Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Бикчантаев, Об уравнении Карлемана–Векуа с нефинитными коэффициентами на некомпактной римановой поверхности, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 1, 3–12

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 14:32:28

УДК 517.968.25+517.54

ОБ УРАВНЕНИИ КАРЛЕМАНА–ВЕКУА С НЕФИНИТНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА НЕКОМПАКТНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

И. А. Бикчантаев

На произвольной некомпактной римановой поверхности R исследуется уравнение вида

$$\partial f + Af + B\bar{f} = G, \quad (1)$$

где A, B, G – заданные квадратично интегрируемые линейные дифференциалы типа $(0, 1)$, подчиненные еще некоторым условиям. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (1) в классе функций с Λ_0 -поведением в окрестности идеальной границы поверхности R , вычислен индекс уравнения (1).

Библиография: 12 названий.

Решения уравнения вида

$$\partial f + Af + B\bar{f} = G \quad (1)$$

на замкнутой римановой поверхности впервые были исследованы Л. Берсом [1] (при $G = 0$). Им был установлен аналог теоремы Римана–Роха для решений этого уравнения. Среди сформулированных в [1] проблем к настоящему времени лишь одна не получила полного решения. Имеется ввиду исследование уравнения (1) на некомпактной римановой поверхности. Вопрос Берса заключался в следующем. Какие условия следует наложить в окрестности идеальной границы на коэффициенты уравнения (1) и решения этого уравнения с тем, чтобы распространить некоторые классические результаты теории функций на замкнутых римановых поверхностях на случай некомпактных римановых поверхностей. Частично ответ на этот вопрос был получен в статьях К. Л. Волковыского [2], [3], где были получены аналоги теорем Лиувилля и Римана–Роха для однородного уравнения (1) на параболической римановой поверхности и в статьях И. А. Бикчантаева [4]–[6], где эти теоремы и некоторые другие результаты были получены на произвольных некомпактных римановых поверхностях. В этих работах были наложены естественные ограничения на поведение решений уравнения (1) в окрестности идеальной границы римановой поверхности, но условия на A, B, G были очень жесткими – требовалась их финитность. В настоящей статье получены первые результаты по теории уравнения (1) в случае, когда A, B, G не являются финитными, а подчинены некоторым более естественным ограничениям.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 01-01-00888, 03-01-96193.

1. Пусть R есть произвольная некомпактная риманова поверхность рода h ($\leq \infty$), J – множество $\{1, 2, \dots, 2h\}$, $\mathcal{R} = \{R_n\}_{n=1}^\infty$ – каноническое исчерпание поверхности R . Обозначим через h_n род поверхности R_n и положим $J_n = \{1, 2, \dots, 2h_n\}$. Пусть $\{D_j\}_{j \in J}$ есть канонический базис гомологий поверхности R по модулю разбивающих циклов такой, что $\{D_j\}_{j \in J_n}$ есть канонический базис гомологий для R_n по модулю границы и $D_j \subset R \setminus \overline{R_n}$ для $j \in J \setminus J_n$.

Введем следующие функциональные пространства:

- $L_\infty(R)$ – банахово пространство функций на R с конечной нормой

$$\|f\| = \text{vrai sup}_{q \in R} |f(q)|;$$

- $L_1^{(2)}(R)$ – банахово пространство дифференциалов второго порядка, интегрируемых по R , с нормой $\|\Psi\| = \int_R |\Psi|$;
- $L_2^{(1)}(R)$ – гильбертово пространство квадратично интегрируемых дифференциалов первого порядка на R с внутренним произведением

$$(\varphi, \psi)_{L_2^{(1)}(R)} = \text{Re} \iint_R \varphi \wedge \overline{\psi}, \quad \varphi, \psi \in L_2^{(1)}(R);$$

- $L_2^{1,0}(R)$ и $L_2^{0,1}(R)$ – подпространства $L_2^{(1)}(R)$, состоящие из дифференциалов типа $(1, 0)$ и $(0, 1)$ соответственно.

Очевидно, $L_2^{(1)}(R) = L_2^{1,0}(R) \oplus L_2^{0,1}(R)$. Введем ограниченные билинейные функционалы

$$\begin{aligned} (\varphi, \psi)_1 &= \text{Re} \iint_R \varphi \wedge \psi, \quad \varphi, \psi \in L_2^{(1)}(R), \\ (f, \Psi)_2 &= \text{Re} \iint_R f \Psi, \quad f \in L_\infty(R), \quad \Psi \in L_1^{(2)}(R). \end{aligned}$$

Скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_{L_2^{(1)}(R)}$ связано с билинейной формой $(\cdot, \cdot)_1$ соотношением $(\varphi, \psi)_{L_2^{(1)}(R)} = (\varphi, \overline{\psi})_1$.

Положим для краткости $\Lambda = L_2^{(1)}(R)$ и рассмотрим следующие подпространства Λ :

- Λ_h – подпространство Λ , состоящее из гармонических дифференциалов;
- Λ_{hse} – подпространство Λ_h , состоящее из полуточных дифференциалов (т.е. имеющих нулевые периоды вдоль всех разбивающих циклов);
- $\Lambda_{e0}^1 = \{\lambda \in \Lambda: \text{существуют } f \in C^2(R), f_n \in C_0^2(R) \text{ такие, что } df = \lambda \text{ и } \|df - df_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\}$, $\Lambda_c^1 \subset \Lambda$ – множество замкнутых дифференциалов класса $C^1(R)$, Λ_{c0}^1 – подмножество Λ_c^1 , состоящее из финитных дифференциалов.

Через Λ_{e0} , Λ_c , Λ_{c0} обозначим замыкания пространств Λ_{e0}^1 , Λ_c^1 , Λ_{c0}^1 в Λ . Тогда $\Lambda = \Lambda_{e0} \oplus \Lambda_{e0}^* \oplus \Lambda_h$, где $\Lambda_{e0}^* = \{\lambda: * \lambda \in \Lambda_{e0}\}$.

Пусть $\mathcal{L} = \{L_j\}_{j=1}^h$ – семейство прямых в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, проходящих через начало координат. Приведем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [7]. Замкнутое подпространство $\Lambda_0 = \Lambda_0(R, \mathcal{L})$ пространства Λ_{hse} называется *пространством поведения, ассоциированным с $\mathcal{L}$* , если $i\Lambda_0^* = \Lambda_0^\perp$ (т.е. $\Lambda_h = \Lambda_0 \oplus i\Lambda_0^*$) и $\int_{D_j} \lambda_0 \in L_{[(j+1)/2]}, j \in J, \lambda_0 \in \Lambda_0$, где $\Lambda_0^\perp$ означает ортогональное дополнение Λ_0 в Λ_h , $[]$ означает целую часть числа.

Пространство $\bar{\Lambda}_0 = \{\lambda: \bar{\lambda} \in \Lambda_0\}$ является пространством поведения, ассоциированным с семейством прямых $\bar{\mathcal{L}} = \{\bar{L}_j\}_{j=1}^h$, где $\bar{L}_j$ означает прямую в $\mathbb{C}$, симметричную с L_j относительно действительной оси; оно называется *двойственным* с Λ_0 [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [8]. Будем говорить, что дифференциал φ , определенный в окрестности идеальной границы поверхности R , имеет Λ_0 -поведение, если существуют $\lambda_0 \in \Lambda_0, \lambda_{e0} \in \Lambda_{e0}$ и $R_n \in \mathcal{R}$ такие, что $\varphi = \lambda_0 + \lambda_{e0}$ на $R \setminus R_n$. Будем говорить, что функция f (вообще говоря, многозначная) имеет Λ_0 -поведение, если ее дифференциал df имеет Λ_0 -поведение.

Для дифференциалов класса C^1 понятие Λ_0 -поведения было дано Сиба [7].

Пусть Ω – область на R , которая может совпадать и с R . Обозначим через $\tilde{H}^1(\Omega)$ пространство, вообще говоря, многозначных функций $\tilde{f}$ на Ω таких, что дифференциал $d\tilde{f}$ полуточен и принадлежит $L_2^{(1)}(\Omega)$, а через $H^1(\Omega)$ – пространство, образованное из однозначных на $\Omega' := \Omega \setminus (\cup_{\nu=1}^{2h} D_\nu)$ ветвей функций из $\tilde{H}^1(\Omega)$. Для $f \in H^1(\Omega)$ через $\tilde{f}$ будем обозначать соответствующую ей функцию из $\tilde{H}^1(\Omega)$ такую, что f есть однозначная на Ω' ветвь функции $\tilde{f}$. Очевидно, $\tilde{f}$ однозначно определяется по f . Под $df, f \in H^1(\Omega)$, всегда будем иметь ввиду $d\tilde{f}$ или, что равносильно, дифференциал функции f в топологии, определяемой метрикой Мазуркевича в Ω' . Пусть Θ – непрерывный и положительный на R дифференциал второго порядка такой, что $\iint_R |f|^2 \Theta < \infty \forall f \in H^1(R)$, и нормированный условием $\iint_R \Theta = 1$. В пространстве $H^1(\Omega)$ введем скалярное произведение $(f, g)_{H^1(\Omega)} = (df, dg)_{L_2^{(1)}(\Omega)} + (f, g)_{L_2(\Omega)}$, где

$$(f, g)_{L_2(\Omega)} := \operatorname{Re} \iint_\Omega f \bar{g} \Theta.$$

Тогда $H^1(\Omega)$ становится гильбертовым пространством и в норме, определяемой этим скалярным произведением, $\|1\|_{H^1(\Omega)} \leq 1$ (равенство достигается при $\Omega = R$).

Через $\tilde{X}$ (соответственно X) обозначим подпространство $\tilde{H}^1(R)$ (соответственно $H^1(R)$), состоящее из функций $\tilde{f}$ (соответственно f) таких, что $d\tilde{f} \in \Lambda_0 \oplus \Lambda_{e0}$. Вместо $\|f\|_{H^1(R)}, f \in X$, будем писать короче: $\|f\|_X$. Через $X_0 := \{\tilde{f} \in \tilde{X}: \int_{D_\nu} d\tilde{f} = 0, \nu = 1, 2, \dots, 2h\}$ обозначим подпространство $\tilde{X}$, состоящее из однозначных на R функций. Отметим, что на параболической римановой поверхности R $\tilde{X} = \tilde{H}^1(R)$ и $X = H^1(R)$.

2. Предположим, что $A, B, G \in L_2^{0,1}(R)$, причем коэффициенты A и B уравнения (1) локально интегрируемы со степенью $p > 2$ и, кроме того, удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \sup_{\|f\|_X \leq 1} \|Af\|_{L_2^{(1)}(R)} &< \infty, & \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|f\|_X \leq 1} \|Af\|_{L_2^{(1)}(R \setminus R_n)} &= 0, \\ \sup_{\|f\|_X \leq 1} \|Bf\|_{L_2^{(1)}(R)} &< \infty, & \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|f\|_X \leq 1} \|Bf\|_{L_2^{(1)}(R \setminus R_n)} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

и, следовательно, оператор $\Xi: X \rightarrow L_2^{0,1}(R)$, определяемый формулой $\Xi f := Af + B\bar{f}$, непрерывен. Докажем, что он еще и компактен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Оператор $\Xi: X \rightarrow L_2^{0,1}(R)$ вполне непрерывен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, это утверждение достаточно доказать в предположении, что $B = 0$. Пусть Ω – каноническая область на R . Гильбертово пространство $H^1(\Omega)$ компактно вложено в гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ [9].

Если $A \in C(\overline{\Omega})$, то оператор $\Xi: L_2(\Omega) \rightarrow L_2^{0,1}(\Omega)$ непрерывен и, следовательно, оператор $\Xi: H^1(\Omega) \rightarrow L_2^{0,1}(\Omega)$ вполне непрерывен. Пусть теперь A – любой коэффициент, удовлетворяющий первоначальным условиям. Тогда существует последовательность непрерывных в $\overline{\Omega}$ дифференциалов $A^{(n)}$ типа $(0, 1)$ таких, что $\|A^{(n)} - A\|_{L_p^{(1)}(\Omega)} \rightarrow 0$, где норма в $L_p^{(1)}(\Omega)$ может быть определена равенством

$$\|A\|_{L_p^{(1)}(\Omega)}^p = \iint_{\Omega} \left| \frac{A \wedge * \bar{A}}{\Theta} \right|^{p/2} \Theta.$$

По доказанному оператор $\Xi^{(n)} f := A^{(n)} f$ вполне непрерывен из $H^1(\Omega)$ в $L_2^{0,1}(\Omega)$. Поэтому для доказательства полной непрерывности оператора $\Xi: H^1(\Omega) \rightarrow L_2^{0,1}(\Omega)$ достаточно установить, что

$$\|\Xi^{(n)} - \Xi\|_{H^1(\Omega) \rightarrow L_2^{(1)}(\Omega)} \rightarrow 0 \quad (3)$$

при $n \rightarrow \infty$. Имеем

$$\|(\Xi^{(n)} - \Xi)f\|_{L_2^{(1)}(\Omega)} = \|(A^{(n)} - A)f\|_{L_2^{(1)}(\Omega)} \leq c_1 \|A^{(n)} - A\|_{L_p^{(1)}(\Omega)} \|f\|_{L_q(\Omega)}, \quad (4)$$

где $1/p + 1/q = 1/2$, $\|f\|_{L_q(\Omega)}^q = \iint_{\Omega} \|f\|^q \Theta$, c_1 – постоянная, не зависящая от f . Так как $H^1(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_q(\Omega)$ для любого q , $1 \leq q < \infty$, то из (4) получаем $\|(\Xi^{(n)} - \Xi)f\|_{L_2^{(1)}(\Omega)} \leq c \|A^{(n)} - A\|_{L_p^{(1)}(\Omega)} \|f\|_{H^1(\Omega)}$, откуда вытекает (3) и полная непрерывность оператора $\Xi: H^1(\Omega) \rightarrow L_2^{0,1}(\Omega)$.

Положим $A_n = A\chi(R_n)$, где χ – характеристическая функция множества. По доказанному оператор $\Xi_n := A_n \mathbf{I}$ вполне непрерывен из пространства $H^1(R_n)$ в $L_2^{0,1}(R_n)$ и, следовательно, из X в $L_2^{0,1}(R)$. Покажем, что $\|\Xi_n - \Xi\|_{X \rightarrow L_2^{(1)}(R)}$ стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$. Действительно,

$$\|\Xi_n - \Xi\|_{X \rightarrow L_2^{(1)}(R)} = \sup_{\|f\|_X \leq 1} \|(A_n - A)f\|_{L_2^{(1)}(R)} = \sup_{\|f\|_X \leq 1} \|Af\|_{L_2^{(1)}(R \setminus R_n)} \rightarrow 0$$

в силу условия (2). Отсюда вытекает доказываемое утверждение.

Из этого предложения и полунетеровости оператора $\bar{\partial}: X_0 \rightarrow L_2^{0,1}(R)$ (см. [8]) следует, что оператор $\bar{\partial} + \Xi: X_0 \rightarrow L_2^{0,1}(R)$ тоже является Φ_+ -оператором (Φ -оператором при $h < \infty$) и его индекс равен $2 - 2h$.

Для разрешимости уравнения (1) в пространстве X_0 при $G \in L_2^{0,1}(R)$ необходимо выполнение условия

$$\operatorname{Re} \iint_R G \wedge \psi = 0, \quad (5)$$

где ψ – произвольное регулярное (т.е. $\psi \in L_2^{1,0}(R)$, $\bar{\partial}\psi \in L_1^{(2)}(R)$) решение уравнения

$$-\bar{\partial}\psi + A \wedge \psi + \overline{B \wedge \psi} = 0 \quad (6)$$

в классе дифференциалов с $i\bar{\Lambda}_0$ -поведением (это означает, что дифференциал $i\psi$ имеет $\bar{\Lambda}_0$ -поведение). Действительно, если $f \in X_0$ есть решение уравнения (1), то

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \iint_R G \wedge \psi &= \operatorname{Re} \iint_R (\bar{\partial}f + Af + B\bar{f}) \wedge \psi \\ &= \operatorname{Re} \iint_R df \wedge \psi + \operatorname{Re} \iint_R (Af + B\bar{f}) \wedge \psi \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \iint_{R_n} df \wedge \psi + \operatorname{Re} \iint_R f(A \wedge \psi + \overline{B \wedge \psi}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_{\partial R_n} f\psi - \operatorname{Re} \iint_R f\bar{\partial}\psi + \operatorname{Re} \iint_R f(A \wedge \psi + \overline{B \wedge \psi}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_{\partial R_n} f\psi + \operatorname{Re} \iint_R f(-\bar{\partial}\psi + A \wedge \psi + \overline{B \wedge \psi}) = 0 \end{aligned}$$

(первое слагаемое исчезает в силу теоремы 1 из [8]).

Оказывается, что условие (5) является также и достаточным для разрешимости уравнения (1) в классе функций $f \in X_0$. Для того, чтобы это доказать, достаточно было бы показать, что множество регулярных решений уравнения (6) с $i\bar{\Lambda}_0$ -поведением в окрестности идеальной границы поверхности R совпадает с ядром формально сопряженного с $\bar{\partial} + \Xi$ оператора, действующего из пространства $L_2^{1,0}(R)$ ($= L_2^{0,1}(R)^*$) в пространстве X_0^* , сопряженное X_0 . Но поскольку структура пространства X_0^* и ядра сопряженного оператора неизвестна, то это требует дополнительных исследований, которым и посвящена остальная часть статьи.

3. В статье [10] доказано существование и единственность следующих нормированных абелевых дифференциалов на R , имеющих Λ_0 -поведение.

1) Абелевы дифференциалы первого рода φ_ν , $\nu = 1, 2, \dots, 2h$, нормированные условиями

$$\int_{D_\nu} \varphi_\mu - \gamma_\mu D_\mu \circ D_\nu \in L_{[(\nu+1)/2]}, \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots, 2h, \quad (7)$$

где γ_μ – заданные комплексные числа, не принадлежащие $L_{[(\mu+1)/2]}$; $D_\mu \circ D_\nu$ означает индекс пересечения циклов D_μ и D_ν . Дифференциалы φ_ν образуют алгебраический базис пространства абелевых дифференциалов первого рода с Λ_0 -поведением.

2) Абелевы дифференциалы третьего рода ω_{pq} , σ_{pq} , имеющие единственные простые полюсы в точках p и q с вычетами 1, i в p и -1 , $-i$ в q . Периоды дифференциалов ω_{pq} и σ_{pq} вдоль канонических циклов D_ν принадлежат $L_{[(\nu+1)/2]}$, $\nu = 1, 2, \dots, 2h$.

Через φ'_ν , ω'_{pq} , σ'_{pq} условимся обозначать дифференциалы, которые получаются, если в определении дифференциалов φ_ν , ω_{pq} , σ_{pq} Λ_0 -поведение заменить на двойственное $\bar{\Lambda}_0$ -поведение. При этом вместо соотношений (7) будем иметь

$$\int_{D_\nu} \varphi'_\mu - \gamma'_\mu D_\mu \circ D_\nu \in \bar{L}_{[(\nu+1)/2]}, \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots, 2h,$$

где $\gamma'_\mu \notin \bar{L}_{[(\mu+1)/2]}$. Для определенности будем считать числа γ_μ и γ'_μ выбранными таким образом, что $|\gamma_\mu| = 1$, $i\gamma_{2\mu-1} = i\gamma_{2\mu} \in L_\mu$, $\gamma'_\mu = \bar{\gamma}_\mu$.

Периоды нормированных абелевых дифференциалов третьего рода связаны с нормированными абелевыми дифференциалами первого рода соотношениями [11]

$$\begin{aligned} \int_{D_\nu} \omega_{qq_0} &= -2\pi i \gamma_\nu \operatorname{Re} \int_{q_0}^q \varphi'_\nu, & \int_{D_\nu} \sigma_{qq_0} &= 2\pi i \gamma_\nu \operatorname{Im} \int_{q_0}^q \varphi'_\nu, \\ \int_{D_\nu} d_q \omega_{qq_0} &= -2\pi (\operatorname{Im} \gamma_\nu) \varphi_\nu, & \int_{D_\nu} d_q \sigma_{qq_0} &= 2\pi (\operatorname{Re} \gamma_\nu) \varphi_\nu, \end{aligned} \quad \nu = 1, 2, \dots, 2h. \quad (8)$$

Приведенные соотношения между дифференциалами остаются справедливыми, если в них поменять ролями пространства Λ_0 и $\bar{\Lambda}_0$.

Положим

$$H_1(p, q) = \frac{1}{2} d_p \int_{q_0}^q (\omega_{pp_0} - i \sigma_{pp_0}), \quad H_2(p, q) = -\frac{1}{2} d_p \int_{q_0}^q (\omega_{pp_0} + i \sigma_{pp_0}). \quad (9)$$

Выражения (9) суть многозначные (по q) аналоги ядра Коши, соответствующие дивизору $1/q_0$, характер многозначности которых описывается равенствами [11]

$$\begin{aligned} \int_{D_\nu} d_q H_1(p, q) &= -\pi i \gamma_\nu \varphi'_\nu(p), \\ \int_{D_\nu} d_q H_2(p, q) &= \pi i \gamma_\nu \overline{\varphi'_\nu(p)}, \end{aligned} \quad \nu = 1, 2, \dots, 2h. \quad (10)$$

Через $h_1(p, q)$, $h_2(p, q)$ обозначим однозначные на R' ветви ядер (9), исчезающие при $q = q_0$.

Положим

$$T F = \frac{1}{2\pi i} \iint_R h_1(p, \cdot) \wedge F(p) + h_2(p, \cdot) \wedge \overline{F(p)},$$

$P = -T \Xi$, $M = I - P$. При $R = \overline{\mathbb{C}}$, $q_0 = \infty$ операторы T и P совпадают с одноименными операторами, изученными И. Н. Векуа [12].

Из ограниченности оператора $T: L_2^{0,1}(R) \rightarrow X$ (см. [8, предложение 7]) и предложения 1 следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Оператор $P: X \rightarrow X$ вполне непрерывен, а оператор M является каноническим фредгольмовым в пространстве X .*

Обозначим через Y подпространство в $L_1^{(2)}(R)$, образованное из элементов с конечной нормой

$$\|\Psi\|_Y := \sup_{\|f\|_X \leq 1} \|f\Psi\|_{L_1^{(2)}(R)}.$$

Легко видеть, что $\|\cdot\|_Y$ удовлетворяет всем аксиомам нормы и $\|\Psi\|_Y \geq \|\Psi\|_{L_1^{(2)}(R)}$.

Очевидно, имеет место неравенство

$$|(f, \Psi)_2| \leq \|f\|_X \|\Psi\|_Y.$$

Поэтому $\|\Psi\|_{X^*} \leq \|\Psi\|_Y$ и билинейная форма $(\cdot, \cdot)_2$ определяет способ линейного и непрерывного вложения Y в X^* и X в Y^* . Аналогично, билинейная форма $(\cdot, \cdot)_1$ определяет линейное изометрическое отображение $L_2^{1,0}(R)$ на $L_2^{0,1}(R)^*$ и $L_2^{0,1}(R)$ на $L_2^{1,0}(R)^*$.

Из ограниченности оператора $T: L_2^{0,1}(R) \rightarrow X$ (см. [8]) следует, что сопряженный оператор $T^*: X^* \rightarrow L_2^{1,0}(R)$, определяемый соотношением $(T^* \Psi)(\varphi) = \Psi(T\varphi)$, $\varphi \in L_2^{0,1}(R)$, $\Psi \in X^*$, ограничен и его норма равна $\|T\|_{L_2^{0,1}(R) \rightarrow X}$.

В силу принятого способа вложения $L_2^{1,0}(R)$ в $L_2^{0,1}(R)^*$ и Y в X^* для $\Psi \in Y$ это соотношение может быть записано в виде

$$(\varphi, T^* \Psi)_1 = (T\varphi, \Psi)_2, \quad \varphi \in L_2^{0,1}(R), \quad \Psi \in Y,$$

откуда, как легко видеть, для $\Psi \in Y$ получается следующее интегральное представление для оператора T^* :

$$T^* \Psi = \frac{i}{2\pi} \iint_R h_1(\cdot, q) \Psi(q) - \overline{h_2(\cdot, q) \Psi(q)}, \quad \Psi \in Y.$$

Из предложения 1 следует, что сопряженный с $\Xi: X \rightarrow L_2^{0,1}(R)$ оператор $\Xi^*: L_2^{1,0}(R) (= L_2^{0,1}(R)^*) \rightarrow X^*$ вполне непрерывен; он определяется равенством

$$(\Xi^* \varphi)(f) = (\Xi f, \varphi)_1 = (f, A \wedge \varphi + \overline{B \wedge \varphi})_2, \quad \varphi \in L_2^{1,0}(R), \quad f \in X.$$

Отсюда видно, что $A \wedge \varphi + \overline{B \wedge \varphi} \in Y$ и в силу принятого способа вложения Y в X^* $\Xi^* \varphi = A \wedge \varphi + \overline{B \wedge \varphi}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Оператор $\Xi^*: L_2^{1,0}(R) \rightarrow Y$ непрерывен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая условия (2), имеем

$$\begin{aligned} \|\Xi^*\|_{L_2^{1,0}(R) \rightarrow Y} &= \sup_{\|\varphi\|_{L_2^{1,0}(R)} \leq 1} \|\Xi^* \varphi\|_Y = \sup_{\|\varphi\|_{L_2^{1,0}(R)} \leq 1} \sup_{\|f\|_X \leq 1} \|f \Xi^* \varphi\|_{L_1^{(2)}(R)} \\ &= \sup_{\|\varphi\|_{L_2^{1,0}(R)} \leq 1} \sup_{\|f\|_X \leq 1} \|f(A \wedge \varphi + \overline{B \wedge \varphi})\|_{L_1^{(2)}(R)} \\ &\leq \sup_{\|\varphi\|_{L_2^{1,0}(R)} \leq 1} \sup_{\|f\|_X \leq 1} \|Af \wedge \varphi\|_{L_1^{(2)}(R)} \\ &\quad + \sup_{\|\varphi\|_{L_2^{1,0}(R)} \leq 1} \sup_{\|f\|_X \leq 1} \|B\bar{f} \wedge \varphi\|_{L_1^{(2)}(R)} \\ &\leq \sup_{\|\varphi\|_{L_2^{1,0}(R)} \leq 1} \sup_{\|f\|_X \leq 1} \|Af\|_{L_2^{(1)}(R)} \|\varphi\|_{L_2^{(1)}(R)} \\ &\quad + \sup_{\|\varphi\|_{L_2^{1,0}(R)} \leq 1} \sup_{\|f\|_X \leq 1} \|B\bar{f}\|_{L_2^{(1)}(R)} \|\varphi\|_{L_2^{(1)}(R)} \\ &= \sup_{\|f\|_X \leq 1} \|Af\|_{L_2^{(1)}(R)} + \sup_{\|f\|_X \leq 1} \|B\bar{f}\|_{L_2^{(1)}(R)} < \infty. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Из неравенства $\|\Psi\|_{X^*} \leq \|\Psi\|_Y$ получаем

$$\|\Xi^*\|_{L_2^{1,0}(R) \rightarrow Y} = \sup_{\|\varphi\|_{L_2^{1,0}(R)} \leq 1} \|\Xi^* \varphi\|_Y \geq \sup_{\|\varphi\|_{L_2^{1,0}(R)} \leq 1} \|\Xi^* \varphi\|_{X^*} = \|\Xi^*\|_{L_2^{1,0}(R) \rightarrow X^*}.$$

Из предложения 3 следует, что для любого регулярного решения ψ уравнения (6) $\bar{\partial}\psi \in \sim Y$.

Из ограниченности оператора $T^*: X^* \rightarrow L_2^{1,0}(R)$ и предложения 3 вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Оператор $P^* = -\Xi^* T^*: X^* \rightarrow Y$ непрерывен.*

Из этого предложения следует, что ядро фредгольмова оператора $M^* = I - P^*: X^* \rightarrow X^*$ принадлежит Y .

Положим $\langle g, \psi \rangle := (\Xi g, \psi)_1 = (g, \Xi^* \psi)_2$. Из непрерывности билинейных форм $(\cdot, \cdot)_1$ и $(\cdot, \cdot)_2$ соответственно в $L_2^{(1)}(R) \times L_2^{(1)}(R)$ и $X \times Y$ и ограниченности операторов $\Xi: X \rightarrow L_2^{0,1}(R)$ и $\Xi^*: L_2^{1,0}(R) \rightarrow Y$ вытекает непрерывность билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в пространстве $X \times L_2^{(1)}(R)$. Пусть $P' := -T^* \Xi^*$, $M' := I - P'$. Из компактности оператора $\Xi^*: L_2^{1,0}(R) \rightarrow X^*$ и ограниченности оператора $T^*: X^* \rightarrow L_2^{1,0}(R)$ следует, что оператор $P': L_2^{1,0}(R) \rightarrow L_2^{1,0}(R)$ вполне непрерывен, а оператор $M': L_2^{1,0}(R) \rightarrow L_2^{1,0}(R)$ является каноническим фредгольмовым. Операторы P и P' , а также M и M' , являются союзными относительно билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$, т.е. $\langle P f, \psi \rangle = \langle f, P' \psi \rangle$ и $\langle M f, \psi \rangle = \langle f, M' \psi \rangle$, $f \in X$, $\psi \in L_2^{1,0}(R)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Операторы $-T^*: \ker M^* \rightarrow \ker M'$ и $\Xi^*: \ker M' \rightarrow \ker M^*$ суть взаимно обратные изоморфизмы соответствующих пространств.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из легко проверяемых равенств $M' T^* = T^* M^*$ и $M^* \Xi^* = \Xi^* M'$ следует, что $T^*(\ker M^*) \subset \ker M'$ и $\Xi^*(\ker M') \subset \ker M^*$. Из равенств $\ker M^* = \{\Phi: \Phi = -\Xi^* T^* \Phi\}$ и $\ker M' = \{\varphi: \varphi = -T^* \Xi^* \varphi\}$ следует, что $-\Xi^* T^*|_{\ker M^*} = I$ и $-T^* \Xi^*|_{\ker M'} = I$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Образ оператора M равен*

$$\text{im } M = \{g \in X: \langle g, \psi \rangle = 0 \forall \psi \in \ker M'\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что

$$(g, \Phi)_2 = -\langle g, T^* \Phi \rangle, \quad \text{если } g \in X, \Phi \in \ker M^*. \quad (11)$$

Принимая во внимание соотношение $\ker M^* \subset Y$ и используя равенство (11) и предложение 5, получаем

$$\begin{aligned} \text{im } M &= \{g \in X: (g, \Phi)_2 = 0 \forall \Phi \in \ker M^*\} \\ &= \{g \in X: \langle g, \psi \rangle = 0 \forall \psi \in \ker M'\}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

В [8] доказано, что $T \bar{\partial} f - f = \text{const}$ при $f \in X$. Поэтому уравнение (1) в классе функций $f \in X_0$ при $G \in L_2^{0,1}(R)$ эквивалентно системе уравнений

$$M f = T G + c, \quad \langle f, i\varphi'_\nu \rangle = (G, i\varphi'_\nu)_1, \quad \nu = 1, 2, \dots, 2h. \quad (12)$$

Здесь c – произвольная комплексная постоянная; первое уравнение в (12) эквивалентно уравнению (1) в классе функций $f \in X$, последние $2h$ равенств в (12) вытекают из условия $f \in X_0$ и формул (10).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Пусть ψ есть регулярное (т.е. $\psi \in L_2^{1,0}(R)$, $\bar{\partial}\psi \in L_1^{(2)}(R)$) решение уравнения (6) с $i\bar{\Delta}_0$ -поведением в окрестности идеальной границы. Тогда $T^* \bar{\partial}\psi + \psi$ есть аналитический дифференциал с $i\bar{\Delta}_0$ -поведением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства $\bar{\partial}(T^* \bar{\partial}\psi + \psi) = 0$ в $R \setminus \{q_0\}$ (см. [6]) следует, что $T^* \bar{\partial}\psi + \psi$ есть аналитический в $R \setminus \{q_0\}$ дифференциал. В точке q_0 у него возможен полюс не выше первого порядка. Однако вычет в нем равен

$$\frac{1}{2\pi i} \iint_R \bar{\partial}\psi = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial R_n} \psi = 0$$

в силу полуточности дифференциала ψ в окрестности идеальной границы поверхности R . Поэтому дифференциал $T^* \bar{\partial}\psi + \psi$ аналитичен на всей поверхности R . Так как $T^* \bar{\partial}\psi = T^* \Xi^* \psi = -P' \psi$, а оператор P' ограничен в пространстве $L_2^{1,0}(R)$, то дифференциал $T^* \bar{\partial}\psi + \psi$ принадлежит $L_2^{1,0}(R)$. Из свойств ядер $h_k(p, q)$, $k = 1, 2$, и формул (8) следует, что дифференциал $T^* \Psi$, $\Psi \in Y$, полуточен и

$$\int_{D_\nu} T^* \Psi = \bar{\gamma}_\nu \operatorname{Re} \iint_R \Psi(q) \int_{q_0}^q \varphi_\nu.$$

Для доказательства того, что дифференциал $T^* \bar{\partial}\psi = -P' \psi$ имеет $i\bar{\Lambda}_0$ -поведение, теперь достаточно установить (см. [8], теорема 1), что для некоторой $R_n \in \mathcal{R}$ справедливо тождество

$$(P' \psi, * \bar{\omega})_{L_2^{(1)}(R \setminus R_n)} - \operatorname{Re} \int_{\partial R_n} \omega(q) \int_{q_0}^q P' \psi = 0, \quad \omega \in \Lambda_0, \quad \psi \in L_2^{1,0}(R). \quad (13)$$

Для финитных ψ $i\bar{\Lambda}_0$ -поведение дифференциала $P' \psi$, а вместе с этим и тождество (13), уже установлены [6]. Для любого $\psi \in L_2^{1,0}(R)$ оно вытекает из непрерывности линейного функционала, стоящего в левой части (13), в пространстве $L_2^{(1)}(R)$. Предложение доказано.

Учитывая это предложение, приведем уравнение (6) в классе дифференциалов $\psi \in L_2^{1,0}(R)$, $\bar{\partial}\psi \in L_1^{(2)}(R)$ и с $i\bar{\Lambda}_0$ -поведением к системе уравнений

$$M' \psi = i \sum_{\nu=1}^{2h} c_\nu \varphi'_\nu, \quad \langle 1, \psi \rangle = 0, \quad \langle i, \psi \rangle = 0, \quad (14)$$

где c_ν – произвольные действительные числа, из которых лишь конечное число отличных от нуля; ядро $h_1(p, q)$ имеет в точке q_0 полюс первого порядка; последние два равенства в (14) обеспечивают регулярность дифференциала $P' \psi$, а следовательно, и ψ в этой точке.

Простые вычисления приводят нас к равенству

$$\operatorname{Re} \iint_R G \wedge \psi = \operatorname{Re} \iint_R G \wedge i \sum_{\nu=1}^{2h} c_\nu \varphi'_\nu - \langle T G, \psi \rangle, \quad (15)$$

где ψ – произвольное решение системы уравнений (14).

Применяя леммы 1 и 2 из статьи [11] к системам уравнений (12) и (14) и используя соотношение (15), приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА. Для существования решения f уравнения (1), принадлежащего X_0 , необходимо и достаточно выполнения равенства $\operatorname{Re} \iint_R G \wedge \psi = 0$ для любого регулярного решения ψ уравнения (6) в классе дифференциалов типа $(1, 0)$ с $i\bar{\Lambda}_0$ -поведением в окрестности идеальной границы. Индекс оператора

$$\bar{\partial} + \Xi: X_0 \rightarrow L_2^{0,1}(R)$$

равен $2 - 2h$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bers L. Partial differential equations and pseudo-analytic functions on Riemann surfaces // Ann. of Math. Stud. 1953. V. 30. P. 157–165.
- [2] Волковический К. Л. Обобщенные аналитические функции на римановых поверхностях // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225. № 1. С. 37–40.
- [3] Волковический К. Л. Теорема Лиувилля для обобщенных аналитических функций на открытых римановых поверхностях // Докл. АН УзССР. 1976. Т. 3. С. 11–13.
- [4] Бикчантаев И. А. О решениях эллиптической системы дифференциальных уравнений первого порядка на римановой поверхности // Матем. заметки. 1983. Т. 33. № 1. С. 97–110.
- [5] Бикчантаев И. А. Теорема Лиувилля для обобщенных аналитических функций на открытой римановой поверхности // Изв. вузов. Матем. 1983. № 3. С. 12–15.
- [6] Бикчантаев И. А. Интегральные представления решений эллиптических систем первого порядка на римановых поверхностях // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 9. С. 1557–1565.
- [7] Shiba M. Some general properties of behavior spaces of harmonic semiexact differentials on an open Riemann surface // Hiroshima Math. J. 1978. V. 8. № 1. P. 151–164.
- [8] Бикчантаев И. А. Интегральные операторы И. Н. Векуа на римановой поверхности // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 1. С. 18–30.
- [9] Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
- [10] Shiba M. On the Riemann–Roch theorem on open Riemann surfaces // J. Math. Kyoto Univ. 1971. V. 11. № 3. P. 495–525.
- [11] Бикчантаев И. А. Аналоги ядра Коши на римановой поверхности и некоторые их приложения // Матем. сб. 1980. Т. 112. № 2. С. 256–282.
- [12] Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988.

Казанский государственный университет
E-mail: Ildar.Bikchantaev@ksu.ru

Поступило
08.07.2002