=B_{21}(c_1).$$

Доказательство. Рассмотрим все матрицы полугруппы $G_2(R)$, коммутирующие с $B_{12}(1)$ и сопряженные своему квадрату. Очевидно, что это как раз матрицы $B_{12}(x)$, $x\in R_+$, и только они. Значит, все матрицы, коммутирующие с $\Phi'(B_{12}(1))$ и сопряженные своему квадрату, должны иметь прообраз при автоморфизме Φ' вида $B_{12}(y)$. Заметим, что матрица $B_{12}(b_1)$ коммутирует с $\Phi'(B_{12}(1))$ и сопряжена своему квадрату. Значит, $B_{12}(b_1)=\Phi'(B_{12}(\theta))$. Аналогично, $B_{21}(c_1)=\Phi'(B_{12}(\theta'))$. Так как $B_{12}(b_1)B_{21}(c_1)=\Phi'(B_{12}(1))$, то $\theta+\theta'=1$. Матрица $B_{12}(c_1)=SB_{21}(c_1)S$ коммутирует с матрицей $B_{12}(b_1)$, откуда следует, что $B_{21}(\theta')$ коммутирует с $B_{12}(\theta)$. Значит, $\theta\cdot\theta'=0$. Следовательно, θ и $1-\theta$ являются идемпотентами, что и требовалось.

Лемма 8. *Существует такая обратимая матрица* $M'\in\Gamma_2(R)$, *что для автоморфизма* $\Phi''=\Phi_{M'}\circ\Phi'$ *выполнены следующие условия*:

1) $\Phi''(S)=S$;
2) *существует такое* $\lambda\in R_+$, *что* $\Phi''(B_{12}(\lambda))=B_{12}(1)$.

Доказательство. Заметим, что рассматриваемый нами в предыдущих леммах автоморфизм Φ' удовлетворял только одному условию: $\Phi'(S)=S$. Очевидно, что и обратный автоморфизм ${\Phi'}^{-1}$ удовлетворяет тому же условию, а значит, для него выполняется утверждение леммы 7. Это означает, что существуют элементы $b,c\in R_+$, для которых

$$\Phi'(B_{12}(b))=B_{12}(\theta),\qquad \Phi'(B_{12}(c))=B_{21}(1-\theta),$$

где $\theta,1-\theta$ – неотрицательные идемпотенты кольца R.

Рассмотрим матрицу

$$M' = \begin{pmatrix} \theta & 1-\theta \\ 1-\theta & \theta \end{pmatrix}.$$

Она обратима (обратна самой себе) и композиция $\Phi'' = \Phi_{M'} \circ \Phi'$ обладает указанным в условии леммы свойством. Лемма доказана.

Теперь мы можем считать фиксированным автоморфизм Φ'' со свойствами из леммы 8.

Лемма 9. *Для автоморфизма Φ'' и элемента λ из предыдущей леммы выполнены следующие условия*:

1) λ *не является делителем нуля в* R_+;
2) $\Phi''(\mathrm{diag}[2, 1/2]) = \mathrm{diag}[2, 1/2]$.

Доказательство. Благодаря возможности для каждого автоморфизма рассматривать обратный, мы можем считать, что $B_{12}(1)$ переходит в $B_{12}(\lambda)$. Заметим, что централизатор матрицы $B_{12}(1)$ состоит из матриц вида $aB_{12}(b)$, $a \in R_+^*$, $b \in R_+$. Централизатор любой матрицы, коммутирующей с $B_{12}(1)$, обязательно содержит в себе централизатор матрицы $B_{12}(1)$. Понятно, что это свойство должно сохраняться и для образа матрицы $B_{12}(1)$, т.е. для матрицы $B_{12}(\lambda)$. С матрицей $B_{12}(\lambda)$ коммутирует матрица $B_{12}(1)$, значит, их централизаторы должны совпадать. Таким образом, не существует матрицы, не имеющей вид $aB_{12}(b)$ и коммутирующей с $B_{12}(\lambda)$. Однако если существует такое ненулевое $\mu \in R_+$, что $\mu\lambda = 0$, то $B_{21}(\mu)$ и $B_{12}(\lambda)$ коммутируют. Значит, λ не может быть делителем нуля в R_+.

Теперь рассмотрим матрицу $\Phi''(\mathrm{diag}[2, 1])$. Это некоторая диагональная матрица $\mathrm{diag}[\alpha, \beta]$. Благодаря свойству

$$\mathrm{diag}[2,1] B_{12}(1)\, \mathrm{diag}[2,1]^{-1} = B_{12}(1)^2$$

имеем

$$\mathrm{diag}[\alpha,\beta] B_{12}(\lambda)\, \mathrm{diag}[\alpha,\beta]^{-1} = B_{12}(\lambda)^2,$$

откуда

$$\frac{\alpha\lambda}{\beta} = 2\lambda.$$

Так как λ по доказанному не является делителем нуля, то $\alpha = 2\beta$. Таким образом, $\Phi''(\mathrm{diag}[2, 1]) = \mathrm{diag}[2\beta, \beta]$.

Значит,

$$\Phi''\left(\mathrm{diag}\left[2, \frac{1}{2}\right]\right) = \Phi''(\mathrm{diag}[2,1] \cdot (S\,\mathrm{diag}[2,1]S)^{-1}) = \mathrm{diag}[2\beta,\beta](S\,\mathrm{diag}[2\beta,\beta]S)^{-1}$$
$$= \mathrm{diag}[2\beta,\beta]\,\mathrm{diag}\left[\beta^{-1}, \frac{\beta^{-1}}{2}\right] = \mathrm{diag}\left[2, \frac{1}{2}\right],$$

что и требовалось доказать.

Лемма 10. *Элемент λ, построенный в леммах 8, 9, удовлетворяет условию* $\lambda^2 = 1$.

Доказательство. В полугруппе $G_2(R)$ выполняется равенство

$$B_{12}(1)B_{21}(1) = \mathrm{diag}\left[2, \frac{1}{2}\right] B_{21}(2) B_{12}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Значит (благодаря доказанному в предыдущей лемме условию $\Phi''(\mathrm{diag}[2,1/2]) = \mathrm{diag}[2,1/2]$), имеем

$$B_{12}(\lambda)B_{21}(\lambda) = \mathrm{diag}\left[2, \frac{1}{2}\right] B_{21}(2\lambda) B_{12}\left(\frac{\lambda}{2}\right),$$

что дает условие $1+\lambda^2 = 2$, т.е. $\lambda^2 = 1$.

Начиная с этого момента, мы будем считать, что полукольцо R_+ порождается своими обратимыми неотрицательными элементами (они могут быть обратимы даже не в полукольце R_+, а только во всем кольце R).

Лемма 11. *Для рассматриваемого автоморфизма Φ'' существуют автоморфизм $\gamma\colon R_+ \to R_+$ полукольца R_+ и гомоморфизм $\beta\colon R_+^* \to R_+^*$ полугруппы R_+^* всех неотрицательных обратимых элементов кольца R такие, что*

1) $\Phi''(S) = S$;
2) $\Phi''(B_{12}(x)) = B_{12}(\lambda\gamma(x))$;
3) $\Phi''(\mathrm{diag}[a,b]) = \mathrm{diag}[\gamma(a)\beta(ab), \gamma(b)\beta(ab)]$.

Доказательство. Рассмотрим образ произвольной матрицы $\mathrm{diag}[a,1]$, $a \in R_+^*$. Это некоторая матрица $\mathrm{diag}[\alpha,\beta]$. Обозначим соответствующие отображения $a \mapsto \alpha$ и $a \mapsto \beta$ через $\alpha,\beta\colon R_+^* \to R_+^*$. Понятно, что оба этих отображения мультипликативны.

По построению

$$\begin{aligned}\Phi''(\mathrm{diag}[a,b]) &= \Phi''(\mathrm{diag}[a,1]\,\mathrm{diag}[1,b]) = \Phi''(\mathrm{diag}[a,1]S\,\mathrm{diag}[b,1]S)\\ &= \mathrm{diag}[\alpha(a),\beta(a)]\,\mathrm{diag}[\beta[b],\alpha(b)] = \mathrm{diag}[\alpha(a)\beta(b),\alpha(b)\beta(a)].\end{aligned}$$

Кроме того, нам известно, что для любого $x \in R_+$ $\Phi''(B_{12}(x)) = B_{12}(y)$ для некоторого $y \in R_+$. Обозначим отображение $x \mapsto y/\lambda$ через $\gamma\colon R_+ \to R_+$. Мы знаем, что

1) отображение γ биективно (так как Φ'' биективно);
2) $\gamma(1) = 1$;
3) γ аддитивно, так как из $B_{12}(x_1+x_2) = B_{12}(x_1)B_{12}(x_2)$ следует

$$B_{12}(\lambda\gamma(x_1+x_2)) = B_{12}(\lambda\gamma(x_1))B_{12}(\lambda\gamma(x_2)) = B_{12}(\lambda(\gamma(x_1)+\gamma(x_2)).$$

Пусть $x \in R_+^*$. Тогда имеем

$$\mathrm{diag}[x,x]B_{12}(x) = \mathrm{diag}[x,1]B_{12}(1)\,\mathrm{diag}[1,x],$$

откуда

$$\mathrm{diag}[\alpha(x)\beta(x),\alpha(x)\beta(x)]B_{12}(\lambda\gamma(x)) = \mathrm{diag}[\alpha(x),\beta(x)]B_{12}(\lambda)\,\mathrm{diag}[\beta(x),\alpha(x)],$$

т.е.

$$\alpha(x)\beta(x)\lambda\gamma(x) = \alpha(x)^2\lambda.$$

Следовательно,
$$\gamma(x) = \alpha(x)\beta(x)^{-1}$$
и для каждого элемента $x \in R_+^*$ мы можем теперь писать
$$\Phi''(\mathrm{diag}[x,1]) = \mathrm{diag}[\gamma(x)\beta(x), \beta(x)].$$

Так как отображения α и β мультипликативны, отображение γ мультипликативно на обратимых (в кольце R) элементах. Так как неотрицательные обратимые элементы кольца R по нашему условию порождают полукольцо R_+, а отображение γ по доказанному аддитивно, то γ мультипликативно на всех элементах полукольца R_+, а значит, является его автоморфизмом.

Таким образом, все пункты леммы доказаны.

Лемма 12. *На полугруппе* $\mathrm{GE}_2^+(R)$ *автоморфизм* Φ'' *является композицией автоморфизма, индуцированного автоморфизмом полукольца* R_+, *центральной гомотетии и внутреннего автоморфизма.*

Доказательство. Рассмотрим автоморфизм $\Phi''' = \Phi^{\gamma^{-1}} \circ \Phi''$. Пусть $\gamma^{-1}(\lambda) = \xi$. Имеем
$$\Phi'''(S) = S, \qquad \Phi'''(B_{12}(x)) = \Phi^{\gamma^{-1}}(B_{12}(\lambda\gamma(x))) = B_{12}(\gamma^{-1}(\lambda)x) = B_{12}(\xi x),$$
$$\Phi'''(\mathrm{diag}[a,b]) = \Phi^{\gamma^{-1}}(\mathrm{diag}[\gamma(a)\beta(ab), \gamma(b)\beta(ab)]) = \mathrm{diag}[a\gamma^{-1}\beta(ab), b\gamma^{-1}\beta(ab)].$$

Обозначим $\gamma^{-1}\beta$ через μ. Тогда $\Phi'''(\mathrm{diag}[a,b]) = \mu(ab)\,\mathrm{diag}[a,b]$.

Теперь рассмотрим новый автоморфизм $\Phi'''' = \Phi_{\mathrm{diag}[\xi,1]} \circ \Phi'''$. Ясно, что
$$\Phi''''(S) = \xi S, \qquad \Phi''''(B_{12}(x)) = B_{12}(x), \qquad \Phi''''(\mathrm{diag}[a,b]) = \mu(ab)\,\mathrm{diag}[a,b].$$

Ясно, что на полугруппе $\mathrm{GE}_n^+(R)$ автоморфизм Φ'''' является центральной гомотетией. Мы не приводим подробное доказательство этого факта, потому что полностью аналогичные (и подробные) доказательства проводились в работах [1]–[3].

Доказательство основной теоремы. Теперь основная теорема легко следует из леммы 12, если учесть, что переход от изначального автоморфизма Φ к автоморфизму Φ'' происходил с помощью сопряжения матрицей из $\Gamma_n(R)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А. В. Михалёв, М. А. Шаталова, “Автоморфизмы и антиавтоморфизмы, полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами”, *Матем. сб.*, **81**:4 (1970), 600–609.

[2] Е. И. Бунина, А. В. Михалёв, “Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **11**:2 (2005), 3–23.

[3] Е. И. Бунина, П. П. Семёнов, “Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над коммутативными частично упорядоченными кольцами”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **14**:2 (2008), 69–100.

Е. И. Бунина
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: helenbunina@yandex.ru

Поступило
02.02.2009
Исправленный вариант
13.03.2011