Д. В. Егоров, QR-подмногообразия и римановы метрики с группой голономии G_2,

Матем. заметки, 2011, том 90, выпуск 5, 781–784

QR-подмногообразия и римановы метрики с группой голономии G_2

Д. В. Егоров

1. Введение

Изучению многообразий с группой голономии G_2 препятствует недостаток явных примеров. Первые примеры полных римановых метрик с группой голономии G_2 были построены Брайантом и Саламоном в [1], а первые компактные примеры – Джойсом [2]. Позже Ковалев построил еще несколько семейств компактных примеров [3], [4]. Заметим, что метрики, построенные в работах [2]–[4] не задаются явными формулами.

Нехватка примеров является следствием того, что G_2-многообразия, вообще говоря, не являются алгебраическими в широком смысле данного термина.

В данной работе мы делаем попытку частично объяснить этот факт, выдвигая гипотезу, что в общем случае G_2-многообразия являются QR-подмногообразиями гиперкэлеровых многообразий. Примерами QR-подмногообразий являются вещественные гиперповерхности гиперкэлеровых многообразий.

1.1. G_2-структура. Определим 3-форму Ω_0 на $\mathbb{R}^7$ по следующей формуле:

$$\Omega_0 = x^{127} + x^{136} + x^{145} + x^{235} - x^{246} + x^{347} + x^{567}, \tag{1}$$

где $x^{ijk} = x^i \wedge x^j \wedge x^k$. Подгруппа $GL(7,\mathbb{R})$, сохраняющая ориентацию и форму Ω_0, называется группой G_2.

Пусть M – ориентируемое замкнутое многообразие размерности 7. На многообразии M задана G_2-структура, если существует глобальная 3-форма Ω такая, что всюду на M она поточечно совпадает с Ω_0 при подходящем выборе координат.

G_2-структура задает ориентацию и риманову метрику g_Ω по следующей формуле:

$$(i_\xi\Omega) \wedge (i_\eta\Omega) \wedge \Omega = -6 g_\Omega(\xi,\eta)\mathrm{Vol}_\Omega.$$

1.2. Векторные произведения. В данном разделе мы основываемся на работе [5]. Пусть M является многообразием с G_2-структурой. Векторное произведение на M – это по определению кососимметрическое полилинейное гладкое отображение $P\colon TM\times TM \to TM$, следующим образом согласованное с метрикой g:

$$g(P(e_1,e_2),e_i) = 0, \qquad i = 1,2, \tag{2}$$

$$\|P(e_1,e_2)\|^2 = \|e_1\|^2\|e_2\|^2 - g(e_1,e_2)^2, \qquad \|e\|^2 = g(e,e). \tag{3}$$

Будем также обозначать $P(e_1,e_2)$ через $e_1 \times e_2$.

Векторное произведение однозначно задается 3-формой Ω:

$$\Omega(e_1,e_2,e_3) = g(P(e_1,e_2),e_3). \tag{4}$$

Обратно, по векторному произведению мы можем задать метрику g, используя следующее тождество:

$$P(e_1,P(e_1,e_2)) = -\|e_1\|^2 e_2 + g(e_1,e_2)e_1. \tag{5}$$

Используя (4), по векторному произведению и метрике можно восстановить 3-форму Ω. Таким образом, задание векторного произведения эквивалентно заданию G_2-структуры.

Известно, что если $\nabla P = 0$ относительно метрической связности, то группа голономии M является подгруппой G_2 и совпадает с ней при условии, что $\pi_1(M)$ является конечной группой [2].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00598-а) и программ Президента РФ "Ведущие научные школы" (грант № НШ-7256.2010.1) и "Молодые кандидаты" (грант № МК-842.2011.1).

1.3. QR-подмногообразия. Гиперкэлерово многообразие – это по определению ориентируемое $4n$-мерное риманово многообразие, группа голономии которого содержится в $Sp(n)$.

Подмногообразие M гиперкэлерова многообразия $\overline{M}$ называется QR-*подмногообразием* [6], если нормальное расслоение раскладывается в прямую сумму, $NM = \nu \oplus \nu^{\perp}$ со следующими свойствами:

$$J_i\nu \subset \nu, \qquad J_i\nu^{\perp} \subset TM, \tag{6}$$

где J_i являются комплексными структурами многообразия $\overline{M}$.

Везде далее мы будем рассматривать QR-подмногообразия с $\dim \nu^{\perp} = 1$. Мы будем называть их QR-*подмногообразиями гиперповерхностного типа*.

2. Основной результат

Теорема 1. *Ориентируемое многообразие M вещественной размерности* 7, *являющееся* QR-*подмногообразием гиперповерхностного типа гиперкэлерова многообразия* $\overline{M}$, *обладает G_2-структурой, совместной с индуцированной метрикой.*

Доказательство. Построим векторное произведение, совместное с индуцированной метрикой.

Обозначим через n единичное нормальное векторное поле, лежащее в $\nu^{\perp} \subset NM$. Из определения QR-подмногообразия (6) следует, что $\xi_i = J_i n \in TM$ являются невырожденными векторными полями на M. Это согласуется с работой [7], из которой следует, что на многообразии с G_2-структурой существует 3 невырожденных векторных поля.

Пусть ξ_i являются единичными взаимно ортогональными относительно индуцированной метрики векторами всюду на M. Дополним локально ξ_i до ортонормированного базиса и недостающие вектора обозначим через ξ_α, т.е. греческими индексами.

Зададим векторное произведение P следующими формулами:

$$P(\xi_i, \xi_j) = \xi_k, \qquad (ijk) \in (123), \tag{7}$$

$$P(\xi_i, \xi_\alpha) = J_i(\xi_\alpha), \tag{8}$$

$$P(\xi_\alpha, J_i(\xi_\alpha)) = \xi_i. \tag{9}$$

Из определения QR-подмногообразия гиперповерхностного типа следует, что для любых ξ_α, ξ_β существует комплексная структура J_i такая, что $J_i\xi_\alpha = \xi_\beta$. Таким образом, уравнения (7)–(9) задают векторное произведение на всех базисных векторах.

Очевидно P удовлетворяет тождеству (5) для всех базисных векторов и, следовательно, P совместимо с индуцированной метрикой.

Поставим себе задачу найти условия, при которых введенное векторное произведение является параллельным.

Обозначим через $\overline{\nabla}$ и ∇ связность, согласованную с метрикой $\overline{M}$ и M соответственно.

Утверждение 1. *Имеем*

$$\nabla\xi_i = J_i(\overline{\nabla}n) - b(\xi_i), \tag{10}$$

$$(\nabla J_i)(\xi_\alpha) = J_i \circ b(\xi_\alpha) - b \circ J_i(\xi_\alpha). \tag{11}$$

Доказательство. По формуле Гаусса

$$\overline{\nabla}\xi_i = \nabla\xi_i + b(\xi_i), \tag{12}$$

где $b(\xi_i) = b(\xi_i, \cdot)$, и b – это вторая фундаментальная форма.

С другой стороны, из определения гиперкэлерова многообразия следует, что

$$\overline{\nabla}\xi_i = \overline{\nabla}J_i(n) = (\overline{\nabla}J_i)(n) + J_i(\overline{\nabla}n). \tag{13}$$

Из (12) и (13) получаем искомую формулу (10).

Аналогично по формуле Гаусса

$$\overline{\nabla}(J_i\xi_\alpha) = \nabla(J_i(\xi_\alpha)) + b(J_i(\xi_\alpha)) = (\nabla J_i)(\xi_\alpha) + J_i(\nabla\xi_\alpha) + b(J_i(\xi_\alpha)). \tag{14}$$

С другой стороны,

$$\overline{\nabla}(J_i\xi_\alpha) = (\overline{\nabla}J_i)(\xi_\alpha) + J_i(\overline{\nabla}\xi_\alpha). \tag{15}$$

Из (14) и (15) получаем формулу (11).

Далее мы выпишем компоненты тензора ∇P. Введем обозначения для следующих тензоров:

$$X_i(\xi) = J_i(\overline{\nabla}_\xi n) - b(J_i n, \xi), \qquad Y_i(\xi,\eta) = J_i b(\xi,\eta) - b(\xi, J_i\eta).$$

Утверждение 2. *Имеем*

$$(\nabla P)(\xi_i,\xi_j) = X_k - X_i \times \xi_j - \xi_i \times X_j, \tag{16}$$

$$(\nabla P)(\xi_i,\xi_\alpha) = Y_i(\xi_\alpha) - X_i \times \xi_\alpha, \tag{17}$$

$$(\nabla P)(\xi_i,\xi_\alpha) = Y_i(\xi_\alpha) - X_i \times \xi_\alpha. \tag{18}$$

Доказательство. Докажем формулу (16). Продифференцируем (7):

$$(\nabla P)(\xi_i,\xi_j) = \nabla\xi_k - P(\nabla\xi_i,\xi_j) - P(\xi_i,\nabla\xi_j). \tag{19}$$

Подставив (10) в (19) и использовав (7), получим формулу (16).

Аналогично дифференцируя формулы (8) и (9) с использованием определения векторного произведения, получим формулы (17) и (18).

Приравнивая к нулю (16)–(18), мы сформулируем следующую теорему. При этом заметим, что выражения (17) и (18) эквивалентны.

Теорема 2. *Пусть M – ориентируемое многообразие вещественной размерности* 7, *являющееся* QR-*подмногообразием гиперповерхностного типа гиперкэлерова многообразия $\overline{M}$. Тогда M обладает группой голономии, содержащейся в G_2, при выполнении следующих уравнений*:

$$X_k(\xi) - X_i(\xi) \times \xi_j - \xi_i \times X_j(\xi) = 0, \tag{20}$$

$$Y_i(\xi,\eta) - X_i(\xi) \times \eta = 0 \tag{21}$$

для любых $\xi, \eta, J_i\eta \in \Gamma(TM)$, $i = 1,2,3$.

Пример. Простейшими примерами компактных QR-подмногообразий с группой голономии, содержащейся в G_2, служат вполне геодезические QR-подмногообразия – гиперповерхности. Например, вложение плоских торов: $T^7 \hookrightarrow T^8$ и $T^3 \times K3 \hookrightarrow T^4 \times K3$.

3. Гипотеза

Как мы уже отмечали, из работы [7] следует, что G_2-многообразие M обладает тремя невырожденными единичными векторными полями ξ_i. На $\xi_i^\perp$ можно ввести почти комплексную структуру по формуле (5).

В работе [8] показано, что если M обладает метрикой с группой голономии, являющейся подгруппой G_2, то данные почти комплексные структуры интегрируемы.

Вследствие интегрируемости, мы выдвигаем следующую гипотезу.

Гипотеза. *Любое многообразие с группой голономии G_2 реализуется в виде удовлетворяющего условиям теоремы* 2 QR-*подмногообразия некоторого гиперкэлерова многообразия.*

Автор благодарит И. А. Тайманова и Я. В. Базайкина за ценные замечания и поддержку.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] R. L. Bryant, S. M. Salamon, *Duke Math. J.*, **58**:3 (1989), 829–850. **[2]** D. D. Joyce, *J. Differential Geom.*, **43**:2 (1996), 291–328; D. D. Joyce, 329–375. **[3]** A. Kovalev, *J. Reine Angew. Math.*, **565** (2003), 125–160. **[4]** A. Kovalev, J. Nordström, *Ann. Global Anal. Geom.*, **38**:3 (2010), 221–257. **[5]** A. Gray, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **141** (1969), 465–504; *Trans. Amer. Math. Soc.*, **148**:2 (1970), 625. **[6]** A. Bejancu, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **69**:1 (1978), 135–142; *Trans. Amer. Math. Soc.*, **250** (1979), 333–345. **[7]** E. Thomas, *Ann. of Math.* (2), **85**:2 (1967), 184–217. **[8]** M. Verbitsky, *A CR twistor space of a G_2-manifold*, arXiv: 1003.3170.

Д. В. Егоров
Северо-Восточный федеральный университет
им. М. К. Аммосова, г. Якутск
E-mail: egorov.dima@gmail.com

Поступило
28.04.2011