Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Г. Смолянов, А. Трумен, Формулы Фейнмана для решений уравнений Шредингера на компактных римановых многообразиях, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 5, 789–793

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1000>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 15:20:53

ФОРМУЛЫ ФЕЙНМАНА ДЛЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ШРЁДИНГЕРА НА КОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

О.Г. Смолянов, А. Трумен

В заметке получены представления решений уравнений Шрёдингера на компактных римановых многообразиях с помощью формул типа Фейнмана и Фейнмана–Каца [1]–[3]; подобные представления существуют также для аналогичных стохастических уравнений. При этом в подынтегральных выражениях появляются дополнительные множители, зависящие от геометрии риманова многообразия (а если оно вложено в евклидово пространство, то и от характера вложения) [4]; они могут быть интерпретированы как соответствующие дополнительным потенциальным членам в уравнениях, что согласуется с физической парадигмой, согласно которой влияние геометрии риманова пространства может быть описано с помощью некоторого потенциала.

1. Меры на множестве траекторий в компактном римановом многообразии. Если T и G – топологические пространства, то через $C(T, G)$ обозначается множество всех непрерывных отображений из T в G , наделенное компактно-открытой топологией; символ $C_b(T)$ обозначает пространство всех вещественных ограниченных функций на T , наделенное равномерной нормой. Всюду далее G – это компактное риманово многообразие размерности $d > 0$, изометрически вложенное в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, ρ – риманово расстояние в G ; для всякого $t > 0$ $E^t = C([0, t], \mathbb{R}^n)$, $E_G^t = C([0, t], G)$, так что $E_G^t \subset E^t$ (это вложение индуцируется вложением $G \subset \mathbb{R}^n$). Пусть функции p и p_R на $\mathbb{R}^n \times G \times G$ определяются равенствами

$$p(t, x_1, x_2) = (2\pi t)^{-n/2} e^{-\|x_2 - x_1\|^2 / (2t)}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01212.

и

$$p_R(t, x_1, x_2) = (2\pi t)^{-n/2} e^{-\rho^2(x_1, x_2)/(2t)},$$

пусть еще p_G – это ядро интегрального оператора, решающего задачу Коши для уравнения теплопроводности на G . Для каждого $z \in \mathbb{R}^n$ символом W^z обозначается стандартная мера Винера на E^t , сосредоточенная на функциях $\varphi \in E^t$ таких, что $\varphi(0) = z$, и символом W_G^z – аналогичная мера Винера на E_G^t . Для всякого разбиения $\pi = \{t_j : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = t\}$ отрезка $[0, t]$ пусть $d(\pi)$ – это диаметр разбиения ($d(\pi) = \max |t_j - t_{j-1}|$); для всякого $z \in G$ и $f \in C_b(E_G^t)$ пусть f_π^z – функция на произведении N копий G , определенная равенством $f_\pi^z(z_1, \dots, z_N) = f(\varphi_\pi^{z, z_1, \dots, z_N})$, где $\varphi_\pi^{z, z_1, \dots, z_N} \in E_G^t$, $\varphi_\pi^{z, z_1, \dots, z_N}(t_0) = z$, $\varphi_\pi^{z, z_1, \dots, z_N}(t_j) = z_j$ ($j > 0$) и для $s \in (t_j, t_{j+1})$ $\varphi_\pi^{z, z_1, \dots, z_N}(s) = \gamma(s)$, где $\gamma \in C([t_j, t_{j+1}], G)$, $\|\gamma'(\cdot)\| = \text{const}$ (норма в $\mathbb{R}^n$) и $\gamma([t_j, t_{j+1}])$ – (некоторая) минимальная геодезическая, соединяющая z_j и z_{j+1} (таким образом, f_π^z определяется неоднозначно). Как показано в [4], существует такая вероятностная мера ν_G^z на E_G^t (называемая *поверхностной мерой*, порожденной мерой W^z), что для всякой $f \in C_b(E_G^t)$

$$\begin{aligned} \int_{E_G^t} f(x) \nu_G^z(dx) &= \lim_{d(\pi) \rightarrow 0} c_N \int_{G \times \dots \times G} f_\pi^z(z_1, \dots, z_N) p(t_1, z, z_1) \\ &\quad \times p(t_2 - t_1, z_1, z_2) \dots p(t_N - t_{N-1}, z_{N-1}, z_N) dz_1 \dots dz_N, \\ c_N^{-1} &= \int_{G \times \dots \times G} p(t_1, z, z_1) p(t_2 - t_1, z_1, z_2) \dots p(t_N - t_{N-1}, z_{N-1}, z_N) dz_1 \dots dz_N \end{aligned}$$

(предел не зависит от выбора f_π^z), где символом $\int_{G \times \dots \times G} dz_1 \dots dz_N$ обозначают интегралы по мерам, являющимся произведениями мер на G , порождаемых формой объема на G ; эта же форма объема используется при определении пространства $\mathcal{L}_2(G)$. Кроме того, согласно [4] существует вероятностная мера η_G^z на E_G^t , определяемая аналогично мере ν_G^z с заменой p на p_R . В [4] также показано, что

$$\frac{dW_G^z}{d\eta_G^z}(h) = e^{\frac{1}{8} \int_0^t \text{scal}(h(\tau)) d\tau},$$

где для всякого $x \in G$ $\text{scal}(x)$ – скалярная кривизна в точке x (в принятой здесь нормировке скалярной кривизны ее значение для единичной сферы n -мерного евклидова пространства равно $n(n-1)$), и что

$$\frac{dW_G^z}{d\nu_G^z} = e^{\frac{1}{4} \int_0^t \text{scal}(h(\tau)) - \frac{1}{2} (c^2(h(\tau))) d\tau},$$

где $c(x)$ – средняя кривизна многообразия G в точке x , умноженная на его размерность.

2. Формулы Фейнмана–Каца для уравнений Шрёдингера на компактных римановых многообразиях. Всюду далее Δ – это оператор Бельтрами–Лапласа в пространстве функций на G и V – некоторая функция на G .

Ниже рассматриваются уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta \varphi + V \varphi \quad (1)$$

и уравнение Шрёдингера

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = i \frac{1}{2} \Delta \psi + i V \psi \quad (2)$$

на G . При этом предполагается, что φ и ψ – функции на $[0, \infty)$, принимающие значения в некотором пространстве функций на G .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $V \in \mathcal{L}_2(G)$ и $\eta \in \mathcal{L}_2(G)$, то существует решение φ задачи Коши для уравнения (1) такое, что

$$\begin{aligned}\varphi(t)(x) &= \int_{E_G^t} \eta(\xi(t)) \exp\left(\int_0^t V(\xi(\tau)) d\tau + \frac{1}{6} \int_0^t \text{scal}(h(\tau)) d\tau\right) \eta_G^x(d\xi) \\ &= \int_{E_G^t} \eta(\xi(t)) \exp\left(\int_0^t V(\xi(\tau)) d\tau + \frac{1}{4} \int_0^t \left(\text{scal}\left(h(\tau) - \frac{1}{2}c^2(h(\tau))\right)\right) d\tau\right) \nu_G^x(d\xi).\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как первое, так и второе равенства могут быть доказаны с помощью теоремы Чернова и разложения в ряд Тейлора риманова тензора кривизны; при доказательстве первого равенства может быть также использована вместо разложения Тейлора формула для объемов “малых шаров” в римановом пространстве (ср. [4])

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из предложения 1 и каждого из приведенных выражений для производных $dW_G^z/d\eta_G^z$ и $dW_G^z/d\nu_G^z$ вытекает также (известное) представление решения φ с помощью интеграла по мере W_G^z .

ТЕОРЕМА 1. Пусть V и η – это сужения на G некоторых функций, определенных и аналитических на области в $\mathbb{C}^n$, содержащей $\mathbb{R}^n$ и $\sqrt{i}\mathbb{R}^n$ (они обозначаются теми же символами). Тогда существует решение задачи Коши для уравнения (2) с начальными данными $(0, \eta)$ такое, что (ср. [5]–[7])

$$\begin{aligned}\int_{E_G^t} \eta(\sqrt{i}\xi(t)) \exp\left(\int_0^t iV(\sqrt{i}\xi(\tau)) d\tau\right) W_G^x(d\xi) \\ = \int_{E_G^t} \eta(\sqrt{i}\xi(t)) \exp\left(\int_0^t iV(\sqrt{i}\xi(\tau)) d\tau + \frac{1}{6} \int_0^t \text{scal}(\xi(\tau)) d\tau\right) \eta_G^x(d\xi).\end{aligned}$$

Справедлива и аналог второго равенства из предложения 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $V_1(x) = V(\sqrt{i}x)$ и $\eta_1(x) = \eta(\sqrt{i}x)$, то в силу предложения 1 выражение справа определяет решение φ задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta \varphi + V_1 \varphi$$

с начальными условиями $(0, \eta_1)$; но это значит, что функция $t \mapsto [x \mapsto \varphi(x/\sqrt{i})]$ является решением задачи Коши для уравнения (2) с начальными условиями $\varphi(0) = \eta$. Следовательно, в силу формулы для производной Радона–Никодима $dW_G^z/d\eta_G^z$ и среднее выражение определяет решение той же задачи Коши. Другое доказательство можно получить, проверив с помощью формулы Ито, что среднее выражение в цепочке равенств определяет решение задачи Коши для уравнения (2) с начальными данными $(0, \eta)$, и затем вновь воспользовавшись выражением для производной Радона–Никодима (справедлива и аналогичная формула, содержащая интегрирование по мере ν_G^z).

3. Формула Фейнмана для уравнений Шрёдингера на компактных римановых многообразиях. Пусть p_φ и p_φ^R – функции на $(0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, определяемые так:

$$p_\varphi(t, x_1, x_2) = (2\pi t)^{-d/2} e^{i\|x_2 - x_1\|^2/(2t)}; \quad p_\varphi^R(t, x_1, x_2) = (2\pi t)^{-d/2} e^{ip^2(x_1, x_2)/(2t)}.$$

Функция $f: E_G^t \rightarrow \mathbb{C}$ называется *интегрируемой по поверхностной мере Фейнмана* Φ_G^z или Φ_G^z -*интегрируемой*, если существует (называемый поверхностным интегралом Фейнмана и) обозначаемый символом $\int_{E_G^t} f(x) \Phi_G^z(dx)$ предел

$$\begin{aligned}\lim_{d(\pi) \rightarrow 0} \alpha_N \int_{G \times \dots \times G} f_N^z(z_1, \dots, z_N) p_\varphi(t_1, z, z_1) \\ \times p_\varphi(t_2 - t_1, z_1, z_2) \cdots p_\varphi(t_N - t_{N-1}, z_{N-1}, z_N) dz_1 \dots dz_N, \\ (\alpha_N)^{-1} = \int_{G \times \dots \times G} p_\varphi(t_1, z, z_1) \\ \times p_\varphi(t_2 - t_1, z_1, z_2) \cdots p_\varphi(t_N - t_{N-1}, z_{N-1}, z_N) dz_1 \dots dz_N.\end{aligned}$$

Аналогично с заменой p_φ на p_φ^R определяется поверхностный “риманов” $\Phi_{G,R}^z$ -интеграл Фейнмана. Далее предполагается, что тензор римановой кривизны обладает аналитическим продолжением на $G + \sqrt{i}G(\subset \mathbb{C})$.

ТЕОРЕМА 2. *В предположениях теоремы 1 существует решение φ задачи Коши для (2) с начальными условиями $(0, \eta)$ такое, что*

$$\varphi(t)(x) = \int_{E_G^t} \eta(\xi(t)) \exp \left(\int_0^t \left(iV(\xi(\tau)) d\tau + \frac{1}{6} \text{scal} \left(\frac{\xi(\tau)}{\sqrt{i}} \right) \right) d\tau \right) \Phi_{G,R}^x(d\xi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интеграл Фейнмана в правой части последнего равенства по определению совпадает с пределом некоторой последовательности конечнократных интегралов; применяя к ним формулу замены переменной, можно получить последовательность интегралов, сходящуюся к интегралу в правой части цепочки равенств из теоремы 1. Это означает, что исходная последовательность конечнократных интегралов также сходится, причем ее предел определяет решение задачи Коши для уравнения (2) с начальными данными $(0, \eta)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Справедлива и формула, аналогичная формуле (5), но содержащая Φ_G^x -интеграл Фейнмана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При других предположениях о функциях V и η представление решения задачи Коши для (2) с начальными условиями $(0, \eta)$ с помощью $\Phi_{G,R}^x$ - или Φ_G^x -интеграла Фейнмана можно также получить независимо от теоремы 1 с помощью формулы Чернова.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Определяемое естественным образом произведение $(dW_G^z/d\eta_G^z)(\sqrt{i} \cdot) \Phi_{G,R}^z$ можно назвать фейнмановской мерой на траекториях в G . В частности, функцию

$$\xi \mapsto e^{\frac{i}{2} \int_0^t (\xi'(\tau))^2 d\tau} e^{\frac{1}{6} \int_0^t \text{scal}(\sqrt{i}\xi(\tau)) d\tau}$$

можно считать обобщенной плотностью фейнмановской меры на E_G^t (ср. [4]).

4. Интегралы по пространству траекторий в фазовом пространстве. Рассматривается задача Коши для уравнения (Шрёдингера)

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \widehat{\mathcal{H}} \varphi(t),$$

где $\widehat{\mathcal{H}}$ – псевдодифференциальный оператор с символом $\mathcal{H}$, определенный на кокасательном расслоении T^*G многообразия G . Предполагается, что вложение $G \subset \mathbb{R}^n$ обладает продолжением до изометрического вложения (в $\mathbb{R}^n$) расслоения T^*G .

Положим $T^*E_G^t = C([0, t], T^*G)$, и пусть символ $\int_{T^*E_G^t} \dots \Phi_{T^*G}^z(dq dp)$ обозначает интеграл по секвенциальной (гамильтоновой) мере Фейнмана на $T^*E_G^t$, определение которой аналогично использованному в [1]. При подходящих ограничениях аналитического характера на символ $\mathcal{H}$ и функцию $\eta: G \rightarrow \mathbb{C}$ справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Существует решение φ задачи Коши для последнего уравнения с начальным условием $(0, \eta)$ такое, что*

$$\begin{aligned} \varphi(t)(z) = & \int_{E_G^t} \eta(\xi(t)) \exp \left(\int_0^t \mathcal{H}(q(\tau), p(\tau)) d\tau \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \int_0^t \left(\text{scal}(v_1(\tau), v_2(\tau)) - \frac{1}{2} c^2(v_1(\tau), v_2(\tau)) \right) d\tau \right) \Phi_{T^*G}^z(dq dp), \end{aligned}$$

где $v_1(\tau) = \sqrt{i}(\int_0^\tau p(s) ds + q(\tau))$, $v_2(\tau) = \sqrt{i}(\int_0^\tau p(s) ds - q(\tau))$, причем предполагается, что функции $\text{scal}(\cdot)$ и $c(\cdot)$ обладают соответствующими аналитическими продолжениями.

После применения к конечнократным интегралам, аппроксимирующим дающий решение задачи Коши интеграл по поверхностной мере в $T^*E_G^t$ (определяемой аналогично мере ν_G^t), замены переменной, аналогичной использованной в [6] (ср. [1]), получается последовательность интегралов, предел которой совпадает с интегралом Фейнмана; затем можно использовать теорему Чернова (ср. [4]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. Континуальные интегралы. М.: Изд-во МГУ, 1990.
2. Маслов В. П. Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана для нелинейных систем. М.: Наука, 1976.
3. Albeverio S., Hoegh-Krohn R. Mathematical Theory of Feynman Path Integrals // Lecture Notes in Math. V. 523. Berlin: Springer, 1976.
4. Вайцзеккер Х. фон, Смолянов О. Г., Виттих О. // Докл. РАН. 2000. Т. 371. № 4. С. 442–447.
5. Albeverio S., Kolokol'tsov V. N., Smolyanov O. G. // C. R. Acad. Sci. Paris. 1996. V. 323. № 1. P. 661–664.
6. Белавкин В. П., Смолянов О. Г. // Докл. РАН. 1998. Т. 360. № 5. С. 589–593.
7. Doss H. // Communications in Math. Phys. 1980. V. 73. P. 247–264.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: smolyan@mail.ru

Поступило
05.05.2000