Ю. П. Бибило, Изомонодромное слияние особых точек, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 3, 330–336

https://www.mathnet.ru/mzm8672

Математические заметки

Том 87 выпуск 3 март 2010

УДК 517.927.7

Изомонодромное слияние особых точек

Ю. П. Бибило

Рассматривается вопрос о слиянии особых точек при изомонодромных деформациях линейных систем. Доказано, что система с иррегулярными особыми точками является результатом изомонодромного слияния особых точек с минимальными рангами Пуанкаре, т.е. особых точек, ранг Пуанкаре которых не уменьшается при калибровочных преобразованиях.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. Вопрос об изомонодромных деформациях линейных дифференциальных уравнений впервые был поставлен Риманом в 1857 г. Позже Шлезингер и Лаппо–Данилевский сформулировали этот вопрос для линейных мероморфных систем

$$\frac{dy}{dz} = A(z)y$$

на сфере Римана $\mathbb{CP}^1$. Наиболее изученными являются деформации фуксовых систем; в разное время существенные результаты были получены Шлезингером, Мальгранжем, Итсом и Новокшеновым, Сибуйей, Болибрухом и другими.

Одна из задач, связанных с изомонодромными деформациями есть задача о изомонодромном слиянии особых точек. Арнольдом был сформулирован вопрос о том, как описать множество систем с регулярными особыми точками в терминах пределов изомонодромных деформаций фуксовых систем (задачи 1984-7, 1987-12 в [1]). Болибрух, рассматривая так называемые нормализованные изомонодромные слияния особых точек фуксовых систем, получил два замечательных результата.

Теорема 1 [2]. *Результатом нормализованного изомонодромного слияния особых точек семейства фуксовых систем является система с регулярными особыми точками.*

Теорема 2 [3]. *Любая система линейных дифференциальных уравнений с регулярными особыми точками на сфере Римана является результатом нормализованного изомонодромного слияния особых точек семейства фуксовых систем.*

Джимбо и Мива [4] рассмотрели изомонодромные деформации линейных систем с иррегулярными особыми точками в случае общего положения (а именно в предположении, что все особые точки нерезонансные).

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых (МК-3178.2009.1).

В данной работе обобщается результат теоремы 2 на случай систем с иррегулярными особыми точками.

2. Фуксовы и иррегулярные особые точки. Рассмотрим систему

$$\frac{dy}{dz} = A(z)y, \qquad y(z) \in \mathbb{C}^p, \tag{2.1}$$

из p линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка на сфере Римана $\mathbb{CP}^1$, где $A(z)$ – мероморфная матричная функция с полюсами в точках $a_1, \dots, a_n$.

Определение 1. Особая точка a_i называется *регулярной* особой точкой системы (2.1), если для любого сектора S конечного раствора с вершиной в точке a_i фундаментальная матрица $Y(z)$ системы при $z \to a_i$, $z \in S$, имеет не более чем степенной рост в a_i. В противном случае, a_i называется *иррегулярной* особой точкой.

Определение 2. Если матричная функция $A(z)$ в точке a_i имеет полюс первого порядка, то a_i называется *фуксовой* особой точкой системы (2.1).

Фуксовы особые точки являются регулярными [5]. Систему, у которой все особые точки фуксовы, называют фуксовой.

Для каждой регулярной особой точки a_i имеется фундаментальное решение, называемое *левелевским*, которое в окрестности этой точки представляется в виде

$$Y^i(z) = U(z)(z-a_i)^{\Lambda^i}(z-a_i)^{E^i}, \tag{2.2}$$

где $E^i = (1/(2\pi\sqrt{-1}))\ln G^i$ – логарифм матрицы монодромии G^i, нормированный условием, что действительные части собственных значений E^i лежат в полуинтервале $[0,1)$, Λ^i – диагональная целочисленная матрица нормирований, элементы которой упорядочены по убыванию. Матрица $U(z)$ голоморфна в окрестности точки a_i, и в случае, если a_i фуксова, выполнено $\det U(a_i) \neq 0$ [5].

Особая точка a_i называется *ложной*, если соответствующая матрица монодромии единичная. Вид левелевского фундаментального решения в окрестности ложной особенности упрощается:

$$Y^i(z) = U(z)(z-a_i)^{\Lambda^i}.$$

Допустим, имеется семейство систем вида (2.1), голоморфно зависящее от параметра $t \in V \subset \mathbb{C}^m$:

$$\frac{dy}{dz} = A(z,t)y. \tag{2.3}$$

Семейство (2.3) называется *деформацией* системы (2.1), если при некотором $t^0 \in V$ выполнено равенство $A(z,t^0) = A(z)$. Деформацию называют *изомонодромной*, если для всех $t \in V$ данные монодромии (точное определение которых приведено ниже) одинаковы.

Для фуксовых систем часто в качестве параметра t берется набор $a = (a_1, \dots, a_n)$ особых точек. Изомонодромность семейства (2.3) понимается в этом случае как сохранение представления монодромии (отвечающего какой-нибудь фундаментальной матрице $Y(z,a)$, аналитичной по (z,a))

$$\chi\colon \pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus \{a_1, \dots, a_n\}) \to \mathrm{GL}(p,\mathbb{C})$$

при малом изменении положения особых точек.

3. Обобщенные данные монодромии. В случае систем с иррегулярными особыми точками ситуация более сложная, и для того, чтобы определить обобщенные данные монодромии, необходимо рассмотреть формальную фундаментальную матрицу системы (т.е. матрицу, элементами которой являются формальные ряды, и которая при подстановке удовлетворяет системе, см. [6]) в окрестности иррегулярной особой точки, и определить данные Стокса.

Определение 3. *Рангом Пуанкаре* системы (2.1) в точке a_i называется целое неотрицательное число r_i, если ряд Лорана матрицы коэффициентов $A(z)$ в окрестности a_i имеет вид

$$A(z) = \frac{A_{-r_i-1}}{(z-a_i)^{r_i+1}} + \cdots + \frac{A_{-1}}{z-a_i} + A_0 + \cdots, \qquad A_{-r_i-1} \neq 0. \tag{3.1}$$

Минимальным рангом Пуанкаре системы (2.1) в точке a_i называется наименьший из всех рангов Пуанкаре систем, получаемых из данной заменой неизвестной функции

$$\widetilde{y}(z) = M(z)y(z), \tag{3.2}$$

где $M(z)$ – мероморфная в точке a_i матрица, $\det M(z) \not\equiv 0$.

Замены (3.2) определяют так называемые калибровочные преобразования системы (2.1).

Из определения ранга Пуанкаре следует, что ранг Пуанкаре фуксовой особой точки равен нулю. Минимальный ранг Пуанкаре регулярной особой точки равен нулю [5]. Если ранг Пуанкаре регулярной особой точки минимален, значит она фуксова. Если a_i – иррегулярная особая точка системы (2.1), то ее минимальный ранг Пуанкаре строго положителен.

Рассмотрим систему (2.1) в окрестности иррегулярной особой точки a_i, минимальный ранг Пуанкаре которой равен r_i. У системы существует формальная фундаментальная матрица решений вида

$$\widehat{Y}^i(z) = \widehat{F}(z)(z-a_i)^{\widehat{E}^i} \exp(Q^i(z)), \tag{3.3}$$

где $\widehat{F}(z)$ – формальный ряд Лорана с конечной главной частью, $\exp(2\pi\sqrt{-1}\widehat{E}^i)$ – формальная матрица монодромии и $Q^i(z)$ – диагональная матрица, элементами которой являются полиномы от $(z-a_i)^{-1}$ (либо от $(z-a_i)^{-1/s}$, s – натуральное число) степени не выше r_i (или, соответственно, не выше $r_i s$) с нулевыми свободными членами. При этом можно обеспечить, чтобы $\widehat{E}^i$ удовлетворяла некоторым дополнительным условиям, подробно описанным в [7], тогда формальное матричное решение (3.3) определено однозначно с точностью до перестановки блоков в жордановой форме матрицы $\widehat{E}^i$ и соответствующей перестановки диагональных элементов $Q^i(z)$.

Выделяют резонансный и нерезонансный случай [6].

Определение 4. Если все собственные значения матрицы A_{-r_i-1} попарно различны, то a_i называется *нерезонансной* иррегулярной особой точкой.

В нерезонансном случае все полиномы из $Q^i(z)$ попарно различны и не содержат дробные степени $(z-a_i)$, кроме того, тогда $\widehat{F}(z)$ является формальным рядом Тейлора и $\det \widehat{F}(a_i) \neq 0$ [6].

Определение 5. Если среди собственных значений матрицы A_{-r_i-1} найдутся одинаковые, то a_i называется *резонансной* иррегулярной особой точкой.

Определение 6. Если $Q^i(z)$ не содержит дробных степеней $(z-a_i)$, то особая точка a_i называется *неразветвленной*, в противном случае – *разветвленной*.

В окрестности точки a_i имеются N_i таких пересекающихся секторов конечного раствора, полностью заполняющих эту окрестность, и каждому сектору можно сопоставить такое фундаментальное решение $Y^i_k(z)$ системы (2.1), что формальная фундаментальная матрица (3.3) является его асимптотическим разложением в соответствующем секторе [8]. Фундаментальные матрицы связаны соотношением $Y^i_k(z) = Y^i_{k+1}(z)S^i_k$, где S^i_k – постоянная матрица (матрица Стокса). Таким образом, каждой особой точке соответствует N_i матриц Стокса.

Положим, что одна из особых точек $a_n = \infty$. Так как фундаментальные решения отличаются только на постоянную матрицу, то $Y^i_1(z) = Y^n_1(z)C^i$ и C^i называется матрицей связи.

Таким образом, если a_i – иррегулярная особая точка, то в качестве обобщенных данных монодромии берется следующий набор данных:

- матрица формальной монодромии $\widehat{G}^i = \exp(2\pi\sqrt{-1}\,\widehat{E}^i)$,
- матрицы Стокса $S^i_1, \dots, S^i_{N_i}$,
- матрица связи C^i,

а если a_i – регулярная особая точка, то данные монодромии состоят только из

- матрицы монодромии G_i.

Заметим, что в случае иррегулярной особой точки матрица G_i не включается в набор обобщенных данных монодромии, так как выражается через матрицу формальной монодромии, матрицы связи и матрицы Стокса.

При фиксированном выборе блоков в жордановой форме матрицы $\widehat{E}^i$ обобщенные данные монодромии определены однозначно.

4. Слияние особых точек при изомонодромных деформациях. Теперь мы можем определить понятия изомонодромной деформации и изомонодромного слияния особенностей для систем с иррегулярными особыми точками.

Определение 7. Деформация (2.3) системы с иррегулярными особыми точками называется *изомонодромной*, если для всех значений параметра t обобщенные данные монодромии одинаковы.

В случае, когда иррегулярные особые точки системы нерезонансны, изомонодромная деформация описана в [4], [8]. В этом случае формальные фундаментальные матрицы решений неразветвлены и разложение $Q^i(z)$ по степеням $(z-a_i)^{-1}$ имеет вид

$$Q^i(z) = \sum_{k=1}^{r_i} \frac{\Psi^i_{-k}}{(z-a_i)^k}, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{4.1}$$

где $\Psi^i_{-r_i}, \dots, \Psi^i_{-1}$ – диагональные постоянные матрицы. Обозначим полный набор их элементов через $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_h)$. Тогда набор параметров деформации (выше он обозначался t) состоит из $a = (a_1, \dots, a_n)$ и ρ.

Следует заметить, что в полный набор параметров деформации входят и собственные значения матриц $A_{-r_1-1}, \dots, A_{-r_n-1}$, так как они являются коэффициентами при старших степенях полиномов из $Q^1(z), \dots, Q^n(z)$.

Определение 8. Будем говорить, что система

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y \tag{4.2}$$

с особыми точками $b_1, \dots, b_m$ является результатом *изомонодромного слияния* особых точек семейства (2.3), если матрица $A(z, a, \rho)$ стремится к $B(z)$, когда точки некоторого набора особых точек $a_{i_1}, \dots, a_{i_{m_i}}$ стремятся к точке b_i, каждая внутри своего сектора с вершиной в b_i, $i = 1, \dots, m$.

Сформулируем формальный аналог ключевого утверждения из [3] в виде леммы.

Лемма 1. *Пусть* $\widehat{F}(z) = F_0 + F_1 z + \cdots$ *– формальный ряд Тейлора и* $\det \widehat{F}(0) = 0$. *Тогда* $\widehat{F}(z)$ *представим в виде произведения*

$$\widehat{F}(z) = P(z)\widehat{U}(z), \qquad P(z) = P_0 z^{L_1} P_1 z^{-L_1} \cdots z^{L_s} P_s z^{-L_s} z^K, \tag{4.3}$$

где $\widehat{U}(z)$ *– формальный ряд Тейлора*, $\det \widehat{U}(0) \neq 0$; *все* L_j *и матрица* K *– диагональные целочисленные матрицы*, *элементы которых неотрицательны*; $P_0, P_1, \dots, P_s$ *– постоянные матрицы*, *и все матричные функции* $z^{L_i} P_i z^{-L_i}$ *голоморфны в бесконечности.*

Доказательство. Пусть k – ранг матрицы F_0. Будем считать, что первые k строк F_0 линейно независимы, а остальные нулевые (этого можно добиться, умножив слева $\widehat{F}(z)$ на подходящую постоянную матрицу V). Значит, $V\widehat{F}(z) = z^{L_1}\widehat{F}'(z)$, где L_1 – диагональная целочисленная матрица и, будем полагать, что ее элементы упорядочены по убыванию (этого можно добиться сопряжением z^{L_1} на подходящую матрицу перестановок). Обозначим $P_0 = V^{-1}$.

Далее $\widehat{F}'(z) = F_0' + F_1' z + \cdots$ и пусть первые v строк матрицы F_0' линейно независимы, а $(v+1)$-я строка является их линейной комбинацией. Тогда найдется постоянная нижнетреугольная матрица T такая, что $(v+1)$-я строка у TF_0' нулевая. Тогда $T\widehat{F}'(z) = z^{K_2}\widehat{F}''(z)$ и $\widehat{F}''(z)$ – снова формальный ряд. Обозначим $P_1 = T^{-1}$; тогда $z^{L_1} P_1 z^{-L_1}$ голоморфна в бесконечности и $\widehat{F}(z) = P_0 z^{L_1} P_1 z^{-L_1} z^{L_2} \widehat{F}''(z)$, где $L_2 = L_1 + K_2$.

Продолжая таким образом далее, за конечное число шагов получим требуемое разложение (4.3).

Теорема 3. *Любая система* (4.2) *является результатом изомонодромного слияния особых точек семейства* (2.3), *ранги Пуанкаре всех особенностей которого минимальны.*

Доказательство. Если все особые точки b_i регулярны, то утверждение сводится к теореме 2. Пусть у системы (4.2) существует иррегулярная особая точка. Без ограничения общности будем считать, что это точка $b_1 = 0$. Кроме того, положим $b_m = \infty$. Матрица коэффициентов системы в окрестности нуля представляется в виде

$$B(z) = \frac{B_{-r_1-1}}{z^{r_1+1}} + \cdots + \frac{B_{-1}}{z} + \cdots$$

и будем полагать, что ранг Пуанкаре r_1 системы в нуле не минимален. В противном случае нечего доказывать. Достаточно рассмотреть случай единственной особой точки не минимального ранга Пуанкаре.

Формальная фундаментальная матрица решений в окрестности нуля имеет вид

$$\widehat{Y}(z) = \widehat{M}(z) z^{\widehat{E}^1} \exp[Q^1(z)], \tag{4.4}$$

где $\widehat{M}(z)$ – формальный ряд Лорана с конечной главной частью. Найдется такое целое неотрицательное число k, что $\widehat{F}(z) = \widehat{M}(z) z^{kI}$ – формальный ряд Тейлора (I – единичная матрица).

Рассмотрим сперва случай когда $\det \widehat{F}(0) = 0$.

Пусть $Y(z)$ – фундаментальное решение системы (4.2).

Представив $\widehat{F}(z)$ в виде произведения матриц согласно лемме 1, получаем

$$\widehat{F}(z) z^{-kI} = P(z)\widehat{U}(z), \qquad P(z) = P_0 z^{L_1} P_1 z^{-L_1} \cdots z^{L_s} P_s z^{-L_s} z^{(K-kI)}.$$

Рассмотрим $H(z,a,c) = P_0 H_1(z,a,c) \cdots H_s(z,a,c) G(z,a)$, где

$$H_i(z,a,c) = \prod_{j=1}^{\operatorname{tr} L_i} (z - a_j^i)^{N_j^i} P_i \prod_{j=1}^{\operatorname{tr} L_i} (z - c_j^i)^{-N_j^i}, \qquad i = 1, \ldots, s,$$

$$G(z,a) = \prod_{j=1}^{\operatorname{tr} K} (z - a_j^{s+1})^{N_j^{s+1}} \prod_{j=1}^{kp} (z - a_j^{s+2})^{-N_j^{s+2}},$$

а N_j^i – такие матрицы, все элементы которых равны нулю, кроме одного диагонального элемента, равного единице, и $L_i = \sum_j N_j^i$, $K = \sum_j N_j^{s+1}$, $kI = \sum_j N_j^{s+2}$ и все точки $\{a_j^i, c_j^i, b_l\}$ различны. Мы добавили к точкам $\{b_l\}$ новые точки $\{a_j^i, c_j^i\}$, которые будут ложными особенностями у конструируемой нами системы.

Если $\det \widehat{F}(z) \neq 0$, то положим проще $H(z,a) = \prod_{j=1}^{kp} (z - a_j^{s+2})^{-N_j^{s+2}}$, где N_j^{s+2} вводятся аналогично предыдущему. В этом случае у нас не будет точек $\{c_j^i\}$ и матриц L_j, а $P(z)$ будет единичной матрицей.

По построению матрица $H(z,a,c)P^{-1}(z)$ (в случае когда $\det \widehat{F}(z) \neq 0$ здесь и далее под $H(z,a,c)$ надо понимать $H(z,a)$) голоморфна в бесконечности; следовательно, калибровочное преобразование $\widetilde{y} = H(z,a,c)P^{-1}(z)y$ не меняет характер точки ∞ системы (4.2). Фундаментальное решение $Y(z,a,c) = H(z,a,c)P^{-1}(z)Y(z)$ преобразованной системы задает изомондромное семейство

$$\frac{dy}{dz} = A(z,a,c)y, \qquad A(z,a,c) = Y'(z,a,c)Y^{-1}(z,a,c), \tag{4.5}$$

у которого особые точки $\{a_j^i, c_j^i\}$ – ложные фуксовы, особая точка нуль – иррегулярная с минимальным рангом Пуанкаре.

Система (4.2) является результатом изомонодромного слияния особых точек семейства (4.5). Действительно, для произвольной точки $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{b_1, \ldots, b_m\}$ выберем окрестность $\mathscr{D}$ такую, что $\mathscr{D} \subset \mathbb{C} \setminus \{b_1, \ldots, b_m\}$ и $\mathscr{D} \cap \mathscr{U} = \varnothing$, где $\mathscr{U}$ – малая фиксированная окрестность нуля. На каждом компакте $\mathscr{K} \subset \mathscr{D}$ матричная функция $Y(z,a,c)$ стремится к $Y(z)$ равномерно по z, когда точки $\{a_j^i, c_j^i\}$ стремятся к нулю, каждая в своем секторе. Следовательно, по теореме Вейерштрасса $Y'(z,a,c)$ также стремится к $Y'(z)$ при любом $z \in \mathscr{D}$.

Таким образом, $A(z,a,c)$ стремится к $B(z)$, когда $\{a_j^i, c_j^i\}$ стремятся к нулю, и система (4.2) является результатом изомонодромного слияния особых точек построенного семейства систем. Особые точки $\{a_j^i, c_j^i\}$ фуксовы, а в нуле у фундаментальной матрицы $Y(z,a,c)$ системы (4.2) особенность получается только за счет матрицы $Q^1(z)$ из (4.4), ненулевые элементы которой стоят на диагонали и являются полиномами от z^{-1} (или от дробных степеней z^{-1}).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В. И. Арнольд, *Задачи Арнольда*, ФАЗИС, М., 2000.

[2] А. А. Болибрух, "Об изомонодромных слияниях фуксовых особенностей", *Локальные и глобальные задачи теории особенностей*, Сборник статей. К 60-летию со дня рождения академика Владимира Игоревича Арнольда, Тр. МИАН, **221**, Наука, М., 1998, 127–142.

[3] А. А. Болибрух, "Регулярные особые точки как изомонодромные слияния фуксовых", *УМН*, **56**:4 (2001), 135–136.

[4] M. Jimbo, T. Miwa, K. Ueno, "Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. I. General theory and τ-function", *Phys. D*, **2**:2 (1981), 306–352.

[5] А. А. Болибрух, *Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений*, Современные лекционные курсы, МЦНМО, М., 2009.

[6] В. Вазов, *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1968.

[7] W. Balser, W. B. Jucart, D. A. Lutz, "A general theory of invariants for meromorphic differential equations. I. Formal invariants", *Funkcial. Ekvac.*, **22**:2 (1979), 197–221.

[8] А. Р. Итс, А. А. Капаев, В. Ю. Новокшенов, А. С. Фокас, *Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана*, М.–Ижевск, ИКИ, 2005.

Ю. П. Бибило
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: yulia_bibilo@mail.ru

Поступило
30.09.2009