Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ш. Шабозов, О. Ш. Шабозов, Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 , *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 5, 796–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1002>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 11:59:39

ПОПЕРЕЧНИКИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ H_2

М. Ш. Шабозов, О. Ш. Шабозов

В последнее время интенсивно изучаются вопросы, связанные с точным вычислением колмогоровских поперечников классов аналитических в единичном круге функций (см. [1]–[3] и библиографические комментарии к ним). С. Б. Вакарчуком [4] в пространстве Харди H_2 вычислены колмогоровские поперечники некоторых классов аналитических функций, структурные свойства которых характеризуются скоростью убывания к нулю модуля непрерывности граничных значений производных функций. Аналогичные результаты для других классов функций получены в [5]. Результаты [4], [5] являются продолжением исследований работ [1]–[3].

Цель настоящей статьи – обобщить результаты [1]–[5] для классов функций, задаваемых модулями непрерывности высших порядков, и найти точные значения различных поперечников на введенных ниже классах функций.

Напомним определение поперечников центрально симметричного множества $\mathfrak{M}$ в линейном нормированном пространстве X :

$$\begin{aligned} d_n(\mathfrak{M}, X) &= \inf \{ \sup \{ \inf \{ \|f - \varphi\|_X : \varphi \in L_n \} : f \in \mathfrak{M} \} : L_n \subset X \}, \\ \lambda_n(\mathfrak{M}, X) &= \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - \Lambda f\|_X : f \in \mathfrak{M} \} : \Lambda \in \mathfrak{L}(X, L_n) \} : L_n \subset X \}, \\ \Pi_n(\mathfrak{M}, X) &= \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - \Lambda f\|_X : f \in \mathfrak{M} \} : \Lambda \in \mathfrak{L}^\perp(X, L_n) \} : L_n \subset X \}, \end{aligned}$$

где $\mathfrak{L}(X, L_n)$ – множество всех линейных ограниченных операторов из X в L_n , $\mathfrak{L}^\perp(X, L_n)$ – подмножество проекторов из $\mathfrak{L}(X, L_n)$, а внешняя нижняя грань вычисляется по всем подпространствам L_n из X размерности n . Эти величины соответственно называются *колмогоровским*, *линейным* и *проекционными поперечниками*.

Между перечисленными поперечниками выполняются неравенства

$$d_n(\mathfrak{M}, X) \leq \lambda_n(\mathfrak{M}, X) \leq \Pi_n(\mathfrak{M}, X).$$

Пусть $f(z)$ – произвольная аналитическая в $|z| < 1$ функция,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad z = \rho e^{it}, \quad 0 \leq \rho < 1,$$

с конечной нормой пространства Харди H_p , $1 \leq p \leq \infty$,

$$\|f\|_{H_p} = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^p dt \right)^{1/p} < \infty.$$

Хорошо известно [6], что для $f(z) \in H_p$ почти везде на окружности $|z| = 1$ существуют угловые граничные значения $F(t) = f(e^{it}) \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$.

Через $F^{(r)}(t)$ ($r = 0, 1, \dots$, $F^{(0)}(t) \equiv F(t)$) обозначим граничные значения аналитической функции $f^{(r)}(z) = d^r f/dz^r$, а через $F_a^{(r)}(t)$ ($r = 0, 1, \dots$, $F_a^{(0)}(t) = F(t)$) – граничные значения аналитической функции $d^r f/dt^r = d^r f(\rho e^{it})/dt^r$. При этом

$$\begin{aligned} \frac{d^r f}{dz^r} &= \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-r+1) c_k z^{k-r}, \\ \frac{d^r f(\rho e^{it})}{dt^r} &= \sum_{k=1}^{\infty} (ik)^r c_k \rho^k e^{ikt}, \quad \rho \neq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Во всем дальнейшем изложении положим

$$\alpha_{kr} = k(k-1) \cdots (k-r+1), \quad k = r, r+1, \dots, \quad \beta_{kr} = k^r, \quad k, r = 1, 2, \dots$$

Пусть

$$\mathcal{P}_n = \left\{ p_n(z) : p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, |a_n| \neq 0 \right\}.$$

Величина

$$E_n(f)_p := E(f, \mathcal{P}_{n-1})_{H_p} = \inf \{ \|f - p_{n-1}\|_{H_p} : p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1} \}$$

есть наилучшее приближение функции $f(z) \in H_p$ полиномами $p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1}$.

Если $f(z) \in H_p$ имеет непрерывные граничные значения $F(t)$, то их гладкость характеризуем модулем непрерывности m -го порядка в L_p -норме

$$\omega_m(F; t)_p = \sup \{ \|\Delta_m(F; \cdot, u)\|_p : u \in [0, t] \}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

$$\Delta_m(F; x, u) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k F(x + ku).$$

В частности, из (1) следует, что если $F^{(r)}(t)$ угловое граничное значение производной $f^{(r)}(z) \in H_2$, то согласно равенству Парсеваля

$$\omega_m^2(F^{(r)}; t)_2 = 2^m \cdot \sup \left\{ \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{kr}^2 |c_k|^2 (1 - \cos(k-r)u)^m : u \in [0, t] \right\}. \quad (2)$$

Для аналитических в единичном круге функций $f(z) \in H_2$ в силу уравнения замкнутости справедливо равенство [7, с. 288–290]

$$E_n^2(f)_{H_2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(t)|^2 dt - \sum_{k=0}^{n-1} |c_k|^2 = \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2. \quad (3)$$

Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть для аналитической внутри единичного круга функции $f(z)$ ее производные $f^{(r)}(z)$ и $d^r f / dt^r$ принадлежат пространству H_2 и имеют непрерывные граничные значения $F^{(r)}(t)$ и $F_a^{(r)}(t)$. Тогда для любых натуральных m, n, r соответственно при $0 < h \leq \pi/(n-r)$, $r < n$ и $0 \leq h \leq \pi/n$ для $1 \leq p \leq 2$ имеют место неравенства

$$E_n^2(f)_{H_p} \leq \left\{ 2^m \alpha_{nr}^2 \int_0^h (1 - \cos(n-r)t)^m dt \right\}^{-1} \cdot \int_0^h \omega_m^2(F^{(r)}, t)_2 dt, \quad r < n, \quad (4)$$

$$E_n^2(f)_{H_p} \leq \left\{ 2^m \beta_{nr}^2 \int_0^h (1 - \cos nt)^m dt \right\}^{-1} \cdot \int_0^h \omega_m^2(F_a^{(r)}, t)_2 dt, \quad (5)$$

которые являются точными в том смысле, что существует функция $f_0(z) \in H_p$, $1 \leq p \leq 2$, обращающая (4) и (5) в равенства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенства (4) и (5) доказываются одинаково, и потому достаточно доказать (4). Из определения модуля непрерывности (2) следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^h \omega_m^2(F^{(r)}, t)_2 dt &\geq \int_0^h \|\Delta_m(F^{(r)}, \cdot, t)\|_2^2 dt = 2^m \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{kr}^2 |c_k|^2 \int_0^h (1 - \cos(k-r)t)^m dt \\ &\geq 2^m \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{kr}^2 |c_k|^2 \int_0^h (1 - \cos(k-r)t)^m dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Функция

$$\psi(k) = \alpha_{kr}^2 \int_0^h (1 - \cos(k-r)t)^m dt$$

для значений $k \geq n > r$ является возрастающей, поскольку

$$\psi'(k) = \frac{\alpha_{kr}^2}{k-r} h(1 - \cos(k-r)h)^m + \alpha_{kr}^2 \left\{ \sum_{s=0}^{r-1} \frac{2}{k-s} - \frac{1}{k-r} \right\} \int_0^h (1 - \cos(k-r)t)^m dt \geq 0.$$

Поэтому $\min\{\psi(k) : n \leq k < \infty\} = \psi(n)$ и из (6) получим

$$\int_0^h \omega_m^2(F^{(r)}, t)_2 dt \geq 2^m \alpha_{nr}^2 \int_0^h (1 - \cos(n-r)t)^m dt \cdot \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2.$$

Отсюда, учитывая равенство (3), запишем

$$E_n^2(f)_{H_2} \leq \left\{ 2^m \alpha_{nr}^2 \int_0^h (1 - \cos(n-r)t)^m dt \right\}^{-1} \cdot \int_0^h \omega_m^2(F^{(r)}, t)_2 dt. \quad (7)$$

Теперь для завершения доказательства остается учесть, что в силу неравенства Гёльдера

$$E_n^2(f)_{H_p} \leq E_n^2(f)_{H_2}, \quad 1 \leq p \leq 2, \quad (8)$$

и оценка (4) сразу следует из соотношений (7) и (8). С другой стороны, используя равенство $E_n^2(z^n)_{H_p} = 1$, $p \geq 1$ (см. [8, лемма 3]), и подставляя $f_0(z) = z^n \in H_p$ в (4), получаем требуемое утверждение.

Пусть $\Phi(u)$ – произвольная положительная возрастающая при $u \geq 0$ функция такая, что

$$\lim_{u \rightarrow 0} \Phi(u) = \Phi(0) = 0.$$

Для любых целых неотрицательных m и r определим в H_2 классы функций

$$\begin{aligned} W_m^r(\Phi) &= \left\{ f(z) : f^{(r)}(z) \in H_2, \int_0^u \omega_m^2(F^{(r)}, t)_2 dt \leq \Phi^2(u), 0 < u < \pi \right\}, \\ W_{a,m}^r(\Phi) &= \left\{ f(z) : f_a^{(r)}(z) \in H_2, \int_0^u \omega_m^2(F_a^{(r)}, t)_2 dt \leq \Phi^2(u), 0 < u < \pi \right\}. \end{aligned}$$

Положим

$$(1 - \cos nt)_*^m = \begin{cases} (1 - \cos nt)^m, & \text{если } nt \leq \pi, \\ 2^m, & \text{если } nt > \pi. \end{cases}$$

Результаты теоремы 1 позволяют вычислить точные значения перечисленных выше поперечников на классах $W_m^r(\Phi)$ и $W_{a,m}^r(\Phi)$ в пространстве H_2 .

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $\Phi(u)$ для любого заданного $\mu \in (0, 1]$ и для всех $\lambda > 0$, $u \in (0, \pi]$, удовлетворяет условию

$$\Phi^2(\mu u) \int_0^{\lambda\pi} (1 - \cos v)_*^m dv \leq \Phi^2(\lambda u) \int_0^{\mu\pi} (1 - \cos v)^m dv. \quad (9)$$

Тогда для любых натуральных n, m и r справедливы равенства

$$\gamma_n(W_m^r(\Phi), H_2) = \frac{\sqrt{n-r}}{2^{m/2}\alpha_{nr}} \left\{ \int_0^{\mu\pi} (1 - \cos t)^m dt \right\}^{-1/2} \Phi\left(\frac{\mu\pi}{n-r}\right), \quad r < n, \quad (10)$$

$$\gamma_n(W_{a,m}^r(\Phi), H_2) = \frac{\sqrt{n}}{2^{m/2}\beta_{nr}} \left\{ \int_0^{\mu\pi} (1 - \cos t)^m dt \right\}^{-1/2} \Phi\left(\frac{\mu\pi}{n}\right), \quad (11)$$

где $\gamma_n(*)$ — любой из поперечников $d_n(*)$, $\lambda_n(*)$, $\Pi_n(*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не уменьшая общности, проведем рассуждения для класса $W_m^r(\Phi)$. Полагая в (4) $h = \mu\pi/(n-r)$, $r < n$, получим оценку сверху для проекционного поперечника

$$\begin{aligned} \Pi_n(W_m^r(\Phi), H_2) &\leq \sup\{E_n(f)_{H_2} : f \in W_m^r(\Phi)\} \\ &\leq 2^{-m/2}\alpha_{nr}^{-1} \left\{ \int_0^{\mu\pi/(n-r)} (1 - \cos(n-r)t)^m dt \right\}^{-1/2} \Phi\left(\frac{\mu\pi}{n-r}\right) \\ &= \frac{\sqrt{n-r}}{2^{m/2}\alpha_{nr}} \left\{ \int_0^{\mu\pi} (1 - \cos t)^m dt \right\}^{-1/2} \Phi\left(\frac{\mu\pi}{n-r}\right), \quad r < n. \end{aligned}$$

С целью получения оценки снизу рассмотрим сферу полиномов

$$S_{n+1} = \left\{ p_n(z) : \|p_n\|_{H_2} = \frac{\sqrt{n-r}}{2^{m/2}\alpha_{nr}} \left\{ \int_0^{\mu\pi} (1 - \cos t)^m dt \right\}^{-1/2} \Phi\left(\frac{\mu\pi}{n-r}\right) \right\} \quad (12)$$

и покажем, что она входит в класс $W_m^r(\Phi)$. Так как

$$p_n^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^n \alpha_{kr} c_k z^{k-r},$$

то, полагая $p_n^{(r)}(t) = p_n^{(r)}(e^{it})$ при $t \in [0, \pi/(n-r)]$, согласно равенству Парсеваля имеем

$$\|\Delta_m(p_n^{(r)}; \cdot, t)\|_2^2 = 2^m \sum_{k=r+1}^n \alpha_{kr}^2 |c_k|^2 (1 - \cos(k-r)t)^m. \quad (13)$$

Если учесть неравенства $(1 - \cos(k-r)t)^m \leq (1 - \cos(n-r)t)^m$, справедливые для любых $t \geq 0$, $r < k \leq n$, и равенство

$$\|p_n\|_{H_2}^2 = \sum_{k=0}^n |c_k|^2, \quad (14)$$

то из (13) и (14) следует, что

$$\omega_m^2(p_n^{(r)}; t)_2 \leq 2^m \alpha_{nr}^2 (1 - \cos(n-r)t)_*^m \|p_n\|_{H_2}^2.$$

Интегрируя последнее неравенство по отрезку $[0, \pi/(k-r)]$, $k \geq r+1$, и учитывая (12), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi/(k-r)} \omega_m^2(p_n^{(r)}; t)_2 dt \\ &\leq \int_0^{(n-r)\pi/(k-r)} (1 - \cos v)_*^m dv \left\{ \int_0^{\mu\pi} (1 - \cos v)^m dv \right\}^{-1} \Phi^2\left(\frac{\mu\pi}{n-r}\right). \end{aligned} \quad (15)$$

Полагая в (15) $u = \pi/(n-r)$, $\lambda = (n-r)/(k-r)$, с учетом (9) получим

$$\int_0^{\lambda u} \omega_m^2(p_n^{(r)}; t)_2 dt \leq \int_0^{\lambda\pi} (1 - \cos v)_*^m dv \left\{ \int_0^{\mu\pi} (1 - \cos v)^m dv \right\}^{-1} \Phi^2(\mu u) \leq \Phi^2(\lambda u),$$

а это означает, что $S_{n+1} \subset W_m^r(\Phi)$. В силу теоремы о поперечнике сферы (см., например, [9, с. 254]) для колмогоровского поперечника

$$d_n(W_m^r(\Phi), H_2) \geq \frac{\sqrt{n-r}}{2^{m/2} \alpha_{nr}} \left\{ \int_0^{\mu\pi} (1 - \cos t)^m dt \right\}^{-1/2} \Phi\left(\frac{\mu\pi}{n-r}\right), \quad r < n,$$

чем и завершаем доказательство теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ. В условиях теоремы 2 при $\mu = 1$ справедливы равенства

$$\gamma_n(W_m^r(\Phi), H_2) = \left\{ \frac{m!(n-r)}{\pi 2^m (2m-1)!!} \right\}^{1/2} \frac{1}{\alpha_{nr}} \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right), \quad r < n,$$

$$\gamma_n(W_{a,m}^r(\Phi), H_2) = \left\{ \frac{m!n}{\pi 2^m (2m-1)!!} \right\}^{1/2} \frac{1}{\beta_{nr}} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $\gamma_n(*)$ – любое из перечисленных выше поперечников.

В заключение отметим, что функции $\Phi(u)$, удовлетворяющие условию (9) теоремы 2, существуют [10].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тайков Л. В. // Матем. заметки. 1977. Т. 22. № 2. С. 285–295.
2. Айнуллоев Н., Тайков Л. В. // Матем. заметки. 1986. Т. 40. № 3. С. 341–351.
3. Айнуллоев Н. // Геом. вопросы теории функций и множеств. Калинин, 1986. С. 91–101.
4. Вакарчук С. Б. // Укр. матем. ж. 1989. Т. 41. № 6. С. 799–803.
5. Шабозов М. Ш., Шабозов О. Ш. // Докл. АН Респ. Таджикистан. 1997. Т. 40. № 11. С. 9–12.
6. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М.: Гостехиздат, 1950.
7. Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.–Л.: Наука, 1964.
8. Двейрин М. З., Чебаненко И. В. О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций. Киев.: Наукова думка, 1983.
9. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976.
10. Тайков Л. В. // Матем. заметки. 1979. Т. 25. № 2. С. 217–223.

(М. Ш. Шабозов) Хорогский государственный университет
(О. Ш. Шабозов) Таджикский технологический университет, г. Душанбе
E-mail: shabozov@ksu.khorugh.td.silk.org

Поступило
25.05.1999
Исправленный вариант
14.04.2000