Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Ю. К. Сабитова, Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии,
Матем. заметки, 2015, том 98, выпуск 3, 393–406

https://www.mathnet.ru/mzm9135

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.37
14 декабря 2025 г., 19:33:51

Математические заметки

Том 98 выпуск 3 сентябрь 2015

УДК 517.95

Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии

Ю. К. Сабитова

Для уравнения эллиптико-гиперболического типа решена краевая задача с нелокальным условием Самарского–Ионкина в прямоугольной области. Методом спектрального анализа установлен критерий единственности и доказана теорема существования решения поставленной задачи. Решение задачи построено в виде суммы биортогонального ряда.

Библиография: 10 названий.

DOI: 10.4213/mzm9135

1. Введение. В данной работе рассматривается уравнение смешанного эллиптико-гиперболического типа

$$Lu = K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{1.1}$$

где $K(y) = \operatorname{sgn} y \cdot |y|^m$, $m > 0$, в прямоугольной области

$$D = \{(x,y) \mid 0 < x < 1,\ -\alpha < y < \beta\},$$

которое вырождается на линии изменения типа. Для уравнения (1.1) в области D поставим следующую задачу.

Краевая задача. *Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям*:

$$u(x,y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-), \tag{1.2}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \qquad (x,y) \in D_+ \cup D_-, \tag{1.3}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \quad u(x,-\alpha) = \psi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1.4}$$

$$u(1,y) = 0, \qquad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta, \tag{1.5}$$

$$\int_0^1 u(x,y)\,dx = A = \mathrm{const}, \qquad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta, \tag{1.6}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-97003).

© Ю. К. Сабитова, 2015

где $D_- = D \cap \{y < 0\}$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *– заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям*: $\varphi(1) = \psi(1) = 0$ *и*

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \int_0^1 \psi(x)\,dx = A. \tag{1.7}$$

Для разных уравнений, в том числе и смешанного типа, но с постоянными коэффициентами, задачи похожего типа изучались, в частности, в [1]–[3].

Если уравнение (1.1) интегрировать при фиксированном $y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta)$ по переменной x от ε до $1-\varepsilon$, где ε – достаточно малое число, то получим

$$K(y)\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{xx}\,dx + \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{yy}\,dx = 0.$$

Отсюда при $\varepsilon \to 0$ будем иметь

$$K(y)[u_x(1,y) - u_x(0,y)] + \frac{d^2}{dy^2}\int_0^1 u(x,y)\,dx = 0.$$

Последнее равенство в силу условия (1.6) переходит в другое нелокальное условие

$$u_x(0,y) = u_x(1,y), \qquad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta, \tag{1.8}$$

выражающее равенство потоков через боковые стороны $x = 0$ и $x = 1$ прямоугольника D.

В дальнейшем вместо задачи (1.2)–(1.6) мы будем изучать задачу (1.2)–(1.5) и (1.8). В этой работе, опираясь на идеи работ [2]–[5], установлен критерий единственности решения задачи (1.2)–(1.5) и (1.8). При обосновании существования решения задачи возникает проблема малых знаменателей относительно параметра α. При определенных условиях на число α и функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ само решение определяется в виде суммы биортогонального ряда. Доказана сходимость построенного ряда в классе (1.2).

2. Единственность решения. Частные решения уравнения (1.1), удовлетворяющие условиям (1.2), (1.5), (1.8), будем искать методом разделения переменных в виде $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Подставляя данное произведение в уравнение (1.1), получаем соотношения

$$X''(x) + \mu X(x) = 0, \qquad 0 < x < 1, \tag{2.1}$$

$$X(1) = 0, \qquad X'(0) = X'(1), \tag{2.2}$$

$$Y''(y) - \mu \operatorname{sgn} y \cdot |y|^m Y(y) = 0, \qquad y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta), \tag{2.3}$$

где μ – постоянная. Задача (2.1), (2.2) несамосопряженная; сопряженная к ней имеет вид

$$Y''(x) + \mu Y(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \qquad Y'(0) = 0, \qquad Y(0) = Y(1).$$

Собственными значениями первой задачи являются числа $\mu_n = \lambda_n^2$, $\lambda_n = 2\pi n$, $n = 1, 2, \dots$, которым отвечают собственные и присоединенные функции

$$\begin{gathered} X_0(x) = 2(1-x), \\ X_{2n-1}(x) = 4\sin 2\pi nx, \quad X_{2n}(x) = 4(1-x)\cos 2\pi nx, \qquad n = 1, 2, \dots. \end{gathered} \tag{2.4}$$

При $n \geqslant 1$ собственные значения двукратны, функции $X_{2n-1}(x)$ собственные, а $X_{2n}(x)$ присоединенные. Система собственных и присоединенных функций сопряженной задачи имеет вид

$$\begin{gathered} Y_0(x) = 2, \\ Y_{2n}(x) = 4\cos 2\pi nx, \quad Y_{2n-1}(x) = 4x\sin 2\pi nx, \qquad n = 1, 2, \dots . \end{gathered} \tag{2.5}$$

Легко проверить, что системы (2.4) и (2.5) являются взаимно биортогональными, т.е.

$$(X_k(x), Y_l(x)) = \delta_{kl},$$

где δ_{kl} – символ Кронекера. Обе выписанные задачи являются регулярными, а потому системы $\{X_k\}$ и $\{Y_k\}$ полны в пространстве $L_2(0,1)$ [6]. Так как обе эти системы бесселевы, т.е. для всех $f \in L_2(0,1)$ выполняются неравенства

$$\Sigma|(f, X_k)|^2 < \infty, \qquad \Sigma|(f, Y_k)|^2 < \infty,$$

в силу теоремы Бари эти системы образуют базисы Рисса в $L_2(0,1)$.

Пусть $u(x,y)$ – решение задачи (1.2)–(1.5), (1.8). Рассмотрим функции

$$w_n(y) = \int_0^1 u(x,y)\cos 2\pi nx\,dx, \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{2.6}$$

$$w_0(y) = \int_0^1 u(x,y)\,dx, \tag{2.7}$$

$$z_n(y) = \int_0^1 u(x,y)x\sin 2\pi nx\,dx, \qquad n = 1, 2, \dots . \tag{2.8}$$

На основании (2.6) введем функцию

$$w_{\varepsilon,n}(y) = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(x,y)\cos 2\pi nx\,dx, \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{2.9}$$

где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. Дифференцируя дважды равенство (2.9) при $y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta)$ и учитывая уравнение (1.1), получим

$$\begin{aligned} w''_{\varepsilon,n}(y) &= \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{yy}(x,y)\cos 2\pi nx\,dx = -\operatorname{sgn} y\cdot|y|^m \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{xx}(x,y)\cos 2\pi nx\,dx \\ &= -\operatorname{sgn} y\cdot|y|^m \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{xx}(x,y)\cos 2\pi nx\,dx. \end{aligned} \tag{2.10}$$

В (2.10) интегрируя по частям два раза с учетом условий (1.5), (1.8) и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим дифференциальное уравнение

$$w''_n(y) - \operatorname{sgn} y\cdot|y|^m(2\pi n)^2 w_n(y) = 0 \tag{2.11}$$

с граничными условиями

$$w_n(\beta) = \int_0^1 \varphi(x)\cos 2\pi nx\,dx = \varphi_n, \qquad w_n(-\alpha) = \int_0^1 \psi(x)\cos 2\pi nx\,dx = \psi_n. \tag{2.12}$$

Общее решение уравнения (2.11) имеет вид

$$w_n(y)=\begin{cases}a_n\sqrt{y}\,I_{1/(2q)}(p_ny^q)+b_n\sqrt{y}\,K_{1/(2q)}(p_ny^q), & y>0,\\ c_n\sqrt{-y}\,J_{1/(2q)}(p_n(-y)^q)+d_n\sqrt{-y}\,Y_{1/(2q)}(p_n(-y)^q), & y<0,\end{cases}\tag{2.13}$$

где $J_{1/(2q)}(p_n(-y)^q)$ и $Y_{1/(2q)}(p_n(-y)^q)$ – функции Бесселя первого и второго рода соответственно, $I_{1/(2q)}(p_ny^q)$ и $K_{1/(2q)}(p_ny^q)$ – модифицированные функции Бесселя, a_n, b_n, c_n и d_n – произвольные постоянные, $q=(m+2)/2$, $p_n=(2\pi n)/q$.

В силу (1.2) подберем постоянные a_n, b_n, c_n и d_n так, чтобы выполнялись равенства

$$w_n(0+)=w_n(0-),\qquad w_n'(0+)=w_n'(0-).\tag{2.14}$$

Первое из равенств (2.14) выполнено при $d_n=-\pi b_n/2$ и любых a_n и c_n, а второе равенство выполнено при $c_n=\pi\operatorname{ctg}[\pi/(4q)]b_n/2-a_n$ и $d_n=-\pi b_n/2$.

Подставим полученные выражения для постоянных c_n и d_n в (2.13); тогда функции $w_n(y)$ примут вид

$$w_n(y)=\begin{cases}a_n\sqrt{y}\,I_{1/(2q)}(p_ny^q)+b_n\sqrt{y}\,K_{1/(2q)}(p_ny^q), & y>0,\\ -a_n\sqrt{-y}\,J_{1/(2q)}(p_n(-y)^q)+b_n\sqrt{-y}\,\overline{Y}_{1/(2q)}(p_n(-y)^q), & y<0,\end{cases}\tag{2.15}$$

где

$$\overline{Y}_{1/(2q)}(p_ny^q)=\frac{\pi}{2\sin[\pi/(2q)]}\big(J_{1/(2q)}(p_ny^q)+J_{-1/(2q)}(p_ny^q)\big).$$

Отметим, что для функций (2.15) выполнено равенство

$$w_n''(0+)=w_n''(0-)=0.$$

Теперь на основании (2.12) и (2.15) получим систему для нахождения a_n и b_n:

$$\begin{cases}a_nI_{1/(2q)}(p_n\beta^q)+b_nK_{1/(2q)}(p_n\beta^q)=\varphi_n\beta^{-1/2},\\ -a_nJ_{1/(2q)}(p_n\alpha^q)+b_n\overline{Y}_{1/(2q)}(p_n\alpha^q)=\psi_n\alpha^{-1/2}, \qquad n=1,2,\dots.\end{cases}\tag{2.16}$$

Если определитель системы (2.16)

$$\Delta_n(\alpha,\beta)=J_{1/(2q)}(p_n\alpha^q)K_{1/(2q)}(p_n\beta^q)+I_{1/(2q)}(p_n\beta^q)\overline{Y}_{1/(2q)}(p_n\alpha^q)\neq 0,\qquad n\in\mathbb{N},\tag{2.17}$$

то данная система имеет единственное решение

$$a_n=\frac{\varphi_n\sqrt{\alpha}\,\overline{Y}_{1/(2q)}(p_n\alpha^q)-\psi_n\sqrt{\beta}\,K_{1/(2q)}(p_n\beta^q)}{\Delta_n(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}},\tag{2.18}$$

$$b_n=\frac{\varphi_n\sqrt{\alpha}\,J_{1/(2q)}(p_n\alpha^q)+\psi_n\sqrt{\beta}\,I_{1/(2q)}(p_n\beta^q)}{\Delta_n(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}.\tag{2.19}$$

С учетом (2.18) и (2.19) из (2.15) найдем окончательный вид функций

$$w_n(y)=\begin{cases}\dfrac{\varphi_n\sqrt{\alpha y}\,\Delta_n(\alpha,y)+\psi_n\sqrt{\beta y}\,A_n(y,\beta)}{\Delta_n(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}, & y>0,\\[2ex] \dfrac{\varphi_n\sqrt{-\alpha y}\,B_n(\alpha,-y)+\psi_n\sqrt{-\beta y}\,\Delta_n(-y,\beta)}{\Delta_n(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}, & y<0,\end{cases}\tag{2.20}$$

где

$$\Delta_n(\alpha,y) = J_{1/(2q)}(p_n\alpha^q)K_{1/(2q)}(p_n y^q) + \overline{Y}_{1/(2q)}(p_n\alpha^q)I_{1/(2q)}(p_n y^q), \tag{2.21}$$

$$A_n(y,\beta) = I_{1/(2q)}(p_n\beta^q)K_{1/(2q)}(p_n y^q) - I_{1/(2q)}(p_n y^q)K_{1/(2q)}(p_n\beta^q),$$

$$B_n(\alpha,-y) = \overline{Y}_{1/(2q)}(p_n(-y)^q)J_{1/(2q)}(p_n\alpha^q) - \overline{Y}_{1/(2q)}(p_n\alpha^q)J_{1/(2q)}(p_n(-y)^q), \tag{2.22}$$

$$\Delta_n(-y,\beta) = J_{1/(2q)}(p_n(-y)^q)K_{1/(2q)}(p_n\beta^q) + \overline{Y}_{1/(2q)}(p_n(-y)^q)I_{1/(2q)}(p_n\beta^q).$$

Аналогично $w_n(y)$ получим, что функция $w_0(y)$, определенная формулой (2.7), удовлетворяет условиям

$$w_0''(y) = 0, \qquad y \in (-\alpha,0)\cup(0,\beta), \tag{2.23}$$

$$w_0(0+) = w_0(0-), \qquad w_0'(0+) = w_0'(0-), \tag{2.24}$$

$$w_0(\beta) = \int_0^1 \varphi(x)\,dx = \varphi_0, \qquad w_0(-\alpha) = \int_0^1 \psi(x)\,dx = \psi_0. \tag{2.25}$$

Единственное решение задачи (2.23)–(2.25) определяется формулой

$$w_0(y) = \frac{\varphi_0 - \psi_0}{\alpha+\beta}(y+\alpha) + \psi_0. \tag{2.26}$$

Повторяя те же действия над функцией $z_n(y)$, что и для $w_n(y)$, заданной формулой (2.8), получим неоднородное дифференциальное уравнение

$$z_n''(y) - \operatorname{sgn} y\cdot|y|^m(2\pi n)^2 z_n(y) = -4\pi n \operatorname{sgn} y\cdot|y|^m w_n(y), \tag{2.27}$$

где $y \in (-\alpha,0)\cup(0,\beta)$, с соответствующими граничными условиями

$$z_n(\beta) = \int_0^1 \varphi(x)x\sin 2\pi nx\,dx = \varphi_{1n}, \tag{2.28}$$

$$z_n(-\alpha) = \int_0^1 \psi(x)x\sin 2\pi nx\,dx = \psi_{1n} \tag{2.29}$$

и условиями сопряжения

$$z_n(0+) = z_n(0-), \qquad z_n'(0+) = z_n'(0-). \tag{2.30}$$

На основании метода вариации произвольных постоянных найдем решение задачи (2.27)–(2.30), которое определяется по формуле

$$z_n(y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\alpha y}\,[\varphi_{1n} - z_n^+(\beta)]\Delta_n(\alpha,y)}{\Delta_n(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}} + \dfrac{\sqrt{\beta y}\,[\psi_{1n} - z_n^-(\alpha)]A_n(y,\beta)}{\Delta_n(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}} + z_n^+(y), & y>0, \\ \dfrac{\sqrt{-\beta y}\,[\psi_{1n} - z_n^-(\alpha)]\Delta_n(-y,\beta)}{\Delta_n(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}} & \\ \qquad + \dfrac{\sqrt{-\alpha y}\,[\varphi_{1n} - z_n^+(\beta)]B_n(\alpha,-y)}{\Delta_n(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}} + z_n^-(y), & y<0, \end{cases} \tag{2.31}$$

где функции $z_n^+(y)$ и $z_n^-(y)$ определены соответственно равенствами

$$
\begin{aligned}
z_n^+(y) = \frac{2\pi n}{q^2}\sqrt{y}\,&[b_n K_{1/(2q)}(p_n y^q) - a_n I_{1/(2q)}(p_n y^q)] \\
&\times \biggl\{ y^{2q}\biggl[\biggl(1+\frac{1}{4(p_n q y^q)^2}\biggr) I_{1/(2q)}(p_n y^q) K_{1/(2q)}(p_n y^q) \\
&\qquad + \frac{1}{4}(p_n q)^2 y^{2q-2}(I_{1/(2q)-1}(p_n y^q) \\
&\qquad + I_{1/(2q)+1}(p_n y^q))[K_{1/(2q)+1}(p_n y^q) + K_{1/(2q)-1}(p_n y^q)]\biggr] \\
&\qquad - (2p_n^2)^{-1}\biggr\} \\
&- \frac{\pi^2 n}{q^2 \sin(\pi/(2q))}\, b_n I_{1/(2q)}(p_n y^q) y^{2q+1/2} \\
&\times \biggl[\frac{\pi}{2\sin(\pi/(2q))}(I^2_{-1/(2q)}(p_n y^q) - I_{-1/(2q)-1}(p_n y^q) I_{1-1/(2q)}(p_n y^q)) \\
&\qquad - 2K_{1/(2q)}(p_n y^q) I_{1/(2q)}(p_n y^q) - 2I_{1+1/(2q)}(p_n y^q) K_{1/(2q)-1}(p_n y^q)\biggr] \\
&+ \frac{2\pi n}{q^2}\, a_n K_{1/(2q)}(p_n y^q) y^{2q+1/2} \\
&\times [I^2_{1/(2q)}(p_n y^q) - I_{1/(2q)-1}(p_n y^q) I_{1/(2q)+1}(p_n y^q)], \qquad y>0,
\end{aligned} \tag{2.32}
$$

$$
\begin{aligned}
z_n^-(y) = -\frac{\pi^2 n}{2q^2}\,&y^{2q+1/2}[a_n J_{1/(2q)}(p_n y^q) - b_n Y_{1/(2q)}(p_n y^q)] \\
&\times [2J_{1/(2q)}(p_n y^q) Y_{1/(2q)}(p_n y^q) - J_{1/(2q)+1}(p_n y^q) Y_{1/(2q)-1}(p_n y^q) \\
&\qquad - J_{1/(2q)-1}(p_n y^q) Y_{1/(2q)+1}(p_n y^q)] \\
&- \frac{\pi^2 n}{q^2}\, b_n y^{2q+1/2}[Y^2_{1/(2q)}(p_n y^q) - Y_{1/(2q)+1}(p_n y^q) Y_{1/(2q)-1}(p_n y^q)] J_{1/(2q)}(p_n y^q) \\
&+ \frac{\pi^2 n}{q^2}\, a_n y^{2q+1/2}[J^2_{1/(2q)}(p_n y^q) - J_{1/(2q)+1}(p_n y^q) J_{1/(2q)-1}(p_n y^q)] Y_{1/(2q)}(p_n y^q) \\
&+ \frac{\pi n}{p_n^2 q^3}\biggl[a_n + 2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2q}\, b_n\biggr] J_{1/(2q)}(p_n y^q)\sqrt{y} \\
&- \frac{\pi n}{p_n^2 q^3}\, b_n Y_{1/(2q)}(p_n y^q)\sqrt{y}, \qquad y<0.
\end{aligned} \tag{2.33}
$$

Отметим, что более подробные выкладки вывода формулы (2.31) приведены в [7; § 1.1, § 2.1].

При условии (2.17) из формул (2.20), (2.26), (2.31) следует единственность решения задачи (1.2)–(1.5), (1.8), так как если $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$ на $[0,1]$, то $w_n(y) \equiv 0$, $w_0(y) \equiv 0$, $z_n(y) \equiv 0$ для $n = 0,1,2,\dots$ на $[-\alpha,\beta]$. Тогда из (2.6)–(2.8) имеем

$$
4\int_0^1 u(x,y)(1-x)\cos 2\pi n x\,dx = 0, \qquad 2\int_0^1 (1-x)u(x,y)\,dx = 0,
$$

$$
4\int_0^1 u(x,y)\sin 2\pi n x\,dx = 0, \qquad n = 1,2,\dots.
$$

Отсюда в силу полноты системы корневых функций (2.4) в пространстве $L_2[0,1]$ следует, что функция $u(x,y)=0$ почти всюду на $[0,1]$ при любом $y\in[-\alpha,\beta]$. В силу (1.2) функция $u(x,y)$ непрерывна на $\overline{D}$, поэтому $u(x,y)\equiv 0$ на $\overline{D}$.

Если при некоторых α, β и $n=l\in\mathbb{N}$ нарушено условие (2.17), т.е. $\Delta_l(\alpha,\beta)=0$, то однородная задача (1.2)–(1.5), (1.8) (где $\varphi(x)=\psi(x)\equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_l(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{y}\Delta_l(\alpha,y)}{J_{1/(2q)}(p_l\alpha^q)}\,X_l(x), & y>0,\\ \dfrac{\sqrt{-y}\Delta_l(-y,\beta)}{I_{1/(2q)}(p_l\beta^q)}\,X_l(x), & y<0,\end{cases} \tag{2.34}$$

где

$$X_l(x)=A_1(1-x)\cos 2\pi lx+A_2(1-x)+A_3\sin 2\pi lx$$

и A_i, $i=1,\ldots,3$ – произвольные постоянные.

Нетрудно показать, что построенная нами функция (2.34) принадлежит классу $C^2(\overline{D})$ и всюду в D является решением уравнения (1.1).

Естественно возникает вопрос о существовании нулей выражения $\Delta_n(\alpha,\beta)$ при фиксированном n относительно α. Выражение для $\Delta_n(\alpha,\beta)$ представим в следующем виде:

$$\Delta_n(\alpha,\beta)=I_{1/(2q)}(p_n\beta^q)\delta_n(\alpha,\beta), \tag{2.35}$$

где

$$\delta_n(\alpha,\beta)=J_{1/(2q)}(p_n\alpha^q)\frac{K_{1/(2q)}(p_n\beta^q)}{I_{1/(2q)}(p_n\beta^q)}+\overline{Y}_{1/(2q)}(p_n\alpha^q). \tag{2.36}$$

Существование нулей $\delta_n(\alpha,\beta)$ относительно α следует из того, что $J_{1/(2q)}(p_kz)$ и $\overline{Y}_{1/(2q)}(p_kz)$, $z=\alpha^q$, являются линейно независимыми решениями уравнения Бесселя

$$y''(z)+\frac{1}{z}\,y'(z)+\left[p_k^2-\left(\frac{1}{2qz}\right)^2\right]y(z)=0. \tag{2.37}$$

Поскольку функции $J_{1/(2q)}(p_kz)$ и $\delta_n(z,\beta)$ являются линейно независимыми решениями уравнения (2.37), из общей теории линейных дифференциальных уравнений [8; с. 135] следует, что нули двух линейно независимых решений уравнения Бесселя строго чередуются, т.е. на интервале между любыми последовательными нулями любого из этих решений содержится ровно один нуль другого решения. Функция $J_{1/(2q)}(p_kz)$ имеет счетное множество положительных нулей. Тогда функция $\delta_n(z,\beta)$ также имеет счетное множество положительных нулей относительно $z=\alpha^q$.

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 1. *Если существует решение задачи* (1.2)–(1.5), (1.8), *то оно единственно тогда и только тогда, когда* $\Delta_n(\alpha,\beta)\neq 0$ *при всех* $n\in\mathbb{N}$.

3. Существование решения. Поскольку α и β – любые положительные числа, при достаточно больших n выражение $\Delta_n(\alpha,\beta)$, которое входит в знаменатели формул (2.20), (2.31), может стать достаточно малым из-за существования счетного множества нулей $\delta_n(\alpha,\beta)$ относительно α^q. Следовательно, возникает проблема малых знаменателей как и при изучении задачи Дирихле для уравнения (1.1) [9].

Как известно [10; с. 99], функции $K_\nu(z) = O(z^{-1/2}e^{-z})$ и $I_\nu(z) = O(z^{-1/2}e^{z})$ при $z \to +\infty$, поэтому величина

$$J_{1/(2q)}(p_n\alpha^q)\frac{K_{1/(2q)}(p_n\beta^q)}{I_{1/(2q)}(p_n\beta^q)}$$

есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $\overline{Y}_{1/(2q)}(p_n\alpha^q)$ при больших n. Поэтому достаточно рассмотреть выражение

$$\widetilde{\delta}_n(\alpha) = \frac{2\sin(\pi/(2q))}{\pi}\,\overline{Y}_{1/(2q)}(2\pi n\alpha_q) = J_{1/(2q)}(2\pi n\alpha_q) + J_{-1/(2q)}(2\pi n\alpha_q), \qquad \alpha_q = \frac{\alpha^q}{q},$$

которое также имеет счетное множество положительных нулей относительно α.

Используя асимптотическую формулу функции

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{\pi}{2}\,\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O(z^{-3/2}), \qquad z \to \infty,$$

при $n > n_0$, где n_0 – достаточно большое натуральное число, получаем

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\,\widetilde{\delta}_n(\alpha) &= \frac{1}{\pi\sqrt{\alpha_q}}\left[\cos\left(2\pi n\alpha_q - \frac{\pi}{4q} - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2\pi n\alpha_q + \frac{\pi}{4q} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \\ &= \frac{2}{\pi}\,\alpha_q^{-1/2}\cos\left(\frac{\pi}{4q}\right)\cos\left(2\pi n\alpha_q - \frac{\pi}{4}\right) = A\cos\left(2\pi n\alpha_q - \frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

Отсюда видно, что если, например, $\alpha_q = \mu \in \mathbb{N}$, т.е. $\alpha = (\mu q)^{1/q}$, то при $n > n_0$

$$|\sqrt{n}\widetilde{\delta}_n(\alpha)| = A\left|\cos\left(2\pi n\mu - \frac{\pi}{4}\right)\right| = A\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| \geqslant \widetilde{C}_1 > 0;$$

$\widetilde{C}_i$ здесь и в дальнейшем положительные постоянные.

Пусть теперь $\alpha_q = k/m$ – рациональное число, где k и m, m и 4 – взаимно простые числа. Тогда

$$|\sqrt{n}\,\widetilde{\delta}_{k/m}(\alpha)| = A\left|\cos\left(2\pi\frac{kn}{m} - \frac{\pi}{4}\right)\right|. \tag{3.1}$$

Разделим $2kn$ на m с остатком: $2kn = sm + r$, $s, r \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $0 \leqslant r < m$. Если $r = 0$, то этот случай сводится к рассмотренному выше. Пусть $r > 0$ и ясно, что $1 \leqslant r \leqslant m-1$ и $m \geqslant 2$. Тогда выражение (3.1) примет вид

$$|\sqrt{n}\,\widetilde{\delta}_{k/m}(\alpha)\Big| = A\left|\cos\pi\left(\frac{r}{m} - \frac{1}{4}\right)\right| \geqslant \widetilde{C}_2 > 0.$$

Тем самым справедлива следующая

Лемма 1. *Если выполнено одно из следующих условий*:

1) α_q *– любое натуральное число*;
2) α_q *– любое дробное число, т.е.* $\alpha_q = k/m \notin \mathbb{N}$, *где* $k, m \in \mathbb{N}$, k *и* m, m *и* 4 *– взаимно простые числа*,

то существуют положительные постоянные n_0 $(n_0 \in \mathbb{N})$ *и* C_0, *зависящие от* α *и* q, *такие, что при любом фиксированном* $\beta > 0$ *и всех* $n > n_0$ *справедлива оценка*

$$|\sqrt{n}\delta_n(\alpha)| \geqslant C_0 > 0. \tag{3.2}$$

Если $\delta_n(\alpha, \beta) \neq 0$ при $n = 1, \dots, n_0$ и выполнена оценка (3.2), то решение задачи (1.2)–(1.5), (1.8) можно представить в виде суммы ряда

$$u(x, y) = 2(1 - x)w_0(y) + 4\sum_{n=1}^{\infty} w_n(y)(1 - x)\cos 2\pi nx + 4\sum_{n=1}^{\infty} z_n(y)\sin 2\pi nx, \tag{3.3}$$

где функции $w_0(y)$, $w_n(y)$, $z_n(y)$ находятся соответственно по формулам (2.26), (2.20), (2.31).

Теперь покажем, что при определенных условиях относительно функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ ряд (3.3) и его производные первого порядка в замкнутой области $\overline{D}$, а производные второго порядка по x и y соответственно в замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$ сходятся равномерно.

Рассмотрим следующие отношения:

$$P_n(y) = \frac{\sqrt{y}\Delta_n(\alpha, y)}{\Delta_n(\alpha, \beta)}, \qquad Q_n(y) = \frac{\sqrt{y}A_n(y, \beta)}{\Delta_n(\alpha, \beta)}, \qquad y \in [0, \beta], \tag{3.4}$$

$$M_n(y) = \frac{\sqrt{-y}B_n(\alpha, -y)}{\Delta_n(\alpha, \beta)}, \quad N_n(y) = \frac{\sqrt{-y}\Delta_n(-y, \beta)}{\Delta_n(\alpha, \beta)}, \qquad y \in [-\alpha, 0]. \tag{3.5}$$

Лемма 2. *Пусть выполнено условие* (3.2) *при всех* $n > n_0$. *Тогда для таких* n *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}
&|P_n(y)| \leqslant C_1, && |P'_n(y)| \leqslant C_2 n, && |P''_n(y)| \leqslant C_3 n^2, && \\
&|Q_n(y)| \leqslant C_4 n^{1-\lambda}, && |Q'_n(y)| \leqslant C_5 n^{\lambda}, && |Q''_n(y)| \leqslant C_6 n^{3-\lambda}, && y \in [0, \beta], \\
&|M_n(y)| \leqslant C_7 n^{\lambda} e^{-nd}, && |M'_n(y)| \leqslant C_8 n e^{-nd}, && |M''_n(y)| \leqslant C_9 n^{2+\lambda} e^{-nd}, && \\
&|N_n(y)| \leqslant C_{10} n^{\lambda}, && |N'_n(y)| \leqslant C_{11} n^{1/2+\lambda}, && |N''_n(y)| \leqslant C_{12} n^{2+\lambda}, && y \in [-\alpha, 0],
\end{aligned}$$

где $\lambda = 1/2 + 1/2q$, $d = 2\pi\beta_q$, $\beta_q = \beta^q/q$, C_i *здесь и в дальнейшем положительные постоянные.*

Доказательство. Справедливость указанных оценок функций (3.4), (3.5) и их производных устанавливается на основании асимптотических формул поведения функций Бесселя [10; с. 98–99] при $z \to 0$ и $z \to +\infty$. Здесь для примера остановимся на функциях $P_n(y)$ и $M_n(y)$. С учетом (2.35) и (3.2) из (3.4) и (2.21) при $0 \leqslant y \leqslant \beta$ и больших n имеем

$$\begin{aligned}
|P_n(y)| &\leqslant \left|\frac{\sqrt{n}J_{1/(2q)}(p_n\alpha^q)\sqrt{y}K_{1/(2q)}(p_n y^q)}{I_{1/(2q)}(p_n\beta^q)\widetilde{C}_0}\right| + \left|\frac{\sqrt{ny}I_{1/(2q)}(p_n y^q)\overline{Y}_{1/(2q)}(p_n\alpha^q)}{I_{1/(2q)}(p_n\beta^q)\widetilde{C}_0}\right| \\
&\leqslant \widetilde{C}_3|\sqrt{n}\overline{Y}_{1/(2q)}(p_n\alpha^q)| \leqslant C_1,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

так как при $y \in [0, \beta]$

$$\left|\frac{y^{1/2}I_{1/(2q)}(p_n y^q)}{I_{1/(2q)}(p_n\beta^q)}\right| \leqslant \widetilde{C}_4, \qquad |y^{1/2}K_{1/(2q)}(p_n y^q)| \leqslant \widetilde{C}_5 n^{-1/(2q)}.$$

На основании формул [10; с. 90]

$$\frac{d}{dz}[z^\nu I_\nu(z)] = z^\nu I_{\nu-1}(z), \qquad \frac{d}{dz}[z^\nu K_\nu(z)] = -z^\nu K_{\nu-1}(z)$$

вычислим производную

$$P_n'(y) = \frac{p_n q y^{q-1/2}}{\Delta_n(\alpha,\beta)}\bigl[I_{1/(2q)-1}(p_n y^q)\overline{Y}_{1/(2q)}(p_n\alpha^q) - J_{1/(2q)}(p_n\alpha^q)K_{1/(2q)-1}(p_n y^q)\bigr]. \tag{3.7}$$

Поскольку при $y \in [0,\beta]$

$$|y^{q-1/2}I_{1/(2q)-1}(p_n y^q)| \leqslant \widetilde{C}_6 n^{-(1-1/(2q))}, \qquad |y^{q-1/2}K_{1/(2q)-1}(p_n y^q)| \leqslant \widetilde{C}_7 n^{-(1-1/(2q))},$$

из формулы (3.7) с учетом (2.35) и (3.2) получим

$$\begin{aligned}|P_n'(y)| &\leqslant \frac{|p_n q\sqrt{n} y^{q-1/2} I_{1/(2q)-1}(p_n y^q)\overline{Y}_{1/(2q)}(p_n\alpha^q)|}{I_{1/(2q)}(p_n\beta^q)\widetilde{C}_0} \\ &\quad + \frac{|p_n q\sqrt{n} y^{q-1/2} J_{1/(2q)}(p_n\alpha^q)K_{1/(2q)-1}(p_n y^q)|}{I_{1/(2q)}(p_n\beta^q)\widetilde{C}_0} \\ &\leqslant \widetilde{C}_6 p_n\sqrt{n}|\overline{Y}_{1/(2q)}(p_n\alpha^q)| \leqslant C_2 n.\end{aligned}$$

Нетрудно показать, что вторая производная $P_n''(y) = (p_n q)^2 y^{2q-2} P_n(y)$. Из данного равенства в силу оценки (3.6) следует, что $|P_n''(y)| \leqslant C_3 n^2$.

Аналогично на основании (3.5), (2.22) и (2.35), (3.2) оценим функцию $M_n(y)$:

$$\begin{aligned}|M_n(y)| &\leqslant \frac{\sqrt{n}|J_{1/(2q)}(p_n\alpha^q)\sqrt{-y}\,\overline{Y}_{1/(2q)}(p_n(-y)^q)|}{I_{1/(2q)}(p_n\beta^q)\widetilde{C}_0} \\ &\quad + \frac{\sqrt{n}|\sqrt{-y}J_{1/(2q)}(p_n(-y)^q)\overline{Y}_{1/(2q)}(p_n\alpha^q)|}{I_{1/(2q)}(p_n\beta^q)\widetilde{C}_0}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Используя при любом $y \in [-\alpha,0]$ следующие оценки:

$$|\sqrt{-y}\,\overline{Y}_{1/(2q)}(p_n(-y)^q)| \leqslant \widetilde{C}_8 n^{1/(2q)}, \qquad |\sqrt{-y}J_{1/(2q)}(p_n(-y)^q)| \leqslant \widetilde{C}_9 n^{1/(2q)},$$

из неравенства (3.8) получим

$$|M_n(y)| \leqslant C_7 n^\lambda e^{-nd}. \tag{3.9}$$

С учетом формул [10; с. 20]

$$\frac{d}{dz}(z^\nu J_\nu(z)) = z^\nu J_{\nu-1}(z), \qquad \frac{d}{dz}(z^\nu J_{-\nu}(z)) = -z^\nu J_{1-\nu}(z)$$

вычислим производную

$$\begin{aligned}M_n'(y) &= \frac{\pi(-y)^{q-1/2}p_n q}{2\sin(\pi/(2q))\Delta_n(\alpha,\beta)} \\ &\quad\times [J_{1/(2q)}(p_n\alpha^q)J_{1-1/(2q)}(p_n(-y)^q) + J_{-1/(2q)}(p_n\alpha^q)J_{1/(2q)-1}(p_n(-y)^q)].\end{aligned}$$

Отсюда в силу (2.35) и (3.2) получим $|M_n'(y)| \leqslant C_8 n^\lambda e^{-nd}$.

Вторая производная функции $M_n(y)$ имеет вид $M_n''(y) = (p_n q)^2 y^{2q-2} M_n(y)$. Тогда из оценки (3.9) следует, что $|M_n''(y)| \leqslant C_9 n^{2+\lambda} e^{-nd}$.

Лемма 3. *Справедливы следующие утверждения*:

1) *функции* $z_n^+(y)$ *и* $z_n^-(y)$ *являются решениями неоднородного уравнения* (2.27) *при* $y>0$ *и* $y<0$ *соответственно и удовлетворяют нулевым начальным условиям*
$$z_n^+(0)=0,\quad {z_n^+}'(0)=0,\quad z_n^-(0)=0,\quad {z_n^-}'(0)=0;$$

2) *при* $0<\varepsilon\leqslant y\leqslant\beta$ *и больших* n *выполняются оценки*
$$|z_n^+(y)|\leqslant\widetilde{C}_3 n^{-3/2}(|a_n|e^{-2\pi n\beta_q}+|b_n|e^{-2\pi n\varepsilon_q}),$$
$$|{z_n^+}''(y)|\leqslant\widetilde{C}_4 n^{1/2}(|a_n|e^{-2\pi n\beta_q}+|b_n|e^{-2\pi n\varepsilon_q});$$

3) *при* $-\alpha\leqslant y\leqslant-\varepsilon<0$ *и больших* n *выполняются оценки*
$$|z_n^-(y)|\leqslant\widetilde{C}_5(|c_n|+|d_n|)n^{-1/2},\qquad |{z_n^-}''(y)|\leqslant\widetilde{C}_6 n^{3/2}(|c_n|+|d_n|),$$

где $\varepsilon>0$ *– достаточно малое число*, $\beta_q=\beta^q/q$, $\varepsilon_q=\varepsilon^q/q$.

Доказательство проводится на основании (2.32) и (2.33) с использованием асимптотических формул поведения функций Бесселя при $z\to0$ и $z\to+\infty$. Подробное изложение приведено в ([7; § 1.1, § 2.1]).

Лемма 4. *Пусть выполнено условие* (3.2) *при всех* $n>n_0$. *Тогда для таких* n *имеют место оценки*
$$|w_n(y)|\leqslant C_{13}(|\varphi_n|+n^\lambda|\psi_n|),\qquad |w_n'(y)|\leqslant C_{14}(|\varphi_n|n+n^{1/2+\lambda}|\psi_n|),$$
$$|w_n''(y)|\leqslant C_{15}(n^2|\varphi_n|+n^{2+\lambda}|\psi_n|),$$
$$|z_n(y)|\leqslant C_{16}(|\varphi_{1n}|+n^\lambda|\psi_{1n}|),\qquad |z_n'(y)|\leqslant C_{17}(n|\varphi_{1n}|+n^{1/2+\lambda}|\psi_{1n}|),$$
$$|z_n''(y)|\leqslant C_{18}(n^2|\varphi_{1n}|+n^{2+\lambda}|\psi_{1n}|).$$

Справедливость этих оценок следует из лемм 2 и 3.

Лемма 5. *Если* $\varphi(x)\in C^3[0,1]$, $\psi(x)\in C^{3+\gamma}[0,1]$, $\gamma>\lambda$,
$$\varphi'(0)=\varphi'(1),\quad \psi'(0)=\psi'(1),\quad \varphi(1)=0,\quad \psi(1)=0,\quad \varphi''(1)=0,\quad \psi''(1)=0,$$
то справедливы оценки:
$$|\varphi_n|\leqslant\frac{C_{19}|g_n|}{n^3},\quad |\varphi_{1n}|\leqslant C_{20}\biggl(\frac{|g_{1n}|}{n^3}+\frac{|g_n|}{n^4}\biggr),\quad |\psi_n|\leqslant\frac{C_{21}}{n^{3+\gamma}},\quad |\psi_{1n}|\leqslant\frac{C_{22}}{n^{3+\gamma}},\tag{3.10}$$
где
$$g_n=\int_0^1\varphi'''(x)\sin(2\pi nx)\,dx,\qquad g_{1n}=\int_0^1\varphi'''(x)x\cos(2\pi nx)\,dx,$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}g_n^2<+\infty,\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}g_{1n}^2<+\infty.\tag{3.11}$$

Доказательство. С учетом условий леммы интегрируем по частям три раза в интегралах (2.12), (2.28) и (2.29). Затем, применяя теорему о скорости убывания коэффициентов ряда Фурье функции, удовлетворяющей на [0,1] условию Гёльдера с показателем $\gamma\in(0,1]$, получим оценки (3.10). Обоснование сходимости рядов (3.11) проводится аналогично [2].

Таким образом, в силу лемм 4 и 5 ряд (3.3) при любом (x, y) из $\overline{D}$ мажорируется сходящимся рядом

$$C_{23} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \left(|g_n| + |g_{1n}| + \frac{1}{n^{\gamma-\lambda}} \right),$$

поэтому ряд (3.3) в силу признака Вейерштрасса сходится абсолютно и равномерно в замкнутой области $\overline{D}$. Ряды из производных первого порядка на $\overline{D}$ и из производных второго порядка мажорируются соответственно на замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$ сходящимся числовым рядом

$$C_{24} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(|g_n| + |g_{1n}| + \frac{1}{n^{\gamma-\lambda}} \right).$$

Поэтому сумма $u(x, y)$ ряда (3.3) принадлежит классу (1.2) и удовлетворяет уравнению (1.1) на множестве $D_+ \cup D_-$.

Если для указанных в лемме 1 значений α_q при $l = k_1, k_2, \ldots, k_m$, где

$$1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_m \leqslant n_0,$$

k_i, $i = 1, \ldots, m$, и m – заданные натуральные числа, выполняется $\Delta_l(\alpha, \beta) = 0$, то для разрешимости задачи (1.2)–(1.5), (1.8) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\varphi_l \sqrt{\alpha} J_{1/(2q)}(p_l \alpha^q) + \psi_l \sqrt{\beta} I_{1/(2q)}(p_l \beta^q) = 0, \tag{3.12}$$

$$\varphi_{1l} \sqrt{\alpha} J_{1/(2q)}(p_l \alpha^q) + \psi_{1l} \sqrt{\beta} I_{1/(2q)}(p_l \beta^q) = 0, \qquad l = k_1, k_2, \ldots, k_m. \tag{3.13}$$

Тогда решение задачи определяется в виде суммы ряда

$$\begin{aligned} u(x, y) = 2(1 - x) w_0(y) \\ &+ 4 \left(\sum_{n=1}^{k_1 - 1} + \sum_{n=k_1+1}^{k_2 - 1} + \cdots + \sum_{n=k_m+1}^{+\infty} \right) [z_n(y) \sin 2\pi n x + (1 - x) w_n(y) \cos 2\pi n x] \\ &+ \sum_l u_l(x, y), \end{aligned} \tag{3.14}$$

где в последней сумме l принимает значения $k_1, k_2, \ldots, k_m$ и функции $u_l(x, y)$ определяются по формуле

$$u_l(x, y) = \begin{cases} \left(\dfrac{\varphi_l \sqrt{y}\, I_{1/(2q)}(p_l y^q)}{\sqrt{\beta}\, I_{1/(2q)}(p_l \beta^q)} + \dfrac{\varphi_{1l} \sqrt{y}\, I_{1/(2q)}(p_l y^q)}{\sqrt{\beta}\, I_{1/(2q)}(p_l \beta^q)} \right. \\ \qquad \left. + C_l \dfrac{\sqrt{y}\, \Delta_l(\alpha, y)}{J_{1/(2q)}(p_l \alpha^q)} \right) X_l(x), & y > 0, \\ \left(\dfrac{\psi_l \sqrt{-y}\, J_{1/(2q)}(p_l (-y)^q)}{\sqrt{\alpha}\, J_{1/(2q)}(p_l \alpha^q)} + \dfrac{\psi_{1l} \sqrt{-y}\, J_{1/(2q)}(p_l (-y)^q)}{\sqrt{\alpha}\, J_{1/(2q)}(p_l \alpha^q)} \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{\sqrt{-y}\, \Delta_l(-y, \beta)}{I_{1/(2q)}(p_l \beta^q)} \right) X_l(x), & y < 0, \end{cases}$$

где C_l – произвольная постоянная; конечные суммы в (3.14) следует считать нулями при условии, когда верхний предел меньше нижнего.

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 5 и выполнена оценка (3.2) при $n > n_0$. Тогда если $\delta_n(\alpha, \beta) \neq 0$ при всех $n = 1, \dots, n_0$, то существует единственное решение задачи (1.2)–(1.5), (1.8) и это решение определяется рядом (3.3); если $\delta_n(\alpha, \beta) = 0$ при некоторых $n = k_1, k_2, \dots, k_m \leqslant n_0$, то задача (1.2)–(1.5), (1.8) разрешима только тогда, когда выполнены условия (3.12), (3.13) и решение определяется рядом (3.14).*

В силу доказанной теоремы 2 построенная нами функция (3.3) удовлетворяет всем условиям задачи (1.2)–(1.5) и (1.8), когда для функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ выполнены условия леммы 5, но при этом функция (3.3) не удовлетворяет равенству (1.6), т.е. функция (3.3) не является решением задачи (1.2)–(1.6). На основании теоремы 2 нетрудно получить следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия теоремы 2 и условия (1.7). Тогда если $\delta_n(\alpha, \beta) \neq 0$ при всех $n = 1, \dots, n_0$, то существует единственное решение задачи (1.2)–(1.6) и оно определяется рядом (3.3), где $w_0(y) = A$; если $\delta_n(\alpha, \beta) = 0$ при некоторых $n = k_1, k_2, \dots, k_m \leqslant n_0$, то задача (1.2)–(1.6) разрешима только тогда, когда выполнены условия (3.12), (3.13) и решение определяется рядом (3.14) при $\omega_0(y) = A$.*

В силу формул (2.20), (2.26), (2.31) нетрудно показать справедливость равенств

$$\begin{aligned} w_n''(0+) &= w_n''(0-), \qquad n = 0, 1, 2, \dots, \\ z_n''(0+) &= z_n''(0-), \qquad n = 1, 2, \dots . \end{aligned}$$

Отсюда получаем качественный результат о стирании особенности на линии изменения типа уравнения (1.1).

Следствие. *Построенное решение $u(x, y)$ задачи принадлежит классу $C^2(\overline{D})$ и функция $u(x, y)$ всюду в D является решением уравнения (1.1).*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1966.

[2] Н. И. Ионкин, “Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием”, *Дифференц. уравнения*, **13**:2 (1977), 294–304.

[3] К. Б. Сабитов, “Краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа с нелокальным интегральным условием”, *Дифференц. уравнения*, **46**:10 (2010), 1468–1478.

[4] Ю. К. Сабитова, “Нелокальные начально-граничные задачи для вырождающегося гиперболического уравнения”, *Изв. вузов. Матем.*, 2009, № 12, 49–58.

[5] Ю. К. Сабитова, “Критерий единственности решения нелокальной задачи для вырождающегося уравнения смешанного типа в прямоугольной области”, *Дифференц. уравнения*, **46**:8 (2010), 1205–1208.

[6] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.

[7] Ю. К. Сабитова, *Краевые задачи с нелокальным условием для уравнений смешанного типа в прямоугольной области*, Дис. … канд. физ.-матем. наук, СГПА, Стерлитамак, 2007.

[8] Ф. Трикоми, *Дифференциальные уравнения*, ИЛ, М., 1962.

[9] К. Б. Сабитов, "Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области", *Докл. РАН*, **413**:1 (2007), 23–26.

[10] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*. Т. 2. *Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1966.

Ю. К. Сабитова
Стерлитамакский филиал БашГУ; Институт прикладных исследований, г. Стерлитамак
E-mail: sabitovauk@rambler.ru

Поступило
01.05.2011
Исправленный вариант
03.03.2015