Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Крылов, Е. Г. Пахомова, Когда группа $\text{Hom}(A, B)$ является инъективным $E(B)$ -модулем?, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 1, 100–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 13:54:39

УДК 512.541

КОГДА ГРУППА $\text{Hom}(A, B)$ ЯВЛЯЕТСЯ ИНЪЕКТИВНЫМ $E(B)$ -МОДУЛЕМ?

П. А. Крылов, Е. Г. Пахомова

Для произвольных абелевых групп A и B , причем B нередуцированная, находят-
ся условия инъективности группы гомоморфизмов $\text{Hom}(A, B)$ как левого модуля над
кольцом эндоморфизмов группы B .

Библиография: 13 названий.

Важность для теории абелевых групп круга задач, связанных с понятием инъектив-
ности, подчеркивает постановка проблем 12, 29 и 84г в книгах [1], [2] (см. также обзо-
ры [3], [4]). В работе Ричмена и Уокера [5] описаны абелевы группы, инъективные над
своими кольцами эндоморфизмов. А. В. Иванов [6] выяснил, когда кольцо эндоморфиз-
мов абелевой группы самоинъективно, т.е. является инъективным модулем над собой.
Можно сформулировать более общую задачу. Группа гомоморфизмов $\text{Hom}(A, B)$ явля-
ется левым (правым) модулем над кольцом $E(B)$ (кольцом $E(A)$). Говоря точнее, имеем
 $E(B)$ - $E(A)$ -бимодуль $\text{Hom}(A, B)$. Наличие естественного изоморфизма $\text{Hom}(Z, B) \cong$
 B левых $E(B)$ -модулей и равенства $\text{Hom}(A, A) = E(A)$ показывает, что исследование
группы $\text{Hom}(A, B)$ как $E(B)$ - и $E(A)$ -модуля включает изучение абелевой группы как
модуля над своим кольцом эндоморфизмов и рассмотрение односторонних свойств коль-
ца эндоморфизмов. В [7] охарактеризованы абелевы группы A и B такие, что $\text{Hom}(A, B)$
– инъективный $E(A)$ -модуль и, в предположении редуцированности группы B , – инъ-
ективный $E(B)$ -модуль. В [8] проведено изучение общих свойств инъективного $E(B)$ -мо-
дуля $\text{Hom}(A, B)$ и получен ряд вспомогательных результатов. В настоящей статье за-
вершается в целом исследование группы $\text{Hom}(A, B)$ как инъективного $E(B)$ -модуля.
Рассматривается оставшийся довольно трудный случай нередуцированной группы B .

Терминология и обозначения соответствуют [1], [2], [9], [10]. Все группы в статье абе-
левы; $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел, $\mathbb{Q}$ – поле рациональ-
ных чисел. Буква p обозначает некоторое простое число, K_p – кольцо целых p -адических
чисел, A_p – поле p -адических чисел, $Z(p^\infty)$ – квазициклическая p -группа. Пусть G –
группа. Тогда $r(G)$ – ранг группы G , $r_p(G)$ – ее p -ранг, т.е. ранг фактор-группы G/pG ,
 $E(G)$ – кольцо эндоморфизмов группы G , $T(G)$ – периодическая подгруппа группы G ,
 G_p – ее p -компонента, т.е. максимальная подгруппа в G , являющаяся p -группой. Груп-
па G называется p -делимой, если $pG = G$; $\bigoplus_m G$, $\prod_m G$ – прямая сумма и произведение
 m копий группы G соответственно (m – некоторое кардинальное число), $G[n] = \{x \in G \mid$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследова-
ний, грант № 00-01-00876.

$nx = 0\}$, где $n \in \mathbb{N}$. Для группы A пусть $S_A(G)$ обозначает след A в G , $S_A(G) = \sum \varphi A$, где φ пробегает все гомоморфизмы из A в G . Кольцо всех матриц порядка n над кольцом R обозначаем R_n .

1. Вспомогательные результаты. Для удобства чтения приведем часто используемые в статье результаты.

ТЕОРЕМА 1 [5]. *Группа B является инъективным $E(B)$ -модулем тогда и только тогда, когда $B = \prod_{p \in T} C_p \oplus D$, где T – некоторое множество простых чисел, C_p – конечная p -группа для каждого $p \in T$, D – делимая группа конечного ранга и либо $D = 0$, либо D – несмешанная группа и $C_p = 0$ для почти всех p .*

ТЕОРЕМА 2 [7]. *Пусть A и B – группы, причем B – редуцированная, $S = S_A(B)$. Группа $\text{Hom}(A, B)$ является ненулевым инъективным $E(B)$ -модулем тогда и только тогда, когда существуют вложения*

$$\bigoplus_{p \in T} C_p \subseteq S \subseteq \prod_{p \in T} C_p,$$

где T – некоторое непустое множество простых чисел, C_p – конечная p -группа для каждого $p \in T$, и выполняются следующие условия:

- а) $S_A(P) = S$, где $P = \prod_{p \in T} C_p$;
- б) порядки элементов группы C_p не превосходят порядков циклических прямых слагаемых p -компоненты группы A при любом $p \in T$;
- в) для каждого $p \in T$ существует разложение $B = H_p \oplus C_p$, где H_p – некоторая p -делимая подгруппа группы B .

Используем понятие идеализации бимодуля [11, утверждение 7.11]. Пусть R и S – кольца, M – R - S -бимодуль. Определим кольцо $\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ как множество всех матриц $\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix}$ ($r \in R$, $s \in S$, $m \in M$) с обычными операциями матричного сложения и умножения. Кольцо $\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ называется *идеализацией* бимодуля M . Обозначим его буквой K .

В статье встретятся левые K -модули, имеющие вид “модуля-столбца”. Для экономии места записываем такие модули и их элементы в строку. Пусть X – левый R -модуль, Y – левый S -модуль и $W = (X, Y)$ – множество векторов-столбцов (x, y) , где $x \in X$, $y \in Y$. Отождествляем W с прямой суммой групп X и Y . Предположим, что имеется R -гомоморфизм $g: M \otimes_S Y \rightarrow X$. Определим “умножение” элементов из M на элементы из Y со значением в X , считая, что $ty = g(t \otimes y)$, где $t \in M$, $y \in Y$. Полагаем

$$\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} (x, y) = (rx + my, sy) \quad (1)$$

для любых $r \in R$, $s \in S$, $m \in M$, $x \in X$, $y \in Y$. Проверка показывает, что W превращается в левый K -модуль (в действительности, всякий левый K -модуль можно получить с помощью описанной конструкции “модуля-столбца”). Группы $(X, 0)$, $(0, Y)$ отождествляем с X и Y соответственно. То же для элементов из W . Ясно, что X – подмодуль в W . Следующее утверждение содержится в [8].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. 1) Инъективность K -модуля W равносильна тому, что X – инъективный R -модуль, Y – инъективный S -модуль и для любого R -гомоморфизма $\varphi: M \rightarrow X$ существует $y \in Y$ такой, что $\varphi(m) = my$ при всех $m \in M$.

2) Инъективность K -модуля X равносильна его инъективности как R -модуля и выполнению равенства $\text{Hom}_R(M, X) = 0$.

Идеализации бимодулей появятся в следующей ситуации. Пусть группа $B = D \oplus G$, причем D – вполне характеристическое слагаемое, т.е. $\text{Hom}(D, G) = 0$. Запишем идеализацию $E(D)$ - $E(G)$ -бимодуля $\text{Hom}(G, D)$

$$\begin{pmatrix} E(D) & \text{Hom}(G, D) \\ 0 & E(G) \end{pmatrix}.$$

Кольцо $E(B)$ отождествляется с данным кольцом матриц [2, теорема 106.1], и его можно считать идеализацией указанного бимодуля. В уже использованных обозначениях $K = E(B)$, $R = E(D)$, $S = E(G)$, $M = \text{Hom}(G, D)$. Пусть A – еще одна группа. Имеем левый K -модуль $\text{Hom}(A, B)$. Затем, $\text{Hom}(A, B) = \text{Hom}(A, D) \oplus \text{Hom}(A, G)$, где $\text{Hom}(A, D)$ – левый R -модуль, $\text{Hom}(A, G)$ – левый S -модуль. Полагая $W = \text{Hom}(A, B)$, $X = \text{Hom}(A, D)$, $Y = \text{Hom}(A, G)$, приходим к “модулю-столбцу” $W = (X, Y)$ с модульным умножением (1). Произведение my есть композиция отображений m и y . Если $\text{Hom}(A, B)$ – инъективный $E(B)$ -модуль, то по предложению 1 $\text{Hom}(A, D)$ – инъективный $E(D)$ -модуль, $\text{Hom}(A, G)$ – инъективный $E(G)$ -модуль и выполняется условие на гомоморфизмы φ . Инъективность $\text{Hom}(A, D)$ как $E(B)$ -модуля равносильна его инъективности как $E(D)$ -модуля и выполнению равенства

$$\text{Hom}_{E(D)}(\text{Hom}(G, D), \text{Hom}(A, D)) = 0.$$

2. Случай делимой группы B .

ТЕОРЕМА 3. Пусть A – произвольная, D – делимая группы. $E(D)$ -модуль $\text{Hom}(A, D)$ является ненулевым инъективным тогда и только тогда, когда A – непериодическая группа, D – несмешанная группа конечного ранга, и если $D_p \neq 0$, то $A_p = 0$ для любого p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Допустим, что A – периодическая группа. Тогда имеется p -компонента D_p такая, что $\text{Hom}(A, D_p) \neq 0$. По предложению 1 $\text{Hom}(A, D_p)$ – инъективный $E(D_p)$ -модуль. Умножение группы D_p на p является делителем нуля в $E(D_p)$. Следовательно, $\text{Hom}(A, D_p)$ делится на p [10, утверждение 2.16], что противоречит [1, теорема 47.1]. Итак, группа A имеет элемент a бесконечного порядка.

Установим, что $r(D) < \infty$. Допустим противное; запишем $D = \bigoplus_{i=1}^{\infty} D_i$, где все $D_i \neq 0$. Положим $W = \prod_{i=1}^{\infty} D_i$ и выберем элемент $d \in W - D$. В силу инъективности группы W существует гомоморфизм $\varphi: A \rightarrow W$, переводящий a в d . Пусть $\pi_i: D \rightarrow D_i$ – проекция, φ_i – композиция φ с проекцией $W \rightarrow D_i$, $i \geq 1$. Здесь $\varphi_i \in \pi_i \text{Hom}(A, D)$. По [5, лемма 6] найдется $\psi: A \rightarrow D$ со свойством $\pi_i \psi = \varphi_i$ для каждого i . Понятно, что $\varphi = \psi$, чего не может быть. Значит, $r(D) < \infty$.

Предположим, что D – смешанная группа, D_0 – ее часть без кручения, D_p – некоторая p -компонента. Согласно предложению 1 $\text{Hom}(A, D_p \oplus D_0)$ – инъективный модуль над кольцом $E(D_p \oplus D_0)$. Считаем, что $D = D_p \oplus D_0$ и приведем это к противоречию.

Зафиксируем некоторую p -базисную подгруппу V группы A . Имеем индуцированную последовательность модулей

$$0 \rightarrow \text{Hom}(A/V, D) \rightarrow \text{Hom}(A, D) \rightarrow \text{Hom}(V, D) \rightarrow 0$$

(под словом “модуль” и т.п. понимаем “ $E(D)$ -модуль”). Группа $\text{Hom}(A/V, D)$ есть p -адическая алгебраически компактная группа [1, теорема 47.7]. Значит, она – p -сервантно инъективная группа, являющаяся p -сервантной подгруппой в $\text{Hom}(A, D)$ [1, предложение 44.7]. Следовательно, последовательность расщепляется и крайние в ней модули инъективны. Возьмем некоторое циклическое прямое слагаемое C группы V . Тогда $\text{Hom}(C, D)$ – инъективный модуль. Пусть $C \cong Z(p^k)$, $k \in \mathbb{N}$. Из $\text{Hom}(C, D) \cong D[p^k]$ заключаем, что $D[p^k]$ – прямое слагаемое в D , что невозможно. Если же $C \cong \mathbb{Z}$, то $\text{Hom}(C, D) \cong D$ – инъективный модуль. Но это противоречит теореме 1. Следовательно, $V = 0$ и A – p -делимая группа.

Положим $K = \bigcap \ker \alpha$, где α пробегает все гомоморфизмы $A \rightarrow D$, и $A_1 = A/K$. Здесь A_1 – прямая сумма ненулевой p -делимой группы без кручения и делимой p -группы. Можно считать, что сама A – p -делимая группа без кручения. Возьмем точную последовательность модулей

$$0 \rightarrow \text{Hom}(U/A, D) \rightarrow \text{Hom}(U, D) \rightarrow \text{Hom}(A, D) \rightarrow 0,$$

в которой U – делимая оболочка A . Периодическая группа U/A имеет нулевую p -компоненту. Значит, $\text{Hom}(U/A, D) = 0$ и $\text{Hom}(U, D) \cong \text{Hom}(A, D)$. Группа Q служит прямым слагаемым для U , поэтому $\text{Hom}(Q, D)$ – инъективный модуль.

К этому модулю применим предложение 1 (см. также абзац после него). Запишем $D_p = \bigoplus_m Z(p^\infty)$, $D_0 = \bigoplus_n Q$, где $m, n \in \mathbb{N}$. Имеем $R = E(D_p) = (K_p)_m$,

$$M = \text{Hom}(D_0, D_p) = \bigoplus_n \text{Hom}(Q, D_p) = \bigoplus_n \left(\bigoplus_m A_p \right),$$

$$X = \text{Hom}(Q, D_p) = \bigoplus_m A_p, \quad Y = \text{Hom}(Q, D) = D \text{ и}$$

$$\text{Hom}_R(M, X) = \bigoplus_n \text{Hom}_R \left(\bigoplus_m A_p, \bigoplus_m A_p \right).$$

Последняя сумма изоморфна $\bigoplus_n \text{Hom}_{K_p}(A_p, A_p) = \bigoplus_n A_p$ [12, теорема 1.2]. Поскольку $\text{Hom}_R(M, X)$ имеет мощность континуума, а Y – счетное множество, условие на φ из предложения 1 не выполняется. Получили противоречие. Таким образом, D – несмешанная группа.

Для периодической группы D проверим, что $A_p = 0$ при $D_p \neq 0$. Допустим, что C – неразложимое прямое слагаемое группы A_p . Тогда $\text{Hom}(C, D)$ – инъективный модуль. Как и выше, получается, что случай $C \cong Z(p^k)$ невозможен. Пусть $C \cong Z(p^\infty)$. Учитывая строение кольца $E(D)$ и группы $\text{Hom}(Z(p^\infty), D)$, находим следующее. Элемент p^1 , будучи неделителем нуля в $E(D)$, должен делить группу $\text{Hom}(C, D)$ [10, утверждение 2.16], чего не может быть. Следовательно, $A_p = 0$.

Достаточность. Если D – делимая группа без кручения конечного ранга, то $E(D)$ – полное кольцо матриц над Q . Над таким кольцом каждый модуль инъективен. Для

периодической группы D имеем модульное разложение $\text{Hom}(A, D) \cong \bigoplus_p \text{Hom}(A, D_p)$. Поэтому считаем, что D – делимая p -группа конечного ранга и $A_p = 0$. Покажем инъективность модуля $\text{Hom}(A, D)$. Обозначим через V одну из p -базисных подгрупп группы A и рассмотрим точную последовательность модулей

$$0 \rightarrow \text{Hom}(A/V, D) \rightarrow \text{Hom}(A, D) \rightarrow \text{Hom}(V, D) \rightarrow 0.$$

Установим инъективность крайних модулей. Поскольку $V = \bigoplus_s \mathbb{Z}$, где s – некоторое кардинальное число, то $\text{Hom}(V, D) \cong \prod_s \text{Hom}(\mathbb{Z}, D) \cong \prod_s D$. Осталось заметить, что D – инъективный модуль (теорема 1). Возьмем модуль $\text{Hom}(A/V, D)$. Обозначим $G = A/V$. Ввиду $A_p = 0$, также $G_p = 0$. Отсюда $\text{Hom}(T(G), D) = 0$ и $\text{Hom}(G, D) \cong \text{Hom}(G/T(G), D)$. Считаем, что сама G – p -делимая группа без кручения. Пусть U – ее делимая оболочка; p -компонента периодической группы U/G равна нулю, $\text{Hom}(U/G, D) = 0$ и $\text{Hom}(G, D) \cong \text{Hom}(U, D) \cong \prod_t \text{Hom}(Q, D)$ для некоторого кардинального числа t . Достаточно убедиться в инъективности модуля $\text{Hom}(Q, D)$. Но это известно, поскольку $E(D) \cong (K_p)_m$, где $m \in \mathbb{N}$, а

$$\text{Hom}(Q, D) \cong \bigoplus_m \text{Hom}(Q, Z(p^\infty)) \cong \bigoplus_m A_p.$$

3. Случай нередуцированной и неделимой группы B . Пусть A и B – группы, причем B – нередуцированная и неделимая. Запишем $B = D \oplus G$, где D – делимая, G – редуцированная части группы B . Согласно предположению $D, G \neq 0$. Буквы A, B, D и G сохраняют свой смысл до конца работы. Удобнее формулировать результат отдельно для непериодической и периодической группы A .

ТЕОРЕМА 4. Если A – непериодическая, B – нередуцированная и неделимая группы, то $\text{Hom}(A, B)$ – инъективный $E(B)$ -модуль тогда и только тогда, когда $S_A(G) = \bigoplus_{p \in T} C_p$, где T – некоторое множество простых чисел, C_p – конечная p -группа, и выполняются следующие условия:

- $S_A(P) = S_A(G)$, где $P = \prod_{p \in T} C_p$;
- порядки элементов группы C_p не превосходят порядков циклических прямых слагаемых группы A_p при любом $p \in T$;
- D – несмешанная группа конечного ранга;
- если D не имеет кручения, то $B = D \oplus S_A(G) \oplus H$, где H – периодическая группа;
- если D – периодическая группа, то $A_p = 0$, G_p – ограниченная группа и $r_p(G/T(G)) = r(G/T(G)) < \infty$ для каждого p с $D_p \neq 0$; при этом, если $pA \neq A$, то $B = D \oplus S_A(G) \oplus Y$, где Y – периодическая группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Под словом “модуль” и т.п. будем подразумевать “ $E(B)$ -модуль”.

В группе A имеется элемент a бесконечного порядка. Всякий гомоморфизм $\langle a \rangle \rightarrow D$ продолжается до гомоморфизма $A \rightarrow D$. Это влечет $D \subseteq S_A(B)$ и $S_A(B) = D \oplus S_A(G)$.

Пусть $\text{Hom}(A, B)$ – инъективный модуль. По предположению 1 $\text{Hom}(A, D)$ – инъективный $E(D)$ -модуль, а $\text{Hom}(A, G)$ – инъективный $E(G)$ -модуль. Значит, след $S_A(G)$ имеет

указанное в теореме 2 строение и справедливы условия а) и б). Относительно следа оказалось убедиться, что он равен сумме групп C_p . По теореме 3 группа D имеет конечный ранг, является несмешанной группой и $A_p = 0$ при $D_p \neq 0$. Поэтому верно в).

Установим г). Пусть W – инъективная оболочка модуля $\text{Hom}(A, D)$. Допустим, что $\varphi \in W$ и $\varphi \notin \text{Hom}(A, D)$. Существует p такое, что φA имеет ненулевую проекцию на C_p (в силу теоремы 2 каждая компонента C_p является прямым слагаемым группы B). Обозначив через π проекцию $B \rightarrow C_p$, получим $\pi\varphi: A \rightarrow C_p$ и $0 \neq \pi\varphi \in W$. Поскольку $\text{Hom}(A, D)$ – существенный подмодуль в W , найдется $\alpha \in E(B)$ со свойством $0 \neq \alpha\pi\varphi \in \text{Hom}(A, D)$, что невозможно. Таким образом, $\text{Hom}(A, D) = W$ и $\text{Hom}(A, D)$ – инъективный модуль. Возьмем делимую оболочку U группы A . Тогда $\text{Hom}(U/A, D) = 0$ и $\text{Hom}(U, D) \cong \text{Hom}(A, D)$. В U содержится группа Q . Следовательно, $\text{Hom}(Q, D)$ – инъективный модуль. Из $\text{Hom}(Q, D) \cong D$ выводим инъективность D . Значит, разложение $B = D \oplus G$ является модульным, т.е. G – вполне характеристическая подгруппа и $\text{Hom}(G, D) = 0$. Это дает периодичность группы G и $S_A(G) = \bigoplus_{p \in T} C_p$. Поскольку $G = H_p \oplus C_p$ и $pH_p = H_p$ (теорема 2), то $C_p = G_p$ для всякого $p \in T$. Теперь можно записать $B = D \oplus S_A(G) \oplus H$, где H – периодическая группа.

Перейдем к д). Зафиксируем число p с $D_p \neq 0$. Положим $E_p = D_p \oplus C_p$ и $E_p = D_p$, если $C_p = 0$. Виду теоремы 2 $B = E_p \oplus H$ для некоторой группы H . Далее, $\text{Hom}(A, T(H))$ – подмодуль в $\text{Hom}(A, B)$. Из инъективности группы D_p выводим существенность модуля $\text{Hom}(A, E_p \oplus T(H))$ в $\text{Hom}(A, B)$. Запишем $\text{Hom}(A, B) = W_1 \oplus W_2$, где W_1 (W_2) – инъективная оболочка модуля $\text{Hom}(A, E_p)$ ($\text{Hom}(A, T(H))$). Имеем также групповое разложение $\text{Hom}(A, B) = \text{Hom}(A, E_p) \oplus \text{Hom}(A, H)$. Подобно г), можно установить равенство $\text{Hom}(A, E_p) = W_1$. Проверим, что $\text{Hom}(A, H) = W_2$. Для $\varphi \in W_2$ запишем $\varphi = \alpha + \beta$, где $\alpha \in \text{Hom}(A, E_p)$, $\beta \in \text{Hom}(A, H)$. Пусть $\pi: B \rightarrow E_p$ – проекция. Тогда $\pi\varphi = \pi\alpha + \pi\beta = \pi\alpha \neq 0$ при $\alpha \neq 0$. С другой стороны, $\pi\varphi = \pi\alpha \in W_1 \cap W_2 = 0$; противоречие. Итак, $\alpha = 0$ и $\varphi = \beta \in \text{Hom}(A, H)$. Имеем включение $W_2 \subseteq \text{Hom}(A, H)$ и, значит, равенство. Разложение $\text{Hom}(A, B) = \text{Hom}(A, E_p) \oplus \text{Hom}(A, H)$ является модульным. Следовательно, $\text{Hom}(S_A(H), E_p) = 0$. Отсюда $S_A(H)$, $S_A(G)$ – периодические группы и $S_A(G) = \bigoplus_{p \in T} C_p$.

Можно считать, что $pA = A$. Запишем, как и выше, $B = D_p \oplus H$ ($C_p = 0$ и $E_p = D_p$). Положим $R = E(D_p)$, $M = \text{Hom}(H, D_p)$ и $X = \text{Hom}(A, D_p)$. Поскольку $\text{Hom}(A, D_p)$ – инъективный модуль (он равен W_1), по предложению 1 $\text{Hom}_R(M, X) = 0$, откуда

$$\text{Hom}_{K_p}(\text{Hom}(H, Z(p^\infty)), \text{Hom}(A, Z(p^\infty))) = 0 \quad (2)$$

(см. [12, теорема 1.2] и похожее место в доказательстве теоремы 3). Далее,

$$\text{Hom}(A, Z(p^\infty)) \cong \text{Hom}(U, Z(p^\infty)),$$

где U – делимая оболочка группы $A/T(A)$ (учесть, что $A_p = 0$ и $pA = A$). Следовательно,

$$\text{Hom}(A, Z(p^\infty)) \cong \text{Hom}\left(\bigoplus_t Q, Z(p^\infty)\right) \cong \prod_t \text{Hom}(Q, Z(p^\infty)) \cong \prod_t A_p,$$

где $t = r(A/T(A))$. Теперь (2) влечет, что $\text{Hom}(H, Z(p^\infty))$ – периодическая группа. Принимая во внимание строение этой группы [1, теорема 47.1], выводим ограниченность

компоненты H_p . Теперь заметим, что $G_p = H_p$. Пусть F – p -базисная подгруппа группы L , равной $H/T(H)$. Группа $\text{Hom}(L, Z(p^\infty))$ является периодической. Снова учитывая строение этой группы, выводим, что L/F – периодическая группа, $r(F) < \infty$ и $r_p(L) = r(L) < \infty$. Это и утверждалось, поскольку $G/T(G) \cong L$.

Предположим теперь, что $D_p \neq 0$ и $pA \neq A$ для некоторого p . Выберем p -базисную подгруппу V группы A . Имеем p -сервантно точную последовательность модулей

$$0 \rightarrow \text{Hom}(A/V, E_p) \rightarrow \text{Hom}(A, E_p) \rightarrow \text{Hom}(V, E_p) \rightarrow 0$$

(E_p – определенная выше группа). Она заканчивается справа нулем в силу p -сервантной инъективности группы E_p . Аналогично доказательству теоремы 3 устанавливается расщепляемость последовательности. Отсюда $\text{Hom}(V, E_p)$ и $\text{Hom}(Z, E_p)$ – инъективные модули (группа V свободна ввиду $A_p = 0$). Из $E_p \cong \text{Hom}(Z, E_p)$ следует инъективность модуля E_p . Поэтому разложение $B = E_p \oplus H$ является модульным, т.е. H – вполне характеристическая подгруппа. Так же, как в г), получаем $B = D \oplus S_A(G) \oplus Y$, где Y – периодическая группа.

Достаточность. Пусть D не имеет кручения. Все слагаемые разложения $B = D \oplus S \oplus H$ ($S = S_A(G)$) вполне характеристичны. Следовательно, имеем произведение колец $E(B) = E(D) \times E(S) \times E(H)$ и модульное разложение

$$\text{Hom}(A, B) = \text{Hom}(A, D) \oplus \text{Hom}(A, S).$$

Покажем инъективность каждого из слагаемых. По [7, лемма 2.2] это равносильно тому, что $\text{Hom}(A, D)$ – инъективный $E(D)$ -модуль, а $\text{Hom}(A, S)$ – инъективный $E(S)$ -модуль.

Пусть D – периодическая группа. Тогда $\text{Hom}(A, B)$ – произведение модулей следующих трех видов: $\text{Hom}(A, D_p)$, $\text{Hom}(A, D_p \oplus C_p)$ и $\text{Hom}(A, C_p)$. Докажем, что каждый из них инъективен.

Возьмем $\text{Hom}(A, D_p)$. По теореме 3 $\text{Hom}(A, D_p)$ – инъективный $E(D_p)$ -модуль (подразумевается, что $C_p = 0$). Запишем $B = D_p \oplus H$ и обозначим $M = \text{Hom}(H, D_p)$, $X = \text{Hom}(A, D_p)$. Проверим, что $\text{Hom}(M, X) = 0$. Прежде убедимся, что M – периодическая группа. Компонента H_p ограничена, поэтому $M \cong \text{Hom}(H_p, D_p) \oplus \text{Hom}(H/H_p, D_p)$, где $\text{Hom}(H_p, D_p)$ – ограниченная группа. Группа $\text{Hom}(H/H_p, D_p)$ совпадает с $\text{Hom}(L, D_p)$, где $L = H/T(H)$. И далее, $\text{Hom}(L, D_p) = \text{Hom}(F, D_p) \oplus \text{Hom}(L/F, D_p)$, где F – p -базисная подгруппа группы L . Из $r_p(L) = r(L) < \infty$ выводим периодичность группы $\text{Hom}(F, D_p)$. Затем замечаем, что L/F – периодическая группа и, следовательно, $\text{Hom}(L/F, D_p) = \text{Hom}(E, D_p)$, где E – p -компонента группы L/F . На основании $r_p(L) = r(L) < \infty$ имеем, что E – прямая сумма циклических групп [13, теорема 0.2]. Значит, $\text{Hom}(L/F, D_p)$ – конечная группа. Итак, группа $\text{Hom}(L, D_p)$, а вместе с ней и M , – периодические группы. Относительно X поясним следующее. Если $pA \neq A$, то B – периодическая группа и $M = 0$. При $pA = A$ группа X не имеет кручения. В любом случае $\text{Hom}(M, X) = 0$. По предложению 1 $\text{Hom}(A, D_p)$ – инъективный модуль.

Рассмотрим модуль $\text{Hom}(A, D_p \oplus C_p)$. Поскольку $pA \neq A$, то B – периодическая группа. В разложении $B = (D_p \oplus C_p) \oplus H$ оба слагаемых вполне характеристичны. Достаточно доказать, что $\text{Hom}(A, D_p \oplus C_p)$ – инъективный модуль над кольцом эндоморфизмов K группы E_p , равной $D_p \oplus C_p$ [7, лемма 2.2]. Поскольку $A_p = 0$ и $pA \neq A$,

то p -базисная подгруппа V группы A свободна. Индуцированная последовательность K -модулей

$$0 \rightarrow \text{Hom}(A/V, E_p) \rightarrow \text{Hom}(A, E_p) \rightarrow \text{Hom}(V, E_p) \rightarrow 0$$

расщепляется (см. выше). Достаточно установить инъективность крайних K -модулей. Имеем $\text{Hom}(V, E_p) \cong \prod_s \text{Hom}(Z, E_p) \cong \prod_s E_p$ (s – некоторое кардинальное число), где E_p – инъективный K -модуль (теорема 1). Положим $M = \text{Hom}(C_p, D_p)$, $X = \text{Hom}(A/V, E_p)$. Тогда $\text{Hom}(M, X) = 0$, так как M – конечная группа, а X не имеет кручения. По теореме 3 X – инъективный $E(D_p)$ -модуль. Следовательно, X инъективен как K -модуль (предложение 1).

Обратимся к модулю $\text{Hom}(A, C_p)$ (предполагается, что $D_p = 0$). Из $pA \neq A$ вытекают периодичность B и вполне характеристичность слагаемых в разложении $B = C_p \oplus H$. Достаточно показать инъективность $\text{Hom}(A, C_p)$ как $E(C_p)$ -модуля. Но это содержится в теореме 2.

ТЕОРЕМА 5. Если A – периодическая, B – неделимая и нередуцированная группы, то $\text{Hom}(A, B)$ – ненулевой инъективный $E(B)$ -модуль тогда и только тогда, когда $S_A(B) = \bigoplus_{p \in T} C_p$, где T – некоторое непустое множество простых чисел, C_p – конечная p -группа для каждого $p \in T$ и выполняются условия б), в) теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Запишем, как перед теоремой 4, $B = D \oplus G$. По предложению 1 $\text{Hom}(A, D)$ – инъективный $E(D)$ -модуль, $\text{Hom}(A, G)$ – инъективный $E(G)$ -модуль. На самом деле $\text{Hom}(A, D) = 0$, поскольку по теореме 3 $A_p = 0$ при $D_p \neq 0$. Отсюда $S_A(B) = S_A(G) = \bigoplus_{p \in T} C_p$, где T непусто. Справедливы также условия б), в) теоремы 2.

Достаточность. Для данного $p \in T$ запишем $B = H_p \oplus C_p$, где $pH_p = H_p$. Допустим, что $D_p \neq 0$. Учитывая строение следа $S_A(B)$, можно найти, что $A_p = 0$ и $C_p = 0$; противоречие. Значит, $D_p = 0$. Это влечет вполне характеристичность слагаемых H_p и C_p . По теореме 2 и [7, лемма 2.2] $\text{Hom}(A, C_p)$ – инъективный $E(B)$ -модуль. Теперь имеем

$$\text{Hom}(A, B) = \text{Hom}\left(A, \bigoplus_{p \in T} C_p\right) = \text{Hom}\left(A, \prod_{p \in T} C_p\right) \cong \prod_{p \in T} \text{Hom}(A, C_p),$$

что дает инъективность $\text{Hom}(A, B)$. Теорема доказана.

Из теорем 2–5 выводятся условия инъективности $E(B)$ -модуля $\text{Hom}(A, B)$ для некоторых основных ситуаций. Можно также найти строение инъективного $E(B)$ -модуля $\text{Hom}(A, B)$. Пусть C_p – конечная p -группа, D_p (D_0) – делимая p -группа (группа без кручения) конечного ранга. Левые модули $\text{Hom}(\mathbb{Z}, C_p)$, $\text{Hom}(\mathbb{Z}, D_p \oplus C_p)$, $\text{Hom}(\mathbb{Z}, D_p)$, $\text{Hom}(Q, D_p \oplus C_p)$, $\text{Hom}(Q, D_p)$ и $\text{Hom}(Q, D_0)$ инъективны над соответствующими кольцами эндоморфизмов. Инъективный $E(B)$ -модуль $\text{Hom}(A, B)$ является произведением какого-то числа экземпляров каждого из этих модулей для различных p , т.е. модулей C_p , $D_p \oplus C_p$, D_p , $\bigoplus_{n_p} A_p$ ($n_p \in \mathbb{N}$) и D_0 .

Условие а) из теорем 2 и 4 можно заменить некоторым более обозримым групповым условием. В теореме 2 след S является сервантной вполне характеристической подгруппой в произведении $\prod_{p \in T} C_p$. Условие а) обобщает свойство подгруппы S быть сервант-

ной вполне характеристической подгруппой в $\prod_{p \in T} C_p$ (как у А. В. Иванова в [6]). Используя эти обстоятельства, из теорем 2–5 и [7] можно вывести результаты Иванова [6] о самоинъективных кольцах эндоморфизмов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М.: Мир, 1974.
- [2] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. М.: Мир, 1977.
- [3] Мишина А. П., Михалев А. В. Бесконечные абелевы группы: методы и результаты // Фундамент. и прикл. матем. 1995. Т. 1. № 2. С. 319–375.
- [4] Mishina A. P. Abelian groups // J. Math. Sci. 1995. V. 76. № 6. P. 2721–2792.
- [5] Richman F., Walker E. Ring theory. New York: Academic Press, 1972.
- [6] Иванов А. В. Абелевы группы с самоинъективными кольцами эндоморфизмов и кольцами эндоморфизмов с аннуляторным условием // Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во ТГУ, 1982. С. 93–109.
- [7] Крылов П. А., Пахомова Е. Г. Абелевы группы как инъективные модули над кольцами эндоморфизмов // Фундамент. и прикл. матем. 1998. Т. 4. № 4. С. 1365–1384.
- [8] Крылов П. А., Пахомова Е. Г. Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во ТГУ, 1996.
- [9] Ламбек И. Кольца и модули. М.: Мир, 1971.
- [10] Пунинский Г. Е., Туганбаев А. А. Кольца и модули. М.: Союз, 1998.
- [11] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. М.: Мир, 1977.
- [12] Кон П. Свободные кольца и их связи. М.: Мир, 1975.
- [13] Arnold D. M. Finite rank torsion-free abelian groups and rings // Lect. Notes in Math. 1982. V. 931.

Томский государственный университет
E-mail: krylov@math.tsu.ru

Поступило
05.07.2002