И. Б. Кайгородов, О $(n+1)$-арных дифференцированиях полупростых алгебр Филиппова,
Матем. заметки, 2014, том 96, выпуск 2, 217–227

https://www.mathnet.ru/mzm9382

Математические заметки

Том 96 выпуск 2 август 2014

УДК 512.554

О $(n+1)$-арных дифференцированиях полупростых алгебр Филиппова

И. Б. Кайгородов

Описана структура обобщенных и $(n+1)$-арных дифференцирований простых и полупростых конечномерных алгебр Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Приводится пример полупростой тернарной алгебры Мальцева, не являющейся алгеброй Филиппова, обладающей нетривиальным 4-арным дифференцированием.

Библиография: 33 названия.

DOI: 10.4213/mzm9382

1. Введение. Одним из способов обобщения операции дифференцирования является δ-дифференцирование. Под *δ-дифференцированием* алгебры A при δ – фиксированном элементе основного поля мы понимаем линейное отображение $\phi : A \to A$ такое, что для произвольных $x, y \in A$ верно

$$\phi(xy) = \delta(\phi(x)y + x\phi(y)).$$

В свое время δ-дифференцирования изучались в работах [1]–[14], где были описаны δ-дифференцирования первичных лиевых алгебр [1], [2], первичных альтернативных и мальцевских алгебр [3], простых и первичных лиевых супералгебр [6], [7], [4], полупростых конечномерных йордановых алгебр и супералгебр [5], [7], [8], [10], полупростых структуризуемых алгебр [13], алгебр Филиппова малых размерностей и простых конечномерных алгебр Филиппова [11], а также простой тернарной алгебры Мальцева M_8 [11]. В частности, были построены примеры нетривиальных δ-дифференцирований для некоторых алгебр Ли [2], [4], [12], простых йордановых супералгебр [8], [10] и n-арных алгебр Филиппова размерности $n+1$ (см. [11]). Понятие δ-дифференцирования допускает естественное обобщение до (α, β, γ)-дифференцирования, которое изучалось в работах [15], [16].

В то же время δ-дифференцирование является частным случаем квазидифференцирования и обобщенного дифференцирования, а (α, β, γ)-дифференцирование является частным случаем обобщенного дифференцирования, хотя, в не(анти)коммутативном случае, может и не являться квазидифференцированием. Под *обобщенным дифференцированием* D мы понимаем такое линейное отображение, что существуют линейные отображения E и F, связанные с D следующим условием: для

Работа выполнена при поддержке Президента РФ (грант № МК-330.2013.1), Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-33031) и фонда FAPESP (грант № 2011/51132-9).

произвольных $x, y \in A$ верно

$$D(xy) = E(x)y + xF(y).$$

Если вдобавок к этому $E = F$, то D – квазидифференцирование. Тройки (D, E, F), где D – обобщенное дифференцирование, а E, F – связанные с ним линейные отображения, называются *тернарными дифференцированиями*. Квазидифференцирования, обобщенные дифференцирования и тернарные дифференцирования рассматривались в работах [17]–[26]. В частности, изучались обобщенные и тернарные дифференцирования алгебр Ли [17], супералгебр Ли [18], ассоциативных алгебр [19], [20], обобщенных алгебр Кэли–Диксона [21], йордановых алгебр и супералгебр [24], [25] и алгебр Мальцева [26]. Необходимо отметить, что в предшествующих работах (см. [17]–[19]) под обобщенным дифференцированием понимается другая компонента тернарного дифференцирования, а именно, компонента E для тернарного дифференцирования (D, E, F). Однако мы считаем свое определение обобщенного дифференцирования как компоненты D более логичным, поскольку в определяющем равенстве только она одна занимает особое положение по отношению к компонентам E и F. Особенно это становится наглядно в случае алгебр с единицей и (анти)коммутативных алгебр.

В отличие от обыкновенных алгебр с бинарной операцией умножения, мы рассматриваем алгебры с n-арной (при $n > 2$) операцией умножения (подробнее см. [27], [28]). Заметим, что n-арные алгебры имеют широкое применение в современной математической физике. Так, одним из источников возникновения алгебр Филиппова стала механика Намбу, предложенная в [29]. В дальнейшем было выявлено более широкое применение n-арных алгебр в математической физике, например, связь с теорией Черна–Симонса (подробнее о применениях n-арных алгебр см. [30], [31]).

Понятие тернарного дифференцирования для бинарной алгебры допускает обобщение на случай n-арных алгебр. В данном случае под $(n+1)$*-арным дифференцированием* n-арной алгебры A мы подразумеваем такой набор $(f_0, f_1, \dots, f_n) \in \mathrm{End}(A)^{n+1}$, что для произвольных $x_1, \dots, x_n \in A$ верно

$$f_0[x_1, \dots, x_n] = \sum_{i=1}^{n} [x_1, \dots, f_i(x_i), \dots, x_n].$$

Соответственно, для $(n+1)$-арного квазидифференцирования необходимо дополнительно требовать $f_1 = f_2 = \dots = f_n$. Под *центроидом* n-арной алгебры A мы понимаем следующее множество элементов:

$$\{\phi \in \mathrm{End}(A) \mid \phi[x_1, \dots, x_n] = [x_1, \dots, \phi(x_i), \dots, x_n]\}.$$

Ясно, что если $\psi_1, \dots, \psi_n$ – набор элементов центроида n-арной алгебры A, то $(\sum \psi_i, \psi_1, \dots, \psi_n)$ является $(n+1)$-арным дифференцированием алгебры A. В то же время, если D – дифференцирование n-арной алгебры A, то набор $(D, D, \dots, D)$ – $(n+1)$-арное дифференцирование алгебры A.

Приведенные два вида $(n+1)$-арных дифференцирований, как и их линейные комбинации, мы будем считать тривиальными. Наибольший интерес представляет вопрос нахождения $(n+1)$-арных дифференцирований, отличных от тривиальных. Легко заметить следующий факт.

Утверждение. *Пусть A – (анти)коммутативная n-арная алгебра, и пусть $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ – $(n+1)$-арное дифференцирование. Тогда для любой подстановки $\sigma \in S_n$ верно, что $(f_0, f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(n)})$ – $(n+1)$-арное дифференцирование.*

Доказательство данного факта вытекает из известного утверждения о разложении произвольной подстановки в произведение транспозиций и очевидности данного утверждения для случая, когда σ – транспозиция. Утверждение доказано.

Обозначим пространство дифференцирований, δ-дифференцирований, квазидифференцирований и обобщенных дифференцирований соответственно через

$$\mathrm{Der}(A), \qquad \mathrm{Der}_\delta(A), \qquad Q\,\mathrm{Der}(A), \qquad G\,\mathrm{Der}(A).$$

Очевидно, что мы имеем цепочку включений

$$\mathrm{Der}(A) \subseteq \mathrm{Der}_\delta(A) \subseteq Q\,\mathrm{Der}(A) \subseteq G\,\mathrm{Der}(A) \subseteq \mathrm{End}(A). \tag{1}$$

Стоит отметить, что если n-арная алгебра A с ненулевым умножением и характеристика поля отлична от $n-1$, то первое включение всегда строгое. В противном случае в силу того, что тождественное отображение является элементом центроида и $(1/n)$-дифференцированием, мы получили бы противоречение с определением умножения в алгебре A. Понятно, что в случае бинарных алгебр ограничение на характеристику поля является несущественным. Ясно, что $\mathrm{Der}(A)$, $\mathrm{Der}_\delta(A)$, $Q\,\mathrm{Der}(A)$ и $G\,\mathrm{Der}(A)$ – подалгебры алгебры Ли $\mathrm{End}(A)^{(-)}$. Пусть $\mathrm{Ann}(G\,\mathrm{Der}(A))$ – аннулятор алгебры Ли обобщенных дифференцирований алгебры A. Отметим, что $\mathrm{Ann}(G\,\mathrm{Der}(A))$ нетривиален. Действительно, там лежат отображения вида $\alpha \cdot \mathrm{id}$, где α – элемент основного поля. Обозначим

$$\Delta(A) = G\,\mathrm{Der}(A)/\,\mathrm{Ann}(G\,\mathrm{Der}(A)).$$

Также нас будет интересовать структура алгебры Ли $\Delta(A)$. $(n+1)$-Арные дифференцирования исследовались в работе [26], где были описаны 4-арные и обобщенные дифференцирования тернарной алгебры Мальцева M_8. В частности, было показано, что тернарная алгебра M_8 не имеет нетривиальных 4-арных дифференцирований и $\Delta(M_8) = B_3$.

Основной целью данной работы, результаты которой аннонсированы в [32], является исследование обобщенных и $(n+1)$-арных дифференцирований простых и полупростых конечномерных n-арных алгебр Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. В работе дано полное описание квазидифференцирований, обобщенных дифференцирований и $(n+1)$-арных дифференцирований данных алгебр. В итоге с использованием результатов [11] мы имеем, что для простой конечномерной алгебры Филиппова A над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль цепочка включений (1) имеет следующий вид:

$$\mathrm{Der}(A) \subset \mathrm{Der}_\delta(A) \subset Q\,\mathrm{Der}(A) = G\,\mathrm{Der}(A) = \mathrm{End}(A),$$

т.е. в последних двух случаях у нас наблюдается равенство, а остальные все включения строгие. Как следствие, мы получаем описание $(n+1)$-арных дифференцирований полупростых конечномерных алгебр Филиппова (не являющихся простыми) над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль, для которых цепочка включений (1) имеет следующий вид:

$$\mathrm{Der}(A) \subset \mathrm{Der}_\delta(A) \subset Q\,\mathrm{Der}(A) = G\,\mathrm{Der}(A) \subset \mathrm{End}(A).$$

2. Основные леммы. *Алгеброй Филиппова*, определение которой появляется в [27], называется алгебра L с одной антикоммутативной n-арной операцией $[x_1, \dots, x_n]$, удовлетворяющей тождеству

$$[[x_1, \dots, x_n], y_2, \dots, y_n] = \sum_{i=1}^{n} [x_1, \dots, [x_i, y_2, \dots, y_n], \dots, x_n].$$

Примером $(n+1)$-мерной n-арной алгебры Филиппова является алгебра, которую мы будем обозначать A_{n+1}. Известно, что в A_{n+1} можно выбрать базис

$$\{e\} = \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$$

со следующей таблицей умножения:

$$[e_1, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_{n+1}] = (-1)^{n+i+1} e_i,$$

где через $\widehat{e}_i$ обозначается отсутствие элемента e_i в n-арном произведении. Как было отмечено в работе [33], алгебрами типа A_{n+1} исчерпываются все простые конечномерные n-арные алгебры Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль.

Лемма 1. *Пусть $A = (a_{ij})$, где $a_{ii} = 0$ – матрица линейного преобразования f_0 и $B = -A^T$ – матрица линейного преобразования f. Тогда $(f_0, f, \dots, f)$ – $(n+1)$-арное дифференцирование n-арной алгебры A_{n+1}.*

Доказательство. Достаточно заметить, что выполнена следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
(-1)^{n+i+1} f_0[e_1, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_{n+1}] &= f_0(e_i) = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ji} e_j \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{n+j+1} a_{ji} [e_1, \dots, \widehat{e}_j, \dots, e_{n+1}] \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{n+i+1} \Bigl[e_1, \dots, \underbrace{-\sum_{k=1}^{n+1} a_{jk} e_k}_{j}, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_{n+1}\Bigr] \\
&= (-1)^{n+i+1} \sum_{j=1}^{n+1} [e_1, \dots, \underbrace{f(e_j)}_{j}, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_{n+1}].
\end{aligned}$$

Цепочка равенств

$$\begin{aligned}
&[f(e_i), e_i, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-2}}] - [f(e_i), e_i, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-2}}] \\
&\qquad = [f(e_i), e_i, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-2}}] + [e_i, f(e_i), e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-2}}] + \dots + [e_i, e_i, e_{i_1}, \dots, f(e_{i_{n-2}})] \\
&\qquad = f_0[e_i, e_i, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-2}}]
\end{aligned}$$

выполняется в силу того, что левое и правое выражения в цепочке равны нулю. Ясно, что если среди $\{i_k\}$ найдется индекс, совпадающий с i, то цепочка равенств не нарушается. Лемма доказана.

Далее, для произвольного вектора v через $v|_{e_i}$ мы будем обозначать коэффициент при векторе e_i в его разложении по базису $\{e\}$.

Лемма 2. *Пусть* $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ – $(n+1)$*-арное дифференцирование* n*-арной алгебры* A_{n+1}. *Тогда*

$$(f_0, f_1, \dots, f_n) = (g_0, g, \dots, g) + (f_0^*, f_1^*, \dots, f_n^*),$$

где

$$f_j^*(e_i)|_{e_i} e_i = f_j^*(e_i) \qquad \text{и} \qquad g_0(e_i)|_{e_i} = g(e_i)|_{e_i} = 0.$$

Доказательство. Отметим, что если $i_k = i_m = i$, то

$$\begin{aligned} 0 = f_0[e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, \dots, e_{i_m}, \dots, e_{i_n}] &= \sum [e_{i_1}, \dots, f_j(e_{i_j}), \dots, e_{i_n}] \\ = [e_{i_1}, \dots, f_k(e_{i_k}), \dots, e_{i_m}, \dots, e_{i_n}] &+ [e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, \dots, f_m(e_{i_m}), \dots, e_{i_n}], \end{aligned}$$

т.е.

$$[f_k(e_i) - f_m(e_i), e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, \dots, \widehat{e}_{i_m}, \dots, e_{i_n}] = 0.$$

Изменяя индексы k и m, а также множество $I = \{i_l\} \subset \{1, \dots, n+1\}$, где $|I| = n-1$, мы можем получить, что для произвольных k и m, а также для $j \neq i$ верно

$$(f_k(e_i) - f_m(e_i))|_{e_j} = 0.$$

Пусть $A = (a_{ij})$ – матрица преобразования f_0 и $B_k = (b_{ij}^k)$ – матрица преобразования f_k. По доказанному выше мы можем считать, что

$$b_{ij}^k = b_{ij} \qquad \text{при} \quad i \neq j.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (-1)^{n+i+1} f_0(e_i) = f_0[e_1, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_{n+1}] &= \sum_j [e_1, \dots, f_j(e_j), \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_{n+1}] \\ &= (-1)^{n+i+1} \biggl(\sum_{k, k \neq i} b_{kk}^k \biggr) e_i + \sum_{j, j \neq i} (-1)^{n+i} b_{ij} e_j, \end{aligned}$$

т.е. $a_{ij} = -b_{ji}$ при $i \neq j$. Пусть A^* – матрица, составленная из элементов матрицы A с нулевыми элементами по диагонали, и g_0 – линейное отображение с матрицей A^*. Соответственно, B^* – матрица, составленная из элементов матрицы B_k, с нулевыми элементами по диагонали и g – линейное отображение с матрицей B^*. Согласно лемме 1 $(g_0, g, \dots, g)$ – $(n+1)$-арное дифференцирование алгебры A_{n+1}. Таким образом, разность

$$(f_0, f_1, \dots, f_n) - (g_0, g, \dots, g) = (f_0^*, f_1^*, \dots, f_n^*)$$

будет $(n+1)$-арным дифференцированием, где каждый элемент f_k^* в базисе $\{e\}$ имеет диагональную матрицу линейного преобразования, т.е. удовлетворяет условию леммы. Лемма доказана.

Лемма 3. *В терминах леммы 2 верно*

$$(f_0^*, f_1^*, \dots, f_n^*) = \Bigl(\sum h_j \cdot \mathrm{id}, h_1 \cdot \mathrm{id}, \dots, h_n \cdot \mathrm{id} \Bigr) + (d_0, d, \dots, d),$$

где элементы h_j *из основного поля, а* d_0 *и* d *– некоторые линейные отображения.*

Доказательство. Будем считать, что $f_i^*(e_j) = f_i^j e_j$. Ясно, что

$$\Big(\sum f_i^{n+1}\cdot \mathrm{id}, f_1^{n+1}\cdot \mathrm{id},\dots, f_n^{n+1}\cdot \mathrm{id}\Big)$$

является $(n+1)$-арным дифференцированием, которое мы будем обозначать

$$\Big(\sum h_j\cdot \mathrm{id}, h_1\cdot \mathrm{id},\dots, h_n\cdot \mathrm{id}\Big).$$

Рассмотрим разность $(n+1)$-арных дифференцирований

$$(f_0^*, f_1^*,\dots, f_n^*) \qquad \text{и} \qquad \Big(\sum h_j\cdot \mathrm{id}, h_1\cdot \mathrm{id},\dots, h_n\cdot \mathrm{id}\Big).$$

Полученное $(n+1)$-арное дифференцирование обозначим $(d_0, d_1, \dots, d_n)$, где $d_i(e_j) = d_i^j e_j$ и $d_i(e_{n+1}) = 0$. Для наглядности мы можем записать коэффициенты d_i^j в виде матрицы

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
d_1^1 & d_1^2 & \dots & d_1^{n-2} & d_1^{n-1} & d_1^n & d_1^{n+1} = 0\\
d_2^1 & d_2^2 & \dots & d_2^{n-2} & d_2^{n-1} & d_2^n & d_2^{n+1} = 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
d_{n-3}^1 & d_{n-3}^2 & \dots & d_{n-3}^{n-2} & d_{n-3}^{n-1} & d_{n-3}^n & d_{n-3}^{n+1} = 0\\
d_{n-2}^1 & d_{n-2}^2 & \dots & d_{n-2}^{n-2} & d_{n-2}^{n-1} & d_{n-2}^n & d_{n-2}^{n+1} = 0\\
d_{n-1}^1 & d_{n-1}^2 & \dots & d_{n-1}^{n-2} & d_{n-1}^{n-1} & d_{n-1}^n & d_{n-1}^{n+1} = 0\\
d_n^1 & d_n^2 & \dots & d_n^{n-2} & d_n^{n-1} & d_n^n & d_n^{n+1} = 0
\end{array}\right). \tag{2}$$

Отметим, что

$$\begin{aligned}
0 &= d_0[e_1,\dots,e_k,\dots,e_m,\dots,e_n] + d_0[e_1,\dots,e_m,\dots,e_k,\dots,e_n]\\
&= (d_k^k + d_m^m - d_m^k - d_k^m)e_{n+1},
\end{aligned}$$

т.е.

$$d_k^k + d_m^m = d_k^m + d_m^k, \qquad \text{где} \quad k, m \leqslant n. \tag{3}$$

Аналогично мы можем получить

$$\begin{aligned}
0 &= d_0[e_2,\dots,e_k,\dots,e_m,\dots,e_{n+1}] + d_0[e_2,\dots,e_m,\dots,e_k,\dots,e_{n+1}]\\
&= (-1)^n(d_{m-1}^k + d_{k-1}^m - d_{m-1}^m - d_{k-1}^k)e_1,
\end{aligned}$$

т.е.

$$d_{m-1}^k + d_{k-1}^m = d_{m-1}^m + d_{k-1}^k, \qquad \text{где} \quad m, k \geqslant 2. \tag{4}$$

Ясно, что значения в выражениях (3), (4) образуют вершины квадрата в матрице (2) с диагональю, лежащей на диагонали матрицы, либо на побочной диагонали.

Осталось показать, что $d_1 = \dots = d_n$. Для этого необходимо показать, что для произвольного j верно $d_i^j = d_k^j$. В силу (4) при $k = n+1$ имеем

$$d_{m-1}^m = d_n^m, \qquad m \geqslant 2.$$

Откуда в силу (3) и того факта, что $d_{n-1}^n = d_n^n$, мы получим $d_n^{n-1} = d_{n-1}^{n-1}$. Теперь согласно (4) заметим, что

$$d_{n-1}^{n-1} = d_{n-2}^{n-1} = d_n^{n-1},$$

откуда в силу (4) имеем

$$d^n_{n-2} = d^n_{n-1}.$$

Таким образом, согласно (3) получаем

$$d^{n-2}_n = d^{n-2}_{n-2}, \qquad d^{n-2}_{n-2} = d^{n-2}_{n-1} = d^{n-2}_n.$$

Продолжая действовать аналогичным образом, мы получим, что для произвольного j верно $d^j_i = d^j_k$, т.е. требуемое. Лемма доказана.

3. Основные результаты. Теперь заметим, что если $(f_0, f, \dots, f)$ – $(n+1)$-арное дифференцирование n-арной алгебры A_{n+1}, где каждое из отображений f_0 и f на базисных элементах действует как $f_0(e_i) = f^i_0 e_i$, $f(e_i) = f_i e_i$, то

$$f^i_0 e_i = (-1)^{n+1+i} f_0[e_1, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_{n+1}] = \Bigl(\sum_{j=1}^{n+1} f_j - f_i\Bigr) e_i.$$

Откуда получаем, что

$$f^i_0 = \sum_j f_j - f_i,$$

и, следовательно,

$$\sum_j f^j_0 = n \sum_j f_j.$$

Полученные результаты дают

$$f_i = \frac{1}{n} \sum_j f^j_0 - f^i_0. \tag{5}$$

То есть отображение f однозначно определяется из вида отображения f_0, и произвольное отображение f_0 такое, что $f_0(e_i) = f^i_0 e_i$, задает $(n+1)$-арное дифференцирование $(f_0, f, \dots, f)$, где f_0 и f связаны посредством соотношения (5). Ясно, что мы можем считать, что $\sum f^j_0 = 0$. Для этого достаточно отметить, что из $(f_0, f, \dots, f)$ мы можем вычесть $(n+1)$-арное дифференцирование

$$\biggl(\frac{\sum f^j_0}{n} \cdot \mathrm{id}, \frac{\sum f^j_0}{n^2} \cdot \mathrm{id}, \dots, \frac{\sum f^j_0}{n^2} \cdot \mathrm{id}\biggr).$$

В этом случае $f = -f_0$.

Напомним, что простые конечномерные n-арные алгебры Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль исчерпываются алгебрами типа A_{n+1}. Таким образом, исходя из полученного и леммы 1, мы имеем

Теорема 4. *Пусть A – простая конечномерная алгебра Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Тогда*

$$\Delta(A) = sl_{n+1}.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что по лемме 1 любой эндоморфизм алгебры A является квазидифференцированием, и воспользоваться известным фактом из линейной алгебры, что с произвольной квадратной матрицей коммутирует только скалярная матрица. Таким образом, теорема доказана.

Полученные результаты мы можем подытожить в следующей теореме.

Теорема 5. *Пусть* $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ – $(n+1)$*-арное дифференцирование простой конечномерной* n*-арной алгебры Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Тогда*

$$(f_0, f_1, \ldots, f_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} h_j \cdot \mathrm{id}, h_1 \cdot \mathrm{id}, \ldots, h_n \cdot \mathrm{id} \right) + (d_0, d, \ldots, d)$$

и $[d_0]^T + [d] = 0$, *где* $[d_0]$, $[d]$ *– матрицы линейных отображений* d_0, d.

Отметим, что из теоремы 5 легко получается описание δ-дифференцирований простых конечномерных алгебр Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль, которое согласуется с результатами [11].

Основным результатом работы является

Теорема 6. *Пусть* $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ – $(n+1)$*-арное дифференцирование полупростой конечномерной* n*-арной алгебры Филиппова* A *над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Тогда*

$$A = \bigoplus_{i=1}^{t} I_i,$$

где I_i *– простой идеал алгебры* A *и выполнены следующие условия*:

1) $f_j(I_i) \subseteq I_i$;
2) *матрицы линейных отображений* f_j *в подходящем базисе имеют блочно-диагональный вид, где каждый квадратный блок имеет размерность* $n+1$ *и строится исходя из описания соответствующего* $(n+1)$*-арного дифференцирования простой алгебры Филиппова* I_i, *посредством теоремы* 5, *т.е. в подходящем базисе* ϱ *верно*

$$(f_0, f_1, \ldots, f_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} h_j, h_1, \ldots, h_n \right) + (d_0, d, \ldots, d),$$

где

$$[h_i]_\varrho = \begin{pmatrix} h_i^1 E_{n+1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & h_i^t E_{n+1} \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad [d_0]_\varrho^T + [d]_\varrho = 0.$$

Здесь под E_{n+1} *подразумевается единичная матрица размера* $n+1$, *а через* $[P]_\varrho$ *обозначена матрица линейного преобразования* P *в базисе* ϱ.

Доказательство. Согласно результатам [33] любая полупростая алгебра Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль представима в виде прямой суммы простых идеалов, т.е. $A = \bigoplus_{i=1}^{t} I_i$, где I_i – простой идеал алгебры A и $I_i \cong A_{n+1}$.

Пусть $A = I \oplus J$, где J – простой идеал, а I – прямая сумма некоторого количества идеалов изоморфных J. Тогда для элементов $i_k \in I$ верно

$$f_0[i_1, \ldots, i_n] = \sum [i_1, \ldots, f_k(i_k), \ldots, i_n] \in I.$$

Учитывая структуру простой алгебры Филиппова типа A_{n+1}, мы можем заключить, что произвольный базисный элемент e_i мы можем представить в виде $[e_{i_1},\dots,e_{i_n}]$, где e_{i_j} – другие элементы из этого базиса. Таким образом, для произвольного элемента $u\in I$ справедливо представление в виде

$$u=\sum[u_{i_1},\dots,u_{i_n}],\quad \text{где каждое}\quad u_{i_j}\in I.$$

Откуда мы можем заключить, что $f_0(I)\subseteq I$. Положим, что $f_t(I)|_J=f_t(I)\cap J$, и допустим, что для некоторого t верно $f_t(I)|_J\neq 0$. Тогда

$$0=f_0[J,\dots,J,I,J,\dots,J]=[J,\dots,J,f_t(I),J,\dots,J],$$

т.е. $f_t(I)|_J$ – идеал в J. В силу простоты J мы получаем, что $f_t(I)|_J$ либо совпадает с J, либо нулевой, т.е. либо $f_t(I)\subseteq I$, либо $f_t(I)|_J=J$. В силу того, что алгебра J является простой и, следовательно, не является нильпотентной, то второй случай невозможен. Таким образом, мы показали, что выполнено условие 1.

Для доказательства второго утверждения теоремы выберем базис алгебры A как объединение базисов I_i. Нам достаточно рассмотреть ограничение отображений f_t на I_i и воспользоваться теоремой 5. Теорема доказана.

Из теорем 4 и 6 легко получается

Теорема 7. *Пусть A – полупростая конечномерная n-арная алгебра Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Тогда* $\Delta(A)=\bigoplus sl_{n+1}$.

Из теоремы 5 и результатов работы [26] легко вытекает

Следствие 8. *Существуют полупростые тернарные алгебры Мальцева, обладающие нетривиальными 4-арными дифференцированиями.*

Доказательство. Пример простой тернарной алгебры Мальцева M_8, не являющейся алгеброй Филиппова, был построен в [28]. Достаточно рассмотреть прямую сумму $M=M_8\oplus A_4$. Очевидно, что данная алгебра будет полупростой и, следуя доказательству теоремы 6, мы можем заключить, что ограничение любого 4-арного дифференцирования тернарной алгебры M на A_4 и M_8 будет 4-арным дифференцированием соответствующих алгебр. Откуда, используя теорему 5, мы заключаем, что тернарная алгебра M допускает нетривиальные 4-арные дифференцирования. Следствие доказано.

В заключение автор выражает благодарность проф. И. П. Шестакову (Университет Сан-Паулу, Бразилия) и проф. А. П. Пожидаеву (ИМ СО РАН, Россия) за плодотворное обсуждение и стимулирование к написанию работы, а также анонимному рецензенту за предложенные замечания, позволившие существенно улучшить первоначальный текст.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В. Т. Филиппов, “О δ-дифференцированиях алгебр Ли”, *Сиб. матем. журн.*, **39**:6 (1998), 1409–1422.

[2] В. Т. Филиппов, “δ-Дифференцирования первичных алгебр Ли”, *Сиб. матем. журн.*, **40**:1 (1999), 201–213.

[3] В. Т. Филиппов, "О δ-дифференцированиях первичных альтернативных и мальцевских алгебр", *Алгебра и логика*, **39**:5 (2000), 618–625.

[4] P. Zusmanovich, "On δ-derivations of Lie algebras and superalgebras", *J. Algebra*, **324**:12 (2010), 3470–3486.

[5] И. Б. Кайгородов, "О δ-дифференцированиях простых конечномерных йордановых супералгебр", *Алгебра и логика*, **46**:5 (2007), 585–605.

[6] И. Б. Кайгородов, "О δ-дифференцированиях классических супералгебр Ли", *Сиб. матем. журн.*, **50**:3 (2009), 547–565.

[7] И. Б. Кайгородов, "О δ-супердифференцированиях простых конечномерных йордановых и лиевых супералгебр", *Алгебра и логика*, **49**:2 (2010), 195–215.

[8] В. Н. Желябин, И. Б. Кайгородов, "О δ-супердифференцированиях простых супералгебр йордановых скобок", *Алгебра и анализ*, **23**:4 (2011), 40–58.

[9] И. Б. Кайгородов, "Об обобщенном дубле Кантора", *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2010, № 4 (78), 42–50.

[10] И. Б. Кайгородов, "О δ-супердифференцированиях полупростых конечномерных йордановых супералгебр", *Матем. заметки*, **91**:2 (2012), 200–213.

[11] И. Б. Кайгородов, "О δ-дифференцированиях n-арных алгебр", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:6 (2012), 81–94.

[12] И. Б. Кайгородов, "Об обобщенных δ-дифференцированиях", *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, **9/1 (110)** (2013), 20–29.

[13] I. Kaygorodov, E. Okhapkina, "δ-derivations of semisimple structurable algebras", *J. Algebra Appl.*, **13**:4 (2014), 1350130.

[14] I. Kaygorodov, "δ-derivations of algebras and superalgebras", *Proceedings of the International Conference on Algebra* 2010, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2012, 374–380.

[15] P. Novotný, J. Hrivnák, "On (α,β,γ)-derivations of Lie algebras and corresponding invariant functions", *J. Geom. Phys.*, **58**:2 (2008), 208–217.

[16] K. Zheng, Y. Zhang, "On (α,β,γ)-derivations of Lie superalgebras", *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, **10**:2 (2013), 1–18.

[17] G. Leger, E. Luks, "Generalized derivations of Lie algebras", *J. Algebra*, **228**:1 (2000), 165–203.

[18] R. Zhang, Y. Zhang, "Generalized derivations of Lie superalgebras", *Comm. Algebra*, **38**:10 (2010), 3737–3751.

[19] H. Komatsu, A. Nakajima, "Generalized derivations of associative algebras", *Quaest. Math.*, **26**:2 (2003), 213–235.

[20] H. Komatsu, A. Nakajima, "Generalized derivations with invertible values", *Comm. Algebra*, **32**:5 (2004), 1937–1944.

[21] C. Jiménez-Gestal, J. M. Pérez-Izquierdo, "Ternary derivations of generalized Cayley–Dickson algebras", *Comm. Algebra*, **31**:10 (2003), 5071–5094.

[22] C. Jiménez-Gestal, J. M. Pérez-Izquierdo, "Ternary derivations of finite-dimensional real division algebras", *Linear Algebra Appl.*, **428**:8-9 (2008), 2192–2219.

[23] J. M. Perez-Izquierdo, "Unital algebras, ternary derivations, and local triality", *Algebras, Representations and Applications*, Contemp. Math., **483**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, 205–220.

[24] А. И. Шестаков, "Тернарные дифференцирования сепарабельных ассоциативных и йордановых алгебр", *Сиб. матем. журн.*, **53**:5 (2012), 1178–1195.

[25] А. И. Шестаков, "Тернарные дифференцирования йордановых супералгебр", *Алгебра и логика*, **53**:1 (2014) (в печати).

[26] И. Б. Кайгородов, "Об $(n+1)$-арных дифференцированиях простых n-арных алгебр Мальцева", *Алгебра и анализ*, **25**:4 (2013), 85–100.

[27] В. Т. Филиппов, "n-Лиевы алгебры", *Сиб. матем. журн.*, **26**:6 (1985), 126–140.

[28] А. П. Пожидаев, "n-арные алгебры Мальцева", *Алгебра и логика*, **40**:3 (2001), 309–329.

[29] Y. Nambu, "Generalized Hamiltonian mechanics", *Phys. Rev. D* (3), **7** (1973), 2405–2412.

[30] J. A. de Azcarraga, J. M. Izquierdo, “n-ary algebras: a review with applications”, *J. Phys. A. Math. Theor.*, **43** (2010), 293001.

[31] N. G. Pletnev, “Filippov-Nambu n-algebras relevant to physics”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **6** (2009), 272–311.

[32] И. Б. Кайгородов, “$(n+1)$-арные дифференцирования простых n-арных алгебр”, *Алгебра и логика*, **50**:5 (2011), 689–691.

[33] W. Ling, *On Structure of n-Lie Algebras*, Thesis, Universität Siegen, Siegen, 1993.

И. Б. Кайгородов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск,
Universidade de São Paulo, Instituto de Matemática
e Estatística, Brazil
E-mail: kaygorodov.ivan@gmail.com

Поступило
17.04.2012
Исправленный вариант
30.09.2013