Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, Сравнение Никулина для четырехмерных M -многообразий, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 2, 205–215

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm100>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 18:07:53

УДК 512.7

СРАВНЕНИЕ НИКУЛИНА ДЛЯ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ M -МНОГООБРАЗИЙ

В. А. Краснов

Для вещественных алгебраических четырехмерных M -многообразий доказыва-
ется сравнение для эйлеровой характеристики множества вещественных точек, которое
является аналогом сравнения Никулина эйлеровой характеристики M -поверхности.

Библиография: 12 названий.

Введение. Пусть далее X – n -мерное неособое проективное вещественное алгебра-
ическое многообразие, т.е. X – схема над $\mathbb{R}$ такая, что произведение $X \otimes \mathbb{C}$ является
 n -мерным неособым проективным комплексным алгебраическим многообразием. Мно-
жество комплексных точек $X(\mathbb{C})$ тогда является компактным комплексным n -мерным
многообразием, а множество вещественных точек $X(\mathbb{R})$, если оно непустое, является
 n -мерным компактным дифференцируемым многообразием (может быть, несвязным).
Будем предполагать, что X является M -многообразием, тогда множество $X(\mathbb{R})$ непусто-
е. Напомним, что X называется M -многообразием, если становится равенством сле-
дующее неравенство Гарнака–Тома для размерностей над полем $\mathbb{Z}/2$ полных прост-
ранств гомологий:

$$\dim H_*(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \leq \dim H_*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2).$$

Если n нечетное, то эйлерова характеристика $\chi(X(\mathbb{R}))$ равна нулю, а если n четное, то
выполняется сравнение Рохлина (см. [1])

$$\chi(X(\mathbb{R})) \equiv \sigma(X(\mathbb{C})) \pmod{16},$$

где $\sigma(X(\mathbb{C}))$ – сигнатура многообразия $X(\mathbb{C})$. Далее предполагаем, что n четное и
равно $2m$. Пусть $v_m(X(\mathbb{R}))$, $v_n(X(\mathbb{C}))$ – характеристические классы Ву, тогда для
 M -многообразия X из равенства $v_m(X(\mathbb{R})) = 0$ следует равенство $v_n(X(\mathbb{C})) = 0$ (см.
[2]). Далее предполагаем, что $v_m(X(\mathbb{R})) = 0$; тогда $v_n(X(\mathbb{C})) = 0$, и поэтому $\sigma(X(\mathbb{C})) \equiv$
 $0 \pmod{8}$, а если X – поверхность, то $\sigma(X(\mathbb{C})) \equiv 0 \pmod{16}$. Следовательно, для по-
верхности получаем сравнение

$$\chi(X(\mathbb{R})) \equiv 0 \pmod{16}, \quad (0.1)$$

а в общем случае

$$\chi(X(\mathbb{R})) \equiv 0 \pmod{8}.$$

Заметим, что условие $v_1(X(\mathbb{R})) = 0$ означает, что многообразие $X(\mathbb{R})$ ориентируемое. Таким образом, *если X – M -поверхность и множество вещественных точек $X(\mathbb{R})$ ориентируемо, то выполняется сравнение (0.1).* В работе Никулина [3] для поверхности, удовлетворяющей условию $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = 0$, получено следующее усиление сравнения (0.1): *если X – M -поверхность и множество вещественных точек $X(\mathbb{R})$ ориентируемо, а для эйлеровой характеристики каждой компоненты связности X_i множества $X(\mathbb{R})$ выполняется сравнение $\chi(X_i) \equiv 0 \pmod{2^\mu}$, то для эйлеровой характеристики множества $X(\mathbb{R})$ справедливо сравнение*

$$\chi(X(\mathbb{R})) \equiv 0 \pmod{2^{\mu+3}}.$$

Эта теорема была доказана в [3] очень сложным способом. С помощью эквивариантных когомологий в [4] это доказательство было упрощено, причем оно проходило в случае $\text{Tors } H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = 0$. Затем в [5] условие на группу $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ было полностью снято.

Возникает вопрос о получении аналогов сравнения Никулина для многообразий произвольной размерности. В данной работе мы показываем, что справедлива

ТЕОРЕМА 0.1. *Пусть X – 4-мерное неособое проективное вещественное алгебраическое M -многообразие такое, что множество вещественных точек $X(\mathbb{R})$ удовлетворяет условиям:*

- 1) $X(\mathbb{R})$ – ориентируемое многообразие и $w_2(X(\mathbb{R})) = 0$;
- 2) *если $X_1, \dots, X_s$ – компоненты связности множества $X(\mathbb{R})$, то для эйлеровой характеристики каждой компоненты выполняется сравнение*

$$\chi(X_i) \equiv 0 \pmod{2^\mu}$$

при некотором $\mu \geq 2$;

- 3) *группа $H_2(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z})$ не содержит ненулевых элементов второго порядка, и гомоморфизм*

$$H_2(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2),$$

индуцированный вложением $X(\mathbb{R}) \subset X(\mathbb{C})$, мономорфен.

Тогда справедливо сравнение

$$\chi(X(\mathbb{R})) \equiv 0 \pmod{2^{\mu+3}}.$$

Автор не знает примеров четырехмерных вещественных алгебраических M -многообразий, для которых выполнялись бы все требуемые условия. Может оказаться, что эта теорема является утверждением о пустом классе вещественных алгебраических многообразий. В связи с этим в статье доказывается более общая теорема в категории дифференцируемых многообразий, где нетрудно построить примеры многообразий с инволюцией, удовлетворяющих всем условиям следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 0.2. Пусть X – 8-мерное связное компактное ориентированное дифференцируемое многообразие, $g: X \rightarrow X$ – инволюция, сохраняющая ориентацию, такая, что пара (X, g) является M -многообразием, а множество неподвижных точек X^g удовлетворяет следующим условиям:

- 1) X^g является 4-мерным ориентируемым многообразием, и выполняется равенство $w_2(\nu) = 0$, где ν – нормальное расслоение к X^g в X ;
- 2) если $X_1, \dots, X_s$ – компоненты связности многообразия X^g , то для индексов самопересечения выполняются сравнения

$$X_i \cdot X_i \equiv 0 \pmod{2^\mu}, \quad i = 1, \dots, s,$$

при некотором $\mu \geq 2$;

- 3) группа $H_2(X^g, \mathbb{Z})$ не содержит ненулевых элементов второго порядка, и гомоморфизм

$$H_2(X^g, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_2(X, \mathbb{Z}/2),$$

индуцированный вложением $X^g \subset X$, мономорфен.

Тогда справедливо сравнение

$$X^g \cdot X^g \equiv 0 \pmod{2^{\mu+3}}.$$

Заметим, что если нормальное расслоение к X^g в X изоморфно касательному расслоению на X^g , то индекс самопересечения $X_i \cdot X_i$ равен эйлеровой характеристике $\chi(X_i)$ и получается теорема об эйлеровой характеристике. Для инволюции комплексного сопряжения на $X(\mathbb{C})$ множество неподвижных точек $X(\mathbb{C})^g$ равно множеству вещественных точек $X(\mathbb{R})$ и нормальное расслоение к $X(\mathbb{R})$ в $X(\mathbb{C})$ изоморфно касательному на $X(\mathbb{R})$, поэтому и получается теорема об эйлеровой характеристике.

При доказательстве этих теорем мы применяем эквивариантные когомологии топологического пространства с инволюцией. Так как соответствующая теория подробно изложена в разных работах (см., например, [6]–[9]), то далее мы касаемся ее очень кратко. Заметим также, что в работе доказаны более общие теоремы, а именно, из условий теоремы 0.2 вытекает, что существуют нечетные числа $m_1, \dots, m_s$ такие, что для классов гомологий

$$[X_1], \dots, [X_s] \in H_4(X, \mathbb{Z})/\text{Tors}$$

выполняется сравнение

$$m_1[X_1] + \dots + m_s[X_s] \equiv 0 \pmod{2^\mu}.$$

Аналогичное сравнение вытекает из условий теоремы 0.1, а сравнения в теоремах 0.1, 0.2 нетрудно вывести из сравнений для классов гомологий. По такой же схеме доказывались сравнения для эйлеровой характеристики поверхности в работах [3]–[5]. Вполне возможно, что для справедливости более слабого утверждения в теореме 0.1 нужны более слабые ограничения на множество вещественных точек.

1. Гомоморфизмы эквивариантных когомологий. В этом пункте мы изложим без доказательства несколько фактов про эквивариантные когомологии топологического пространства с инволюцией, которые потребуются в следующем пункте при доказательстве сравнений. Нам будет достаточно рассмотреть эти когомологии в категории симплициальных пространств. Итак, пусть далее X – конечное симплициальное разбиение, на котором действует группа второго порядка $G = \{1, g\}$ (конечно, действие симплициальное). Тогда для произвольной абелевой G -группы A определены эквивариантные когомологии $H^q(X; G, A)$ и эквивариантные гомологии $H_q(X; G, A)$. Проще всего это сделать с помощью бикомплексов (см. [10]).

Пусть $C^q = C^q(X, A)$ – группа симплициальных q -мерных коцепей с коэффициентами в абелевой G -группе A . Тогда она является G -модулем и можно рассмотреть следующий бикомплекс, все строки которого одинаковые и являются стандартным коцепным комплексом симплициального разбиения X :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & \uparrow 1-g & & \uparrow 1-g & & \uparrow 1-g & & \uparrow 1-g \\
 0 & \longrightarrow & C^0 & \xrightarrow{\delta} & C^1 & \xrightarrow{\delta} & C^2 & \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} C^m \longrightarrow 0 \\
 & \uparrow 1+g & & \uparrow 1+g & & \uparrow 1+g & & \uparrow 1+g \\
 0 & \longrightarrow & C^0 & \xrightarrow{\delta} & C^1 & \xrightarrow{\delta} & C^2 & \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} C^m \longrightarrow 0, \\
 & \uparrow 1-g & & \uparrow 1-g & & \uparrow 1-g & & \uparrow 1-g \\
 0 & \longrightarrow & C^0 & \xrightarrow{\delta} & C^1 & \xrightarrow{\delta} & C^2 & \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} C^m \longrightarrow 0 \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array} \quad (1.1)$$

где $m = \dim X$ и действие инволюции $g \in G$ на группе C^q также обозначено через g . Эквивариантные когомологии $H^q(X; G, A)$ равны полным когомологиям этого бикомплекса, т.е.

$$H^q(X; G, A) = \frac{\text{Ker}[C^q \oplus C^{q-1} \oplus \dots \oplus C^0 \xrightarrow{d} C^{q+1} \oplus C^q \oplus \dots \oplus C^0]}{\text{Im}[C^{q-1} \oplus C^{q-2} \oplus \dots \oplus C^0 \xrightarrow{d} C^q \oplus C^{q-1} \oplus \dots \oplus C^0]}.$$

Полная группа эквивариантных когомологий

$$H^*(X; G, A) = \bigoplus_{q \geq 0} H^q(X; G, A)$$

является модулем над кольцом

$$H^*(\text{pt}, G; \mathbb{Z}) = H^*(G; \mathbb{Z}),$$

где pt – одноточечное пространство. Структура модуля на полной группе эквивариантных когомологий возникает из проекции $X \rightarrow \text{pt}$. Кольцо $H^*(G; \mathbb{Z})$ равно кольцу $\mathbb{Z}[T]$,

где T – образующая группы второго порядка $H^2(G; \mathbb{Z})$. Гомоморфизм умножения на элемент T

$$T: H^q(X; G, A) \rightarrow H^{q+2}(X; G, A) \quad (1.2)$$

имеет простое описание. Рассмотрим эндоморфизм бикомплекса (1.1), который сдвигает его на две строки вверх. Этот эндоморфизм индуцирует гомоморфизм умножения на элемент T , поэтому гомоморфизм (1.2) и его степени будем называть *гомоморфизмами сдвига*. Образ элемента T при гомоморфизме

$$H^2(\text{pt}, G, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, G, \mathbb{Z})$$

будем обозначать также через T . Если группа коэффициентов A является коммутативным G -кольцом, то полная группа эквивариантных когомологий становится алгеброй над кольцом $H^*(G; \mathbb{Z})$. Если группа коэффициентов A является 2-периодической, то полная группа эквивариантных когомологий является также модулем над кольцом

$$H^*(\text{pt}, G; \mathbb{Z}/2) = H^*(G; \mathbb{Z}/2).$$

Кольцо $H^*(G; \mathbb{Z}/2)$ равно кольцу многочленов $\mathbb{Z}/2[t]$, где t – образующая группы второго порядка $H^1(G; \mathbb{Z}/2)$. Тогда определен гомоморфизм сдвига

$$t: H^q(X; G, A) \rightarrow H^{q+1}(X; G, A),$$

причем $t^2 = T$.

Определен канонический гомоморфизм эквивариантных когомологий в обычные

$$\alpha: H^q(X; G, A) \rightarrow H^q(X, A),$$

он индуцирован проекцией бикомплекса (1.1) в его нижнюю строку и совпадает с крайним гомоморфизмом второй спектральной последовательности бикомплекса (1.1)

$$II_2^{p,q} = H_{II}^p(H_I^q(C^{*,*})) = H^p(G, H^q(X, A)) \implies H^{p+q}(X; G, A),$$

где $C^{p,q} = C^p(X; A)$.

Если инволюция $g \in G$ действует на X и A тривиально, причем A – свободная абелева группа, то

$$\begin{aligned} H^q(X; G, A) &= H^q(X, A) \oplus H^{q-2}(X, A/2) \oplus H^{q-4}(X, A/2) \oplus \dots, \\ H^q(X; G, A/2) &= \bigoplus_{k \leq q} H^k(X, A/2), \end{aligned}$$

а гомоморфизм редукции

$$R: H^q(X; G, A) \rightarrow H^q(X; G, A/2)$$

устроен следующим образом: на слагаемом $H^q(X, A)$ это обычный гомоморфизм редукции

$$R: H^q(X, A) \rightarrow H^q(X, A/2),$$

а на сумме

$$H^{q-2}(X, A/2) \oplus H^{q-4}(X, A/2) \oplus \dots$$

он равен $1 + \delta^*$, где δ^* – гомоморфизм Бокштейна.

Пусть множество неподвижных точек инволюции X^g является подкомплексом, тогда определен гомоморфизм ограничения

$$\beta: H^q(X; G, A) \rightarrow H^q(X^g; G, A).$$

Выполняется равенство

$$\beta(t) = 1 \in H^0(X^g, A),$$

если $A = \mathbb{Z}/2$, а если $A = \mathbb{Z}$ с тривиальным действием инволюции g на ней, то выполняется равенство

$$\beta(T) = 1 \in H^0(X^g, A/2).$$

Пусть теперь $C_q = C_q(X, A)$ – группа симплициальных q -мерных цепей с коэффициентами в абелевой G -группе A . Тогда рассмотрим бикомплекс

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \uparrow 1-g & & \uparrow 1-g & & \uparrow 1-g & & \uparrow 1-g \\ 0 & \longrightarrow & C_m & \xrightarrow{\partial} & C_{m-1} & \xrightarrow{\partial} & C_{m-2} & \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_0 \longrightarrow 0 \\ & \uparrow 1+g & & \uparrow 1+g & & \uparrow 1+g & & \uparrow 1+g \\ 0 & \longrightarrow & C_m & \xrightarrow{\partial} & C_{m-1} & \xrightarrow{\partial} & C_{m-2} & \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_0 \longrightarrow 0 \\ & \uparrow 1-g & & \uparrow 1-g & & \uparrow 1-g & & \uparrow 1-g \\ 0 & \longrightarrow & C_m & \xrightarrow{\partial} & C_{m-1} & \xrightarrow{\partial} & C_{m-2} & \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_0 \longrightarrow 0 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \end{array} \quad (1.3)$$

Эквивариантные гомологии $H_q(X; G, A)$ равны полным гомологиям этого бикомплекса, т.е.

$$H_q(X; G, A) = \frac{\text{Ker}[C_q \oplus C_{q+1} \oplus \dots \oplus C_m \xrightarrow{d} C_{q-1} \oplus C_q \oplus \dots \oplus C_m]}{\text{Im}[C_{q+1} \oplus C_{q+2} \oplus \dots \oplus C_m \xrightarrow{d} C_q \oplus C_{q+1} \oplus \dots \oplus C_m]}.$$

Пусть A – поле $\mathbb{Z}/2$ и $\mu \in C_m$ – эквивариантный цикл, т.е. $\partial\mu = 0$ и $g(\mu) = \mu$. Тогда определены гомоморфизмы

$$\cap\mu: H^q(X, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{m-q}(X, \mathbb{Z}/2), \quad (1.4)$$

$$\cap\mu: H^q(X; G, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{m-q}(X; G, \mathbb{Z}/2); \quad (1.5)$$

заметим, что второй гомоморфизм получается из отображения

$$\cap\mu: C^q \oplus C^{q-1} \oplus \dots \oplus C^0 \rightarrow C_{m-q} \oplus C_{m-q+1} \oplus \dots \oplus C_m,$$

совместимого с полными дифференциалами бикомплексов (1.1), (1.3).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Если гомоморфизм (1.4) является изоморфизмом при каждом q , то гомоморфизм (1.5) также будет изоморфизмом при каждом q .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $\cap \mu$ индуцирует изоморфизм вторых спектральных последовательностей бикомплексов коцепей и цепей

$$\cap \mu: H^p(G, H^q(X, \mathbb{Z}/2)) \rightarrow H^p(G, H_{m-q}(X, \mathbb{Z}/2)),$$

поэтому он индуцирует изоморфизм эквивариантных когомологий с эквивариантными гомологиями (1.5). Предложение доказано.

Если X является m -мерным компактным дифференцируемым многообразием без края, то в качестве цикла μ можно взять фундаментальный цикл $[X]$. Если многообразие будет ориентированным и инволюция g сохраняет ориентацию, то существует эквивариантный изоморфизм Пуанкаре с целыми коэффициентами

$$\cap [X]: H^q(X; G, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{m-q}(X; G, \mathbb{Z}),$$

где действие инволюции g на $\mathbb{Z}$ считается тривиальным.

Итак, пусть X является m -мерным компактным дифференцируемым многообразием без края и $Z \subset X$ — n -мерное подмногообразие, инвариантное относительно инволюции g , тогда с помощью эквивариантных изоморфизмов Пуанкаре определяется гомоморфизм Гизина

$$J: H^q(Z; G, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^{q+m-n}(X; G, \mathbb{Z}/2).$$

В случае, когда многообразия X, Z ориентированные, а инволюция g сохраняет их ориентацию, определен эквивариантный гомоморфизм Гизина для эквивариантных когомологий с целыми коэффициентами

$$J: H^q(Z; G, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{q+m-n}(X; G, \mathbb{Z}).$$

Если

$$j^*: H^q(Z, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{q+m-n}(X, \mathbb{Z})$$

— обычный гомоморфизм Гизина, то выполняется равенство

$$\alpha \circ J = j^* \circ \alpha.$$

Мы будем применять гомоморфизм Гизина для $Z = X^g$, где X^g — множество неподвижных точек инволюции g . Тогда справедливо (см. [9], [11]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Пусть множество неподвижных точек X^g является n -мерным подмногообразием многообразия X . Тогда гомоморфизм*

$$\beta \circ J: H^q(X^g; G, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^{q+m-n}(X^g; G, \mathbb{Z}/2)$$

совпадает с умножением на полный класс Штифеля–Уитни $w(\nu)$ нормального расслоения κX^g .

2. Доказательство сравнения. В этом пункте X – 8-мерное связное компактное ориентированное дифференцируемое многообразие, на котором действует дифференцируемая инволюция $g: X \rightarrow X$, сохраняющая ориентацию. Мы предполагаем, что множество неподвижных точек X^g этой инволюции является 4-мерным ориентируемым дифференцируемым подмногообразием, может быть, несвязным. Пусть ν – нормальное расслоение к X^g в X . Тогда из ориентируемости многообразий X, X^g следует, что расслоение ν ориентируемое, поэтому характеристический класс Штифеля–Уитни $w_1(\nu)$ равен нулю. Будем предполагать, что также $w_2(\nu) = 0$, тогда $w_3(\nu) = \delta^*(w_2(\nu)) = 0$. Пусть $X_1, \dots, X_s$ – компоненты связности подмногообразия X^g . Будем предполагать, что все индексы самопересечения $X_i \cdot X_i, i = 1, \dots, s$, четные, тогда получим равенство $w_4(\nu) = 0$. Таким образом, все классы Штифеля–Уитни $w_k(\nu)$ равны нулю при $k > 0$. Выберем на компонентах $X_1, \dots, X_s$ ориентацию, тогда определены эквивариантные классы когомологий

$$\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s \in H^4(X, G; \mathbb{Z}).$$

По определению $\mathbf{x}_i = J(1_i)$, где 1_i – единица в

$$H^0(X_i, G; \mathbb{Z}) = H^0(X_i, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

ЛЕММА 2.1. *Если пара (X, g) является M -многообразием, то из сделанных выше предположений вытекает, что элемент*

$$\widehat{\mathbf{x}} = T^2 + \mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_s \in H^4(X, G; \mathbb{Z})$$

четный, т.е. существует элемент $d \in H^4(X, G; \mathbb{Z})$ такой, что $\widehat{\mathbf{x}} = 2d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно показать, что при гомоморфизме редукции

$$R: H^4(X, G; \mathbb{Z}) \rightarrow H^4(X, G; \mathbb{Z}/2)$$

элемент $\widehat{\mathbf{x}}$ переходит в нуль. Из соотношения $\beta(t^4) = 1$ и предложения 1.2 следует равенство $\beta(R(\widehat{\mathbf{x}})) = 1 + w(\nu)$, где 1 – единица в $H^0(X^g, \mathbb{Z}/2)$, а

$$w(\nu) = 1 + w_1(\nu) + w_2(\nu) + w_3(\nu) + w_4(\nu)$$

– полный класс Штифеля–Уитни. Так как $w(\nu) = 1$, то выполняется равенство $\beta(R(\widehat{\mathbf{x}})) = 0$. Пара (X, g) является M -многообразием, поэтому гомоморфизмы ограничения

$$\beta: H^q(X, G; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^q(X^g, G; \mathbb{Z}/2)$$

мономорфны (см. [2]), следовательно, $R(\widehat{\mathbf{x}}) = 0$. Лемма доказана.

Следующая теорема является основной.

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть выполняются условия теоремы 0.2. Тогда существует набор целых нечетных чисел $m = (m_1, \dots, m_s)$ такой, что для элемента*

$$\widehat{\mathbf{x}}_m = T^2 + m_1 \mathbf{x}_1 + \dots + m_s \mathbf{x}_s \in H^4(X, G; \mathbb{Z})$$

найдется элемент $d \in H^4(X, G; \mathbb{Z})$, удовлетворяющий условию $\widehat{\mathbf{x}}_m = 2^\mu d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предыдущей леммы 2.1 следует, что если $\mu = 1$, то утверждение теоремы справедливо. Пусть теперь $\mu > 1$, и предположим противное, т.е. что для любых нечетных чисел $m_1, \dots, m_s$ элемент $\widehat{\mathbf{x}}_m$ не делится на 2^μ в $H^4(X, G; \mathbb{Z})$. Тогда должно существовать число $\nu < \mu$ такое, что при некоторых нечетных числах $n_1, \dots, n_s$ элемент

$$\widehat{\mathbf{x}}_n = T^2 + n_1 \mathbf{x}_1 + \dots + n_s \mathbf{x}_s$$

делится на 2^ν , но не существует нечетных чисел $l_1, \dots, l_s$, для которых элемент

$$\widehat{\mathbf{x}}_l = T^2 + l_1 \mathbf{x}_1 + \dots + l_s \mathbf{x}_s$$

делится на $2^{\nu+1}$. Итак, пусть $\widehat{\mathbf{x}}_n = 2^\nu d$, где $d \in H^4(X, G; \mathbb{Z})$. Тогда рассмотрим элемент $\beta(d) \in H^4(X^g, G; \mathbb{Z})$. Он имеет разложение

$$\beta(d) = a_0 + a_2 + a_4,$$

где

$$a_0 \in H^0(X^g, \mathbb{Z}/2), \quad a_2 \in H^2(X^g, \mathbb{Z}/2), \quad a_4 \in H^4(X^g, \mathbb{Z}).$$

Элемент a_0 имеет разложение

$$a_0 = 1_{i_1} + \dots + 1_{i_k},$$

где

$$1_{i_1} \in H^0(X_{i_1}, \mathbb{Z}/2), \quad \dots, \quad 1_{i_k} \in H^0(X_{i_k}, \mathbb{Z}/2)$$

— единичные элементы. Заменим числа $n_{i_1}, \dots, n_{i_k}$ на числа

$$n_{i_1} + 2^\nu, \quad \dots, \quad n_{i_k} + 2^\nu,$$

а элемент d — на сумму $d + \mathbf{x}_{i_1} + \dots + \mathbf{x}_{i_k}$. Тогда для новых элементов $\widehat{\mathbf{x}}_n$, d будет снова выполняться равенство $\widehat{\mathbf{x}}_n = 2^\nu d$, но элемент a_0 заменится на $0 \in H^0(X^g, \mathbb{Z}/2)$. Таким образом, можно считать, что $a_0 = 0$. Элемент a_4 равен элементу

$$\frac{1}{2^\nu} \beta(\alpha(\widehat{\mathbf{x}}_n)) = \frac{1}{2^\nu} (n_1 (X_1 \cdot X_1) [X_1]^* + \dots + n_s (X_s \cdot X_s) [X_s]^*),$$

где

$$[X_1]^* \in H^4(X_1, \mathbb{Z}), \quad \dots, \quad [X_s]^* \in H^4(X_s, \mathbb{Z})$$

— фундаментальные классы когомологий. Так как $\nu < \mu$, то элемент a_4 четный. Следовательно, имеем равенство

$$R(\beta(d)) = a_2 + \delta^*(a_2),$$

где

$$\delta^*: H^2(X^g, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^3(X^g, \mathbb{Z}/2)$$

— гомоморфизм Бокштейна. По условию теоремы группа $H^3(X^g, \mathbb{Z})$ не содержит ненулевых элементов второго порядка, поэтому $\delta^*(a_2) = 0$. Таким образом, имеем равенства

$$\beta(R(d)) = R(\beta(d)) = a_2.$$

Покажем теперь, что $a_2 = 0$. Рассмотрим a_2 как элемент группы

$$H^2(X^g, G; \mathbb{Z}/2) = \bigoplus_{k=0}^2 H^k(X^g, \mathbb{Z}/2).$$

Тогда $J(a_2) \in H^6(X, G; \mathbb{Z}/2)$ и из предложения 1.2 вытекает равенство $\beta(J(a_2)) = a_2$. Следовательно,

$$\beta(t^2 \cdot R(d) = \beta(J(a_2))).$$

Так пара (X, g) является M -многообразием, то гомоморфизм ограничения

$$\beta: H^6(X, G; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^6(X^g, G; \mathbb{Z}/2)$$

мономорфен. Поэтому $J(a_2) = t^2 \cdot R(d)$. С другой стороны имеем равенства

$$\alpha(J(a_2)) = j^*(a_2), \quad \alpha(t^2 \cdot R(d)) = 0.$$

Следовательно, $j^*(a_2) = 0$. Но из условий теоремы следует, что гомоморфизм Гизина

$$j^*: H^2(X^g, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^6(X, \mathbb{Z}/2)$$

мономорфен, поэтому $a_2 = 0$. Таким образом, имеем равенство $\beta(R(d)) = 0$. Из мономорфности гомоморфизма ограничения

$$\beta: H^4(X, G; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^4(X^g, G; \mathbb{Z}/2)$$

получаем равенство $R(d) = 0$. Это означает, что элемент $d \in H^4(X, G; \mathbb{Z})$ четный. Получили противоречие. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.2. Компоненты связности $X_1, \dots, X_s$ с выбранной ориентацией определяют классы когомологий из группы $H^4(X, \mathbb{Z})$. Будем их обозначать через $x_1, \dots, x_s$. Заметим, что справедливы равенства $\alpha(\mathbf{x}_1) = x_1, \dots, \alpha(\mathbf{x}_s) = x_s$. Симметрическую билинейную форму на $H^4(X, \mathbb{Z})$ со значениями в $H^8(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, определенную $\cup$ -произведением, будем обозначать через $x \cdot y$, где $x, y \in H^4(X, \mathbb{Z})$. Пусть

$$\hat{\mathbf{x}}_m = m_1 \mathbf{x}_1 + \dots + m_s \mathbf{x}_s \in H^4(X, G; \mathbb{Z}), \quad d \in H^4(X, G; \mathbb{Z})$$

— элементы из предыдущей теоремы. Положим

$$\hat{x}_m = \alpha(\hat{\mathbf{x}}_m) = m_1 x_1 + \dots + m_s x_s, \quad \hat{d} = \alpha(d).$$

Тогда выполняется соотношение $\hat{x}_m = 2^\mu \hat{d}$. Следовательно,

$$\hat{x}_m \cdot \hat{x}_m = 2^{2\mu} \hat{d} \cdot \hat{d}.$$

Так как (см. [12]) $v_4(X) = x_1 + \dots + x_s \pmod{2}$, то $v_4(X) = 0$. Поэтому $\hat{d} \cdot \hat{d} \equiv 0 \pmod{2}$, следовательно, $\hat{x}_m \cdot \hat{x}_m \equiv 0 \pmod{2^{2\mu+1}}$. С другой стороны, выполняются сравнения

$$m_i^2 \equiv 1 \pmod{8}, \quad x_i \cdot x_i \equiv 0 \pmod{2^\mu}, \quad i = 1, \dots, s,$$

поэтому

$$X^g \cdot X^g \equiv \hat{x}_m \cdot \hat{x}_m \pmod{2^{\mu+3}}.$$

Так как $\mu \geq 2$, то $\mu + 3 \leq 2\mu + 1$ и выполняется требуемое в теореме 0.2 сравнение $X^g \cdot X^g \equiv 0 \pmod{2^{\mu+3}}$. Теорема 0.2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Рохлин В. А. Сравнения по $\text{mod } 16$ в шестнадцатой проблеме Гильберта // Функцион. анализ и его прилож. 1972. V. 6. № 4. Р. 71–75; 1973. V. 7. № 2. Р. 91–92.
- [2] Краснов В. А. Характеристические классы векторных расслоений на вещественном алгебраическом многообразии // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 4. С. 716–746.
- [3] Никулин В. В. Инволюции целочисленных квадратичных форм и их приложения к вещественной алгебраической геометрии // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 1. С. 109–188.
- [4] Краснов В. А. О классах когомологий, определенных вещественными точками вещественной алгебраической GM -поверхности // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 5. С. 210–221.
- [5] Краснов В. А. Вещественные алгебраические $GM\mathbb{Z}$ -поверхности // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 4. С. 51–80.
- [6] Гротендик А. О некоторых вопросах гомологической алгебры. М.: ИЛ, 1961.
- [7] Degtyarev A., Kharlamov V. Halves of real Enriques surface // Comm. Math. Helv. 1996. V. 71. Р. 628–663.
- [8] Краснов В. А. Неравенства Гарнака–Тома для отображений вещественных алгебраических многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 2. С. 268–297.
- [9] Краснов В. А. Об эквивариантных когомологиях Гротендика вещественного алгебраического многообразия и их приложениях // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 3. С. 36–52.
- [10] Nikulin V. V. On the Brauer group of real algebraic surfaces // Algebraic Geometry and its Applications (Yaroslavl', 1992). Aspects Math. V. E25. Braunschweig: Vieweg, 1994. Р. 113–136.
- [11] Краснов В. А. Вещественные алгебраические GM -многообразия // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 3. С. 39–66.
- [12] Арнольд В. И. О расположении овалов вещественных алгебраических кривых, инволюциях четырехмерных гладких многообразий и арифметике целочисленных квадратичных форм // Функцион. анализ и его прилож. 1971. Т. 6. № 4. С. 1–9.

Ярославский государственный университет
E-mail: krasnov@uniyar.ac.ru

Поступило
25.02.2003