Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Аккарди, М. Скайде, Реализации квадратичного белого шума и алгебры конечных разностей в гильбертовом модуле, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 6, 803–818

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1003>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 14:42:18

УДК 517

РЕАЛИЗАЦИИ КВАДРАТИЧНОГО БЕЛОГО ШУМА И АЛГЕБРЫ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ МОДУЛЕ

Л. Аккарди, М. Скайде

В статье развивается теория представлений для алгебры квадратов белого шума, основанная на конструкции гильбертова модуля. Мы приводим единственное фоковское представление и показываем, что пространством представления является обычное симметричное фоковское пространство. Хотя мы начинаем с рассмотрения систем с одной степенью свободы, мы заканчиваем статью теорией для систем с бесконечным числом степеней свободы. Неожиданным обстоятельством является то, что построенное представление тесно связано с алгеброй конечных разностей Файнсилвера. Именно, существует голоморфное отображение алгебры конечных разностей в алгебру квадратов белого шума. Ограничение представления алгебры квадратов белого шума на этот образ совпадает с представлением Букаса на фоковском пространстве конечных разностей. Таким образом, мы расширяем представление Букаса на большую алгебру, порождаемую операторами рождения, уничтожения и числа частиц.

Библиография: 16 названий.

1. Введение. Следуя работе [1], под белым шумом мы понимаем операторнозначные распределения b_t^+ и b_t (параметризованные переменной $t \in \mathbb{R}$), которые удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям (ККС)

$$[b_t, b_s^+] = \delta(t - s).$$

Формально, квадраты белого шума должны быть операторнозначными распределениями $B_t^+ = b_t^{+2}$ и $B_t = b_t^2$, удовлетворяющими коммутационным соотношениям, вытекающим из ККС.

Однако, объекты B_t^+, B_s оказываются слишком сингулярными. Это проявляется в том, что их формальный коммутатор имеет множитель $\delta^2(t - s)$, который *априори* не имеет смысла. Чтобы преодолеть эту трудность, в работе [1] было предложено рассматривать *ренормализацию* сингулярного объекта δ^2 , которая состоит в замене δ^2 на $2c\delta$, где $c > 0$. Этот выбор мотивируется *процедурой ренормализации*, где δ аппроксимируется функциями δ_ϵ так, что $\delta_\epsilon^2 \rightarrow 2c\delta$ в подходящем смысле, а постоянная c может быть даже комплексной.

После ренормализации коммутатор $[B_t, B_s^+] = \delta(t - s)(2c + 4b_t^+ b_t)$ справа содержит операторную составляющую, именно оператор плотности числа частиц $N_t = b_t^+ b_t$. Поскольку $[N_t, B_s^+] = \delta(t - s)2B_t^+$, мы получаем замкнутую алгебру Ли. Исключая

Работа второго автора выполнена при поддержке Deutsche Forschungsgemeinschaft.

плотности с помощью соотношений $B_f^+ = \int f(t) B_t^+ dt$ и $N_a^+ = \int a(t) N_t^+ dt$ и вычисляя формально коммутаторы, мы получаем следующие соотношения:

$$[B_f, B_g^+] = 2c \operatorname{Tr}(\bar{f}g) + 4N_{\bar{f}g}, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}), \quad (1.1a)$$

$$[N_a, B_f^+] = 2B_{af}^+, \quad a \in L^\infty(\mathbb{R}), \quad f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}), \quad (1.1b)$$

и $[B_f^+, B_g^+] = [N_a, N_{a'}] = 0$, где $\operatorname{Tr} f = \int f(t) dt$. Наша цель состоит в том, чтобы найти представление $*$ -алгебры, порождаемой этими соотношениями.

В работе [1] представление этой алгебры было построено с помощью разложения Колмогорова для некоторого положительно определенного ядра. Наибольшая трудность состояла не в построении правильного ядра, а в доказательстве его положительности. В работе [2] Снинади нашел явную форму ядра, положительность которого очевидна. В настоящей работе мы идем другим путем, который мотивируется следующими соображениями. Соотношение (1.1a), выглядит как обычное ККС, за исключением того, что скалярное произведение в правой части принимает значения в алгебре, порождаемой операторами числа частиц N_a . Поэтому естественно попытаться реализовать его на гильбертовом модуле над алгеброй операторов числа частиц. Дополнительно на гильбертовом модуле можно реализовать также соотношение (1.1b), вводя явным образом левое умножение на операторы числа частиц.

Поскольку операторы числа частиц неограничены, мы не можем использовать теорию гильбертовых модулей на C^* -алгебрах, напротив, для этого потребуются теория предгильбертовых модулей над $*$ -алгебрами в форме, предлагаемой в работе [3]. В п. 2 вводятся необходимые понятия. В п. 3 показано, как можно определить представления алгебры операторов числа частиц, фиксируя значения представления для N_a . Это важно для определения умножения слева и позволяет рассматривать алгебру, порождаемую N_a , не только как абстрактную алгебру, а как алгебру операторов числа частиц.

Основным является п. 4, где приводится конструкция двухстороннего предгильбертового модуля E и показано, что над E можно построить симметричный фоковский модуль $\Gamma(E)$. Как мы увидим, естественные операторы рождения $a^*(f)$ на этом фоковском модуле и естественное умножение слева на N_a удовлетворяют соотношению (1.1a) с точностью до аддитивных членов, а также соотношению (1.1b). С помощью конструкции тензорного произведения построено предгильбертово пространство, где выполнены соотношения (1.1a), (1.1b). Это представление совпадает с конструкцией работы [1].

В п. 5 показано, что пространство представления изоморфно обычному симметричному фоковскому пространству над $L^2(\mathbb{R}, \ell^2)$. В последнем п. 6 показано, что это представление может рассматриваться как расширение представления Букаса для алгебры конечных разностей Файнсилвера [4] на фоковском пространстве конечных разностей. Исчисление алгебры квадратов белого шума обобщает исчисление Букаса [5]. В работе [6] Партасарати и Синха сконструировали алгебру конечных разностей с помощью операторов на симметричном фоковском пространстве. Однако, они не рассматривали вопрос об эквивалентности этого представления представлению Букаса. Вполне вероятно, что алгебра квадратов белого шума допускает аналогичное представление. Интересно также получить ответ на вопрос, является ли это представление точным.

2. Гильбертовы модули над $*$ -алгебрами. Далее нам потребуется понятие гильбертова модуля над $*$ -алгеброй неограниченных операторов. Неограниченность затрудняет определение положительности. Для C^* -алгебры существует много эквивалентных

способов определения положительных элементов и положительных линейных функционалов. В случае общих $*$ -алгебр различные определения приводят к различным понятиям положительности. Например, алгебраическое определение, при котором положительными элементами являются элементы, порождаемые выпуклым конусом, который в свою очередь порождается всеми элементами вида b^*b , не содержит достаточный для наших целей запас положительных элементов. С другой стороны, слабое определение “элемент b называется положительным, если $\varphi(b) \geq 0$ для всех положительных функционалов $\varphi(\cdot)$ ” является неконтролируемым, так как оно не позволяет показать, что скалярное произведение в тензорном произведении гильбертовых модулей также является положительным.

Здесь мы будем следовать работе [3], где некоторое образующее подмножество положительных элементов вводится аксиоматически и далее рассматривается порождаемый ими конус. Такое определение положительности является контролируемым, поскольку оно алгебраическое. Оно предполагает наличие левого умножения в двухстороннем гильбертовом модуле. Поэтому мы не вводим определения правого гильбертова модуля, а сразу определяем двухсторонний гильбертов модуль.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $\mathcal{B}$ – унитарная $*$ -алгебра и пусть S – некоторое выделенное образующее множество самосопряженных элементов из $\mathcal{B}$, содержащее 1 . Через $P(S)$ мы обозначаем выпуклый $\mathcal{B}$ -конус, порождаемый S (т.е. множество всех сумм элементов из a^*ba , где $b \in S$, $a \in \mathcal{B}$). Будем говорить, что элементы из $P(S)$ *S-положительны*.

Предгильбертовым $\mathcal{B}$ -модулем называется $\mathcal{B}$ - $\mathcal{B}$ -модуль E (где $1x = x1 = x$) с полуторалинейным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times E \rightarrow \mathcal{B}$, удовлетворяющим следующим условиям:

- [i] $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$ (*определенность*);
- [ii] $\langle x, yb \rangle = \langle x, y \rangle b$ (*правосторонняя $\mathcal{B}$ -линейность*);
- [iii] $\langle x, by \rangle = \langle b^*x, y \rangle$ (*$*$ -свойство инволюции*)

и условию *положительности*, состоящему в том, что для любого $b \in S$ и любого конечного числа $x_i \in E$ существует конечное число $b_k \in S$ и $b_{ki} \in \mathcal{B}$ такие, что

$$\langle x_i, bx_j \rangle = \sum_k b_{ki}^* b_k b_{kj}.$$

Если условие определенности [i] нарушено, мы используем термины *полукалярное произведение* и *полугильбертов модуль*.

Отображение a на полугильбертовом $\mathcal{B}$ -модуле E называется *сопрягаемым*, если существует отображение a^* на E такое, что $\langle x, ay \rangle = \langle a^*x, y \rangle$. Через $\mathcal{L}^r(E)$ и $\mathcal{L}^a(E)$ мы обозначаем пространства правых $\mathcal{B}$ -линейных и сопрягаемых отображений на E соответственно. Заметим, что на предгильбертовом модуле сопряжение единственно и что $\mathcal{L}^a(E) \subset \mathcal{L}^r(E)$.

Поскольку $1 \in S$, скалярное произведение S -положительно (т.е. $\langle x, x \rangle \in P(S)$), а поскольку S состоит только из самосопряженных элементов, скалярное произведение симметрично (т.е. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$) и антилинейно слева (т.е. $\langle xb, y \rangle = b^* \langle x, y \rangle$). Достаточно проверить положительность на подмножестве из E , которое порождает E как правый модуль (см. [3]), либо доказать существование $b_k \in P(S)$.

НАБЛЮДЕНИЕ 2.2. Любой полугильбертов модуль над коммутативной алгеброй $\mathcal{B}$ имеет тривиальную структуру левого модуля над $\mathcal{B}$, где правое и левое умножение одинаковы. Обозначим это тривиальное умножение через b^r , т.е. $b^r: x \mapsto xb$, для того чтобы различать этот случай от возможно нетривиального левого умножения.

Пусть E и F – полугильбертовы $\mathcal{B}$ -модули. Их тензорное произведение над $\mathcal{B}$, выражаемое формулой $E \odot F = E \otimes F / \{xb \otimes y - x \otimes by\}$, превращается в полугильбертов $\mathcal{B}$ -модуль путем введения скалярного произведения $\langle x \odot y, x' \odot y' \rangle = \langle y, \langle x, x' \rangle y' \rangle$. В общем случае $E \odot F$ и $F \odot E$ могут быть весьма различными объектами (например, см. [7, пример 6.7]). Обычно отображение $x \odot y \mapsto y \odot x$ не определяется корректно. Поэтому не всегда возможно сконструировать симметричный фоковский модуль. Знак тензора $\odot$ является “прозрачным” для элемента алгебры, т.е. $x \odot by = xb \odot y$. Любой оператор $a \in \mathcal{L}^a(E)$ порождает корректно определенный оператор $a \odot \text{id} \in \mathcal{L}^a(E \odot F)$. Это вложение, однако, не обязано быть инъективным. Для операторов a на F ситуация не столь удобна. В общем случае мы можем определить $\text{id} \odot a$, если a – билинейный оператор, но это вложение также не обязательно инъективно.

В дальнейшем мы будем изучать полугильбертовы модули. В силу ряда соображений желательно иметь строго положительное скалярное произведение. Например, в отличие от полускалярного, скалярное произведение гарантирует единственность сопряженного оператора. Мы вводим процедуру факторизации, позволяющую сконструировать предгильбертов модуль по заданному полугильбертовому модулю, если на $\mathcal{B}$ существует разделяющее множество S^* положительных функционалов, совместное со структурой положительности, определяемой множеством S . Будем говорить, что функционал φ на $\mathcal{B}$ *S-положителен*, если $\varphi(b) \geq 0$ для всех $b \in P(S)$. Пусть S^* – множество *S-положительных* функционалов. Будем говорить, что S^* *разделяет точки* или является *разделяющим*, если условие $\varphi(b) = 0$ влечет $b = 0$ для всех $\varphi \in S^*$. Если S^* является разделяющим множеством *S-положительных* функционалов на $\mathcal{B}$, то множество $\mathcal{N} = \{x \in E: \langle x, x \rangle = 0\}$ является двухсторонним $\mathcal{B}$ -подмодулем E . Кроме того, по определению фактор модуль $E_0 = E/\mathcal{N}$ наследует структуру предгильбертова $\mathcal{B}$ -модуля $\langle x + \mathcal{N}, y + \mathcal{N} \rangle = \langle x, y \rangle$.

Перед тем как перейти к фоковским модулям, мы опишем конструкцию, связывающую наше алгебраическое определение положительности с “конкретной” положительностью операторов на предгильбертовых пространствах. Пусть π – представление $\mathcal{B}$ на предгильбертовом пространстве G . Иными словами, G является $\mathcal{B}$ - $\mathbb{C}$ -модулем. Снабжая $\mathbb{C}$ структурой выпуклого $\mathbb{C}$ -конуса, порожденного положительным элементом 1 , и продолжая естественным образом наше определение предгильбертова модуля до двухстороннего модуля над разными алгебрами, можно поставить вопрос, является ли G предгильбертовым модулем с естественным скалярным произведением. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $\langle g, \pi(b)g \rangle \geq 0$ для всех $g \in G$ и всех $b \in S$ (см. [3]). Если представление π имеет это свойство, мы будем говорить, что π является *S-положительным*. В частности, π является *S-положительным*, если π отображает элемент из S в сумму элементов вида b^*b ($b \in \mathcal{L}^a(G)$).

Пусть теперь π *S-положителен* и пусть E – предгильбертов $\mathcal{B}$ -модуль. Заметим, что $\text{id}_{\mathbb{C}}$ образует разделяющее множество положительных функционалов на $\mathbb{C}$. Конструкция тензорного произведения сохраняет силу, и мы получаем предгильбертов $\mathcal{B}$ - $\mathbb{C}$ -модуль $H = E \odot G$. Иными словами, H является предгильбертовым пространством с представлением $\rho(b) = b \odot \text{id}$ для $\mathcal{B}$. Действительно, определение ρ продолжается

до представления $\mathcal{L}^a(E)$ на H . Дополнительно мы можем интерпретировать элементы $x \in E$ как отображения $L_x: g \mapsto x \odot g$ в $\mathcal{L}^a(G, H)$ с сопряженными $L_x^*: y \odot g \mapsto \pi(\langle x, y \rangle)g$. Разумеется, $L_{bxb'} = \rho(b)L_x\pi(b')$. Заметим, что отображение $x \mapsto L_x$ взаимно однозначно, если π точное. В этом случае состояние ρ является точным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. *Полным фоковским модулем* над двухсторонним предгильбертовым $\mathcal{B}$ -модулем E называется двусторонний предгильбертов $\mathcal{B}$ -модуль $\mathcal{F}(E) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} E^{\odot n}$ (где $E^{\odot 0} = \mathcal{B}$ со скалярным произведением $\langle b, b' \rangle = b^*b'$ и алгебраической прямой суммой). Единицу $E^{\odot 0}$ мы обозначим через ω , чтобы отличать ее от правого и левого умножения на $1 \in \mathcal{B}$.

На $\mathcal{F}(E)$ для каждого $x \in E$ определим *оператор рождения* $\ell^*(x)$:

$$\ell^*(x)x_n \odot \cdots \odot x_1 = x \odot x_n \odot \cdots \odot x_1, \quad \ell^*(x)\omega = x,$$

и сопряженный *оператор уничтожения*

$$\ell(x)x_n \odot \cdots \odot x_1 = \langle x, x_n \rangle x_{n-1} \odot \cdots \odot x_1, \quad \ell(x)\omega = 0.$$

Для каждого билинейного оператора a на E мы определим оператор $\lambda(a)$ на $\mathcal{F}(E)$, полагая

$$\begin{aligned} \lambda(a)x_n \odot \cdots \odot x_1 &= ax_n \odot x_{n-1} \odot \cdots \odot x_1 + x_n \odot ax_{n-1} \odot \cdots \odot x_1 \\ &\quad + \cdots + x_n \odot x_{n-1} \odot \cdots \odot ax_1 \end{aligned}$$

и $\lambda(a)\omega = 0$.

Фоковские модули впервые были рассмотрены в работах [8], [9]. Первое формальное определение полного фоковского модуля как гильбертова C^* -модуля было дано в работах [10], [11]. Следуя работе [3], мы используем здесь более общую конструкцию для $*$ -алгебр.

3. Алгебра операторов числа частиц на $L^\infty(\mathbb{R})$. Рассмотрим коммутативную $*$ -алгебру операторов числа частиц на симметричном фоковском пространстве $\Gamma(L^2(\mathbb{R}))$, соответствующую элементам из $L^\infty(\mathbb{R})$. Как и в случае полного фоковского модуля, здесь используется алгебраическое определение симметричного фоковского пространства, а $\Gamma(L^2(\mathbb{R}))$ рассматривается как подпространство в $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. В полном фоковском пространстве $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}))$ с вакуумным вектором Ω рассмотрим проекцию P

$$Pf_n \otimes \cdots \otimes f_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_{\sigma(n)} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma(1)}$$

и $P\Omega = \Omega$. *Симметричное фоковское пространство* $\Gamma(L^2(\mathbb{R}))$ совпадает с $P\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}))$.

Для $a \in L^\infty(\mathbb{R})$ определим оператор числа частиц $N_a = P\lambda(a)P$. Через

$$\mathcal{N} = \text{alg}\{N_a \mid (a \in L^\infty(\mathbb{R}))\}$$

мы обозначаем унитарную алгебру, порождаемую всеми N_a .

Ясно, что $N_a^* = N_a^*$ и $N_a N_{a'} = N_{a'} N_a$; таким образом, $\mathcal{N}$ является коммутативной $*$ -алгеброй. Из формулы разложения

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_n, \dots, \varepsilon_1 = \pm 1} \varepsilon_n \cdots \varepsilon_1 (\varepsilon_n f_n + \cdots + \varepsilon_1 f_1)^{\otimes n} = \sum_{\sigma \in S_n} f_{\sigma(n)} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma(1)}$$

следует, что вектор Ω и $f^{\otimes n}$ ($f \in L^2(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$) образуют тотальное подмножество в $\Gamma(L^2(\mathbb{R}))$. Заметим также, что $N_a = P\lambda(a) = \lambda(a)P$. Это легко следует из равенства $P\lambda(a)P = \lambda(a)P$ и его сопряженного.

Пусть I_1, I_2 являются двумя непересекающимися измеримыми подмножествами в $\mathbb{R}$. Обратим внимание на то, что хорошо известная формула факторизации

$$\overline{\Gamma(L^2(S_1)) \otimes \Gamma(L^2(S_2))} \cong \overline{\Gamma(L^2(S_1 \cup S_2))}$$

сужается на алгебраическую область определения, так что

$$\Gamma(L^2(S_1)) \otimes \Gamma(L^2(S_2)) \cong \Gamma(L^2(S_1 \cup S_2))$$

(ср. доказательство теоремы 5.1). С учетом этого отождествления мы имеем $N_{\chi_{S_1}} = N_{\chi_{S_1}} \otimes \text{id}$ и $N_{\chi_{S_2}} = \text{id} \otimes N_{\chi_{S_2}}$. Аналогичные утверждения справедливы для факторизации на более чем два непересекающихся подмножества.

Поскольку $N_a \Omega = 0$ для любого $a \in L^\infty(\mathbb{R})$, вакуумное состояние $\varphi_\Omega(\cdot) = \langle \Omega, \cdot \Omega \rangle$ является характером алгебры $\mathcal{N}$. Его ядро состоит из линейной оболочки всех мономов по крайней мере с одним сомножителем N_a , и его GNS-предгильбертово пространство есть $\mathbb{C}\Omega$.

В качестве подмножества S , задающего положительность на $\mathcal{B}$, мы выбираем

$$S = \{N_{\chi_{I_1}} \cdots N_{\chi_{I_n}} : I_i - \text{ограниченные интервалы в } \mathbb{R} \ (n \in \mathbb{N}_0, i = 1, \dots, n)\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Определяющее представление id для $\mathcal{N}$ на $\Gamma(L^2(\mathbb{R}))$ является S -положительным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что N_{χ_I} имеет вид $\sum_i b_i^* b_i$, где b_i выбираются (для всех I) из коммутативной подалгебры в $\mathcal{L}^a(\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R})))$. Пусть $\lambda_i^n(a)$ ($n \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$) – представление алгебры $L^\infty(\mathbb{R})$, которое действует на i -ю компоненту n -частичного подпространства в $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}))$. Тогда

$$N_{\chi_I} = \sum_{1 \leq i \leq n < \infty} \lambda_i^n(\chi_I) = \sum_{1 \leq i \leq n < \infty} \lambda_i^n(\chi_I)^* \lambda_i^n(\chi_I).$$

В следующем пункте мы дадим определение представления $\mathcal{N}$, приписывая каждому N_a оператор и расширяя его как гомоморфизм алгебр. Цель заключительной части настоящего пункта состоит в том, чтобы показать, что это возможно по крайней мере, если мы ограничимся рассмотрением подалгебры $\mathfrak{S}(\mathbb{R})$ ступенчатых функций, которая плотна в $L^\infty(\mathbb{R})$ в подходящей слабой топологии.

Обозначим через N оператор числа частиц на $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}))$, который отображает $F \in E^{\otimes n}$ в nF . В качестве $PN = NP$ мы используем тот же символ для оператора числа частиц на $\Gamma(L^2(\mathbb{R}))$. Тогда очевидно, что $\text{alg}\{N\}$ изоморфна алгебре полиномов одной

самосопряженной переменной. Более того, для каждого измеримого непустого множества $S \subset \mathbb{R}$ алгебра $\text{alg}\{N_{\chi_S}\}$ изоморфна $\text{alg}\{N\}$. Поэтому для любого самосопряженного элемента a из $*$ -алгебры $\mathcal{A}$ отображение $N \mapsto a$ продолжается до гомоморфизма $\text{alg}\{N\} \rightarrow \mathcal{A}$.

Пусть $\mathbf{t} = (t_0, \dots, t_m)$ является точкой симплекса с $t_0 < \dots < t_m$. Тогда с помощью факторизации

$$\Gamma(L^2(t_0, t_m)) = \Gamma(L^2(t_0, t_1)) \otimes \dots \otimes \Gamma(L^2(t_{m-1}, t_m))$$

мы получаем

$$\mathcal{N}_{\mathbf{t}} := \text{alg}\{N_{\chi_{[t_{k-1}, t_k]}} \ (k = 1, \dots, m)\} = \text{alg}\{N_{\chi_{[t_0, t_1]}}\} \otimes \dots \otimes \text{alg}\{N_{\chi_{[t_{m-1}, t_m]}}\}.$$

Поэтому любое инволютивное отображение

$$T_{\mathbf{t}}: \mathfrak{S}_{\mathbf{t}}(\mathbb{R}) := \text{span}\{\chi_{[t_{k-1}, t_k]} \ (k = 1, \dots, m)\} \rightarrow \mathcal{A}$$

с коммутативной областью значений однозначно определяет гомоморфизм $\rho_{\mathbf{t}}: \mathcal{N}_{\mathbf{t}} \rightarrow \mathcal{A}$, удовлетворяющий $\rho_{\mathbf{t}}(N_a) = T_{\mathbf{t}}(a)$.

Теперь можно доказать универсальное свойство алгебры $\mathcal{N}_{\mathfrak{S}} := \bigcup_{\mathbf{t}} \mathcal{N}_{\mathbf{t}}$, которое состоит в том, что $\mathcal{N}_{\mathfrak{S}}$ является симметричной тензорной алгеброй над инволютивным векторным пространством $\mathfrak{S}(\mathbb{R})$.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $T: \mathfrak{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{A}$ – инволютивное отображение с коммутативной областью значений. Тогда существуют единственный гомоморфизм $\rho: \mathcal{N}_{\mathfrak{S}} \rightarrow \mathcal{A}$, удовлетворяющий условию $\rho(N_a) = T(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что $\mathcal{N}_{\mathfrak{S}}$ является индуктивным пределом для $\mathcal{N}_{\mathbf{t}}$ над множеством всех симплексов $\mathbf{t}$, частично упорядоченных по включению. Обозначая через $\beta_{\mathbf{ts}}$ каноническое вложение $\mathcal{N}_{\mathbf{s}} \rightarrow \mathcal{N}_{\mathbf{t}}$ ($\mathbf{s} \leq \mathbf{t}$), нетрудно проверить, что $\rho_{\mathbf{t}} \circ \beta_{\mathbf{ts}} = \rho_{\mathbf{s}}$. Другими словами, семейство $\rho_{\mathbf{t}}$ однозначно продолжается как гомоморфизм ρ на все $\mathcal{N}_{\mathfrak{S}}$.

4. Реализация алгебры квадратов белого шума. Идея реализации соотношений (1.1a) и (1.1b) на симметричном фоксовском модуле состоит в том, чтобы принять правую часть (1.1a) как определение $\mathcal{N}$ -значного скалярного произведения в модуле E , порождаемом элементами $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, и затем определить левое умножение элементов $\mathcal{N}$ с порождающими элементами f , удовлетворяющими (1.1b). В то же время, попытка непосредственно использовать скалярное произведение (1.1a) оказывается неудачной. Поэтому мы используем линейный анзац (см. (4.1)) и затем далее подходящим образом подбираем константы.

С учетом теоремы 3.3 в настоящий момент мы ограничиваемся элементами из $\mathcal{N}_{\mathfrak{S}}$. Согласно (1.1a) это также ведет к необходимости ограничиться элементами $f \in \mathfrak{S}(\mathbb{R})$.

Для произвольных положительных постоянных β и γ на $\mathfrak{S}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{N}_{\mathfrak{S}}$ с естественной структурой правого $\mathcal{N}_{\mathfrak{S}}$ -модуля мы определяем полуторалинейное отображение $\langle \cdot, \cdot \rangle$, полагая

$$\langle f \otimes \mathbf{1}, g \otimes \mathbf{1} \rangle = M_{\overline{f}g}, \quad \text{где } M_a = \beta \text{Tr } a + \gamma N_a, \quad (4.1)$$

и продолжая его по (анти)линейности.

Определим действие M_a формулой

$$M_a(f \otimes 1) \stackrel{\text{def}}{=} f \otimes M_a + \alpha a f \otimes 1$$

с линейным продолжением по правому сомножителю на все элементы из $\mathfrak{S}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{N}_{\mathfrak{S}}$. Здесь α – произвольная вещественная постоянная. Заметим, что скалярный член M_a не изменяет это коммутационное соотношение. Поэтому N_a удовлетворяет коммутационным соотношениям с α , замененными на α/γ . Ввиду (1.1b) эта дробь должна быть равна 2.

По определению умножение на M_a слева является линейным справа отображением на $\mathfrak{S}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{N}_{\mathfrak{S}}$. Нетрудно проверить, что $M_a^* = M_a^*$ является сопряженным относительно полуторалинейного отображения (4.1). Согласно теореме 3.3 это определение действия слева распространяется на все элементы $\mathcal{N}_{\mathfrak{S}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Отображение (4.1) является полускалярным произведением; поэтому $\mathfrak{S}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{N}_{\mathfrak{S}}$ является полугильбертовым $\mathcal{N}_{\mathfrak{S}}$ -модулем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить только условие положительности, потому что остальные свойства очевидны. Мы уже отмечали, что достаточно проверить положительность элементов из $\chi_{I_i} \otimes 1$, потому что эти элементы порождают $\mathfrak{S}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{N}_{\mathfrak{S}}$ как правый модуль. Дополнительно мы можем предположить что $I_i \cap I_j = \emptyset$ для $i \neq j$. Тогда $\langle \chi_{I_i} \otimes 1, b(\chi_{I_j} \otimes 1) \rangle = 0$ для $i \neq j$, каким бы ни был элемент $b \in \mathcal{N}_{\mathfrak{S}}$. Пусть теперь b является элементом из S . После подходящей модификации отрезков I_i мы можем предположить, что b имеет вид $\prod_i N_{\chi_{I_i}}^{n_i}$, где $n_i \in \mathbb{N}_0$. Заметим, что

$$N_{\chi_{I_i}}(\chi_{I_j} \otimes 1) = (\chi_{I_j} \otimes 1)N_{\chi_{I_i}}$$

для $i \neq j$ и что

$$N_{\chi_I}^n(\chi_I \otimes 1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{(n-k)} (\chi_I \otimes N_{\chi_I}^k).$$

Доказательство проводится по индукции. Отсюда следует, что

$$\langle \chi_{I_i} \otimes 1, b(\chi_{I_j} \otimes 1) \rangle = \delta_{ij} M_{\chi_{I_i}} \sum_{k=0}^{n_i} \binom{n_i}{k} \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{(n_i-k)} N_{\chi_{I_i}}^k \prod_{\ell \neq i} N_{\chi_{I_\ell}}^{n_\ell}.$$

Определим $b_k = \langle \chi_{I_k} \otimes 1, b(\chi_{I_k} \otimes 1) \rangle$ и $b_{ki} = \delta_{ki} 1$. Тогда

$$\langle \chi_{I_i} \otimes 1, b(\chi_{I_j} \otimes 1) \rangle = \sum_k b_{ki}^* b_k b_{kj},$$

где $b_k \in P(S)$.

Выделим элементы нулевой длины такие, что

$$E := \mathfrak{S}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{N}_{\mathfrak{S}} / \mathcal{N}_{\mathfrak{S}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{N}_{\mathfrak{S}}}$$

является двухсторонним предгильбертовым $\mathcal{N}_{\mathfrak{S}}$ -модулем. Обозначим

$$f \otimes b + \mathcal{N}_{\mathfrak{S}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{N}_{\mathfrak{S}}} = fb.$$

Очевидно, что

$$M_a f = f M_a + \alpha a f. \quad (4.2)$$

На подмножестве $f_n \odot \cdots \odot f_1$, порождающем $E^{\odot n}$, используя (4.2), мы получаем

$$M_a f_n \odot \cdots \odot f_1 = f_n \odot \cdots \odot f_1 M_a + \alpha \lambda(a) f_n \odot \cdots \odot f_1.$$

Поэтому на полном фоковском модуле $\mathcal{F}(E)$ выполнено соотношение

$$M_a = M_a^r + \alpha \lambda(a), \quad (4.3)$$

где M_a^r обозначает умножение на M_a справа в смысле наблюдения 2.2.

Теперь попытаемся определить симметричный фоковский модуль над E по аналогии с определением 3.1. Базис для симметризации порождается перестановками, изменяющими порядок сомножителей в тензоре $f \otimes g$. Как мы заметили ранее, мы не можем определить перестановки на $E \odot E$, отображая лишь $x \odot y$ в $y \odot x$ для всех $x, y \in E$. Мы можем, однако, сделать это так, как в работе [7] для *центрированных* модулей, и определить перестановку только на таких x, y , которые получены для подходящего порождающего подмножества из E . Для построения общей перестановки на $E^{\odot n}$ мы также должны быть уверены, что перестановка является билинейной операцией.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Отображение*

$$\tau: f \odot g \mapsto g \odot f, \quad f, g \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}) \subset E,$$

единственным образом продолжается по билинейности до унитарного изоморфизма $E \odot E \rightarrow E \odot E$ (т.е. оно сохраняет скалярное произведение и является сюръективным отображением).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \langle f \odot g, f' \odot g' \rangle &= \langle g, \langle f, f' \rangle g' \rangle = \langle g, M_{\overline{f}f'} g' \rangle = \langle g, g' M_{\overline{f}f'} + \alpha \overline{f} f' g' \rangle \\ &= M_{\overline{f}f'} M_{\overline{g}g'} + \alpha M_{\overline{g}f'f'g'} = M_{\overline{g}g'} M_{\overline{f}f'} + \alpha M_{\overline{f}g g'f'} = \langle g \odot f, g' \odot f' \rangle. \end{aligned}$$

Элементы $f \odot g$ составляют (правое) образующее подмножество в $E \odot E$. Поэтому τ продолжается как изометрическое отображение на $E \odot E$. Очевидно, что это продолжение сюръективно, так что отображение τ является унитарным.

Остается доказать, что отображение τ билинейно. Вновь достаточно проверить это свойство на образующем подмножестве и проверить его только для генераторов M_a . Имеем

$$\begin{aligned} \tau(M_a f \odot g) &= \tau(f \odot g M_a + \alpha(a f \odot g + f \odot a g)) \\ &= g \odot f M_a + \alpha(g \odot a f + a g \odot f) = M_a g \odot f = M_a \tau(f \odot g). \end{aligned}$$

Теперь можно определить симметричный фоковский модуль $\Gamma(E)$ так же, как и в определении 3.1. Предыдущее предложение показывает, что $P M_a = M_a P$, т.е. P является билинейной проекцией. Как и ранее, мы имеем $P \lambda(a) = \lambda(a) P = P \lambda(a) P$. Следовательно, соотношение (4.3) также остается справедливым на симметричном фоковском модуле. В дальнейшем мы не будем различать $\lambda(a)$ и его сужение на $\Gamma(E)$. В обоих

случаях мы обозначаем оператор числа частиц через $N := \lambda(1)$. Так как отображение $\lambda(a)$ билинейно, N также обладает этим свойством и $NP = PN$. Из (3.1) следует, что симметричные тензоры составляют образующее подмножество.

Для любого $x \in E$ мы определяем оператор рождения на $\Gamma(E)$ как $a^*(x) = \sqrt{N}Pl^*(x)$. Очевидно, что $x \mapsto a^*(x)$ является билинейным отображением, так как отображение $x \mapsto \ell^*(x)$ обладает этим свойством. Справедливы коммутационные соотношения

$$M_a a^*(f) = a^*(M_a f) = a^*(fM_a + \alpha a f) = a^*(f)M_a + \alpha a^*(af).$$

Разумеется, $a^*(x)$ имеет сопряженный, именно, $a(x) = \ell(x)P\sqrt{N}$.

Рассмотрим теперь операторы рождения $a^*(f)$ и уничтожения $a(f)$ на элементе f из $\mathfrak{S}(\mathbb{R}) \subset E$. Их действие на симметричных тензорах $g^{\odot n}$ ($g \in \mathfrak{S}(\mathbb{R})$) имеет вид

$$a^*(f)g^{\odot n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{i=0}^n g^{\odot i} \odot f \odot g^{\odot(n-i)}, \quad a(f)g^{\odot n} = \sqrt{n}M_{\bar{f}g}g^{\odot(n-1)}.$$

Очевидно, $a^*(f)a^*(g) = a^*(g)a^*(f)$. В тоже время, аналогичные соотношения неверны для $a^*(x)$ и $a^*(y)$ для произвольных элементов $x, y \in E$.

Для ККС нам нужно вычислить $a(f)a^*(f')$ и $a^*(f')a(f)$. Имеем

$$\begin{aligned} a(f)a^*(f')g^{\odot n} &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}a(f) \sum_{i=0}^n g^{\odot i} \odot f \odot g^{\odot(n-i)} \\ &= M_{\bar{f}f'}g^{\odot n} + M_{\bar{f}g} \sum_{i=0}^{n-1} g^{\odot i} \odot f' \odot g^{\odot(n-1-i)} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} a^*(f')a(f)g^{\odot n} &= \sqrt{n}a^*(f')M_{\bar{f}g}g^{\odot(n-1)} = \sqrt{n}(M_{\bar{f}g}a^*(f') - \alpha a^*(\bar{f}gf'))g^{\odot(n-1)} \\ &= M_{\bar{f}g} \sum_{i=0}^{n-1} g^{\odot i} \odot f' \odot g^{\odot(n-1-i)} - \alpha \lambda(\bar{f}f')g^{\odot n}. \end{aligned}$$

После суммирования суммы по i исчезают. Учитывая произвольность $g^{\odot n}$, а также соотношение (4.3), мы получаем

$$\begin{aligned} [a(f), a^*(f')] &= M_{\bar{f}f'} + \alpha \lambda(\bar{f}f') = 2M_{\bar{f}f'} - M_{\bar{f}f'}^r \\ &= \beta \text{Tr}(\bar{f}f') + 2\gamma N_{\bar{f}f'} - \gamma N_{\bar{f}f'}^r. \end{aligned}$$

Иными словами, полагая $\beta = 2c$ и $\gamma = 2$, мы реализовали (1.1a) операторами $a^*(f)$, однако лишь по модулю умножения справа на некоторый элемент из $\mathcal{N}_{\mathfrak{S}}$. Заметим, что эта конструкция не зависит от выбора α . Полагая $\alpha = 4$, мы реализуем также соотношение (1.1b).

Таким образом, мы должны сделать две вещи. Во-первых, нужно избавиться от вклада от N_a^r в предыдущих соотношениях. Во-вторых, чтобы сравнить с конструкцией алгебры из работы [1], мы должны дать интерпретацию нашей конструкции алгебры в

терминах предгильбертовых пространств. Обе цели можно достичь одновременно следующим образом.

Рассмотрим тензорное произведение $H = \Gamma(E) \odot \mathbb{C}\Omega$ для $\Gamma(E)$ с предгильбертовым $\mathcal{N}_{\mathfrak{S}}$ - $\mathbb{C}$ -модулем $\mathbb{C}\Omega$, который является предгильбертовым пространством, снабженным ГНС-представлением, порождаемым вакуумным состоянием φ_{Ω} на $\mathcal{N}_{\mathfrak{S}}$. Такое тензорное произведение допустимо, потому что любое подпредставление на инвариантном подпространстве S -положительно согласно предложению 3.2, определяющему представление $\mathcal{N}$ на $\Gamma(L^2(\mathbb{R}))$. Таким образом, H является предгильбертовым пространством, которое имеет представление $\mathcal{L}^a(\Gamma(E))$. В этом представлении все операторы N_a^r представляются нулем. Действительно, N_a^r коммутируют со всеми операторами, поэтому мы ставим их справа и имеем

$$N_a^r g^{\odot n} \odot \Omega = g^{\odot n} \odot N_a^r \Omega = 0.$$

Обозначим через B_f^+ образ $a^*(f)$ в $\mathcal{L}^a(H)$. Образ N_a совпадает с образом $4\lambda(a)$. Обозначим тем же символом оператор N_a . Через $\Phi = \omega \odot \Omega$ мы обозначаем вакуумный вектор в H .

ТЕОРЕМА 4.3. *Операторы $B_f^+, N_a \in \mathcal{L}^a(H)$ ($f, a \in \mathfrak{S}(\mathbb{R})$) удовлетворяют соотношениям (1.1a), (1.1b) и $[B_f^+, B_g^+] = [N_a, N_{a'}] = 0$. Кроме того, линейная оболочка векторов $B_f^{+n} \Phi$ ($f \in \mathfrak{S}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}_0$) плотна в H .*

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Ясно, что H является именно предгильбертовым пространством в смысле конструкции работы [1]. Однако, в работе [1] скалярное произведение на тотальном множестве векторов было определено априори и было весьма сложно проверить их положительность. Здесь же положительность и корректная определенность представления обеспечиваются автоматически.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. Полагая $H_n = \text{span}\{B_f^{+n} \Phi \mid f \in \mathfrak{S}(\mathbb{R})\}$, мы видим, что в обозначениях [3] $H = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n$ является интерактивным фоковским пространством с операторами рождения B_f^+ из работы [12].

ТЕОРЕМА 4.6. *Представления соотношений (1.1a) и (1.1b) операторами на $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \overline{H_n}$ распространяются на элементы $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^{\infty}(\mathbb{R})$ и $a \in L^{\infty}(\mathbb{R})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы распространим формально определение операторов B_f^+ и N_a на $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^{\infty}(\mathbb{R})$ и $a \in L^{\infty}(\mathbb{R})$, рассматривая их как операторы на векторах вида $B_f^{+n} \Phi$ ($f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^{\infty}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}_0$). Скалярное произведение векторов мы определяем с помощью продолжения скалярного произведения векторов, где $f \in \mathfrak{S}$ в σ -слабой топологии на $L^{\infty}(\mathbb{R})$. Такое продолжение, очевидно, корректно и единственно. Положительность этого скалярного произведения следует из свойств аппроксимирующих произведений и корректной определенности операторов, поскольку все используемые операторы имеют формальные сопряженные.

5. Ассоциированная мультипликативная система. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ – конечное объединение интервалов. Обозначим через H_I подпространство в пространстве H , образованное линейной оболочкой векторов вида $B_f^{+n} \Phi$ ($f \in \mathfrak{S}(I)$, $n \in \mathbb{N}_0$). В частности, для $0 \leq t \leq \infty$ мы полагаем $H_t := H_{[0,t]}$. Это означает, что $H_0 = H_{\emptyset} = \mathbb{C}\Phi$. Заметим, что H_I не зависит от того, являются ли интервалы из I открытыми, полуоткрытыми или замкнутыми.

Обозначим через $I+t$ сдвиг множества I и через f_t соответствующий сдвиг функции: $f_t(s) = f(s-t)$. Очевидно, что, отображая $B_f^{+n}\Phi$ в $B_{f_t}^{+n}\Phi$, мы определяем изоморфизм $H_I \rightarrow H_{I+t}$.

Заметим, что согласно соотношению (1.1a) операторы B_f и B_g^+ , соответствующие функциям $f \in \mathfrak{S}(I)$ и $g \in \mathfrak{S}(\mathbb{R} \setminus I)$ коммутируют. Определим $\mathcal{N}_I := \text{alg}\{N_a \mid (a \in \mathfrak{S}(I))\}$. Тогда в силу соотношения (1.1b) элементы из $\mathcal{N}_I$ также коммутируют со всеми B_g , соответствующими функциям $g \in \mathfrak{S}(\mathbb{R} \setminus I)$.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $I, J \subset \mathbb{R}$ – конечные объединения интервалов, причем $I \cap J = \emptyset$. Тогда

$$U_{IJ}: B_f^{+n} B_g^{+m} \Phi \mapsto B_f^{+n} \Phi \otimes B_g^{+m} \Phi, \quad f \in H_I, \quad g \in H_J,$$

продолжается как изоморфизм $H_{I \cup J} \rightarrow H_I \otimes H_J$. Композиция таких изоморфизмов ассоциативна в том смысле, что

$$(U_{IJ} \otimes \text{id}) \circ U_{(I \cup J)K} = (\text{id} \otimes U_{JK}) \circ U_{I(J \cup K)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что векторы $B_f^{+n} B_g^{+m} \Phi$ образуют тотальное множество в $H_{I \cup J}$ и множество векторов $B_f^{+n} \Phi \otimes B_g^{+m} \Phi$ также тотально в $H_I \otimes H_J$. Поэтому достаточно проверить изометричность. Имеем

$$\langle B_f^{+n} B_g^{+m} \Phi, B_{f'}^{+n'} B_{g'}^{+m'} \Phi \rangle = \langle B_g^{+m} \Phi, B_f^n B_{f'}^{+n'} B_{g'}^{+m'} \Phi \rangle.$$

Без потери общности можно предположить, что $n \geq n'$. Тогда

$$B_f^n B_{f'}^{+n'} = B_f^{n-n'} B_f^{n'} B_{f'}^{+n'} = B_f^{n-n'} \sum_{k=0}^{n'} b_k B_{f'}^{+k} B_f^k,$$

где $b_k \in \mathcal{N}_I$. Поскольку B_f коммутирует с B_g^+ и $B_f \Phi = 0$, ненулевой вклад дают только $B_f^{n-n'} b_0$. С другой стороны, b_0 также коммутирует с B_g^+ и $b_0 \Phi = \Phi \varphi_\Omega(b_0) = \Phi \langle \Phi, b_0 \Phi \rangle$. Поэтому $B_f^{n-n'}$ коммутирует с B_g^+ и, действуя непосредственно на Φ , дает 0 во всех случаях, кроме $n = n'$. Таким образом, ненулевой вклад возникает только для $n = n'$ и $m = m'$. Мы получаем

$$\begin{aligned} \langle B_f^{+n} B_g^{+m} \Phi, B_{f'}^{+n} B_{g'}^{+m} \Phi \rangle &= \langle B_g^{+m} \Phi, B_{g'}^{+m} \Phi \rangle \langle \Phi, b_0 \Phi \rangle \\ &= \langle B_g^{+m} \Phi, B_{g'}^{+m} \Phi \rangle \langle B_f^{+n} \Phi, B_{f'}^{+n} \Phi \rangle, \end{aligned}$$

что и требовалось.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. *Справедливо соотношение $H_s \otimes H_t \cong H_{[0,s)+t} \otimes H_t \cong H_{s+t}$. Изоморфизмы $U_{st}: H_s \otimes H_t \rightarrow H_{s+t}$ обладают свойством ассоциативной композиции; иными словами, H_t образуют тензорное произведение предгильбертовых пространств в смысле [13].*

Определение, данное в работе [13], чисто алгебраическое. Представляет интерес вопрос о том, образуют ли $\overline{H_t}$ тензорное произведение пространств в более сильном смысле Арвесона, который ввел понятие *product system* в [14]. В частности, для этого все пространства $\overline{H_t}$ должны быть сепарабельными бесконечномерными пространствами и должны выполняться некоторые условия измеримости. Мы действуем менее прямолинейно.

Если $\overline{H_t}$ является системой Арвесона, то возникает вопрос, какой тип она имеет. Системами типа I являются в точности те, которые получаются из симметричного фоковского пространства. Характеристическим свойством симметричных фоковских пространств среди других систем Арвесона является то, что они порождаются линейной оболочкой экспоненциальных векторов. Иными словами, мы должны найти все семейства $\psi_t \in \overline{H_t}$ (так называемые *единицы*), тензорная композиция которых имеет свойства, сходные с тензорным произведением экспоненциальных векторов на индикаторных функциях, $\psi_s \otimes \psi_t = \psi_{s+t}$.

Естественными кандидатами на роль экспоненциальных векторов являются

$$\psi_\rho(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{\rho\chi_t}^+{}^n \Phi}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} B_{\chi_t}^+{}^n \Phi,$$

где $\rho \in \mathbb{C}$ и $\chi_t := \chi_{[0,t]}$. Если заменить B^+ операторами рождения в обычном симметричном фоковском пространстве, мы получим обычный экспоненциальный вектор $\psi(\rho\chi_t)$. Если $\psi_{\rho_0}(t)$ существует, то он является аналитической векторозначной функцией для ρ : $|\rho| < |\rho_0|$. Нетрудно проверить, что если существуют $\psi_\rho(s)$ и $\psi_\rho(t)$, то также существует вектор $\psi_\rho(s+t)$, равный $\psi_\rho(s) \otimes \psi_\rho(t)$ (см. следствие 5.2). Более того, $\psi_\rho(t)$ является аналитической функцией ρ , которую можно дифференцировать. Заметим, что

$$B_{\chi_t}^+{}^n \Phi = \left. \frac{d^n}{d\rho^n} \right|_{\rho=0} \psi_\rho(t)$$

является замкнутой линейной оболочкой $\psi_\rho(t)$ ($|\rho| < |\rho_0|$). Поэтому если для каждого $t > 0$ существует $\rho_0 > 0$ такое, что существует $\psi_{\rho_0}(t)$, то векторы $\psi_\rho(t)$ и их сдвиги образуют тотальное подмножество в $\overline{H_\infty}$.

ЛЕММА 5.3. *Если $|\rho| < 1/2$, то существует $\psi_\rho(t)$. Более того,*

$$\langle \psi_\rho(t), \psi_\sigma(t) \rangle = e^{-(ct/2) \ln(1-4\bar{\rho}\sigma)}, \quad (5.1)$$

где функция

$$\kappa: (\rho, \sigma) \mapsto -\frac{c}{2} \ln(1-4\bar{\rho}\sigma)$$

является положительно определенным ядром на $U_{1/2}(0) \times U_{1/2}(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала мы покажем, что левая часть (5.1) существует в более простом случае $\sigma = \rho$, что доказывает существование $\psi_\rho(t)$.

Положим $f = \rho\chi_t$. Тогда $(\bar{f}f)f = |\rho|^2 f$. Отсюда следует коммутационное соотношение $N_{\bar{f}f}B_f^+ = B_f^+N_{\bar{f}f} + 2|\rho|^2 B_f^+$. Более того, $2c \operatorname{Tr}(\bar{f}f) = 2c|\rho|^2 t$. Имеем

$$\begin{aligned} B_f B_f^{+n} &= B_f^+ B_f B_f^{+n-1} + (2c|\rho|^2 t + 4N_{\bar{f}f}) B_f^{+n-1} \\ &= B_f^+ B_f B_f^{+n-1} + B_f^{+n-1} (2c|\rho|^2 t + 8|\rho|^2 (n-1)) + B_f^{+n-1} 4N_{\bar{f}f} \\ &= B_f^{+n} B_f + n B_f^{+n-1} 4N_{\bar{f}f} \\ &\quad + B_f^{+n-1} 2|\rho|^2 ((ct + 4(n-1)) + (ct + 4(n-2)) + \dots + (ct + 0)) \\ &= B_f^{+n} B_f + n B_f^{+n-1} 4N_{\bar{f}f} + B_f^{+n-1} 2n|\rho|^2 (ct + 2(n-1)). \end{aligned}$$

Если применить этот оператор к вакуумному вектору Φ , то первые два слагаемых исчезнут. Мы получаем рекуррентную формулу

$$\frac{\langle B_f^{+n} \Phi, B_f^{+n} \Phi \rangle}{(n!)^2} = 4|\rho|^2 \left(\frac{ct}{2n} + \frac{n-1}{n} \right) \frac{\langle B_f^{+n-1} \Phi, B_f^{+n-1} \Phi \rangle}{((n-1)!)^2}.$$

Очевидно, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle B_f^{+n} \Phi, B_f^{+n} \Phi \rangle}{(n!)^2}$$

сходится, если и только если $4|\rho|^2 < 1$ или $|\rho| < 1/2$.

Для фиксированного $\rho \in U_{1/2}(0)$ функция $\langle \psi_\rho(t), \psi_\rho(t) \rangle$ является равномерным пределом целых функций переменной t и поэтому сама является целой функцией t . В частности, поскольку $\psi_\rho(s+t) = \psi_\rho(s) \otimes \psi_\rho(t)$, то должно существовать число $\varkappa \in \mathbb{R}$ (более точно из $\mathbb{R}_+$, потому что $\langle \psi_\rho(t), \psi_\rho(t) \rangle \geq 1$) такое, что $\langle \psi_\rho(t), \psi_\rho(t) \rangle = e^{\varkappa t}$. Значение $\varkappa$ находим, дифференцируя в точке $t = 0$. Единственный вклад в произведение

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} 4|\rho|^2 \left(\frac{ct}{2n} + \frac{n-1}{n} \right) \dots 4|\rho|^2 \left(\frac{ct}{2} + 0 \right)$$

дает правило Лейбница, если мы продифференцируем последний сомножитель и положим $t = 0$ в оставшихся членах. Получаем

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle \psi_\rho(t), \psi_\rho(t) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (4|\rho|^2)^n \frac{1}{n} \frac{c}{2} = -\frac{c}{2} \ln(1 - 4|\rho|^2).$$

Остальные утверждения вытекают из аналогичных рассуждений при замене $|\rho|^2$ на $\bar{\rho}\sigma$. Ясно, что $\bar{\rho}\sigma$ является положительно определенным ядром. Тогда в силу леммы Шура функция $\varkappa(\rho, \sigma)$ как предел линейных комбинаций степеней $\bar{\rho}\sigma$ также является положительно определенной.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. Функция χ является ковариационной функцией произведения системы пространств в смысле Арвесаона [14], которая определена на множестве всех единиц и сужена на множество специальных единиц $\psi_\rho(t)$. На множестве всех единиц необходимо учитывать множители e^{ct} единиц. Ковариационная функция на этом двухпараметрическом множестве является лишь условно положительным ядром.

Пусть

$$v_\rho = \sqrt{\frac{c}{2}} \left(2\rho, \frac{(2\rho)^2}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{(2\rho)^n}{\sqrt{n}}, \dots \right) \in \ell^2.$$

Тогда $\langle v_\rho, v_\sigma \rangle = -(c/2) \ln(1 - 4\rho\sigma)$ и векторы v_ρ образуют тотальное множество в ℓ^2 . Иными словами, разложение Колмогорова для ковариационной функции является парой $(\ell^2, \rho \mapsto v_\rho)$. Следующая теорема является простым следствием леммы 5.3.

ТЕОРЕМА 5.5. *Существует единственный инвариантный относительно сдвигов изоморфизм $\overline{H_\infty} \rightarrow \overline{\Gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \ell^2))}$ такой, что*

$$\psi_\rho(t) \mapsto \psi(v_\rho \chi_t).$$

Следовательно, $\overline{H_t}$ является мультипликативной системой Арвесаона типа I.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.6. Определяя E_I как подмодуль в E , порождаемый $\mathfrak{S}(I)$, мы получаем $\Gamma(E_{I \cup J}) = \Gamma(E_I) \odot \Gamma(E_J)$ для непересекающихся I и J так же, как и в доказательстве теоремы 5.1. Введенный выше изоморфизм отображает $a^*(f)^n a^*(g)^m \omega$ в $a^*(f)^n \omega \odot a^*(g)^m \omega$ и рассуждения те же, за исключением того, что они проще: $b\omega = \omega b$. Действительно, полагая $E_t = E_{[0,t]}$, мы получаем тензорное произведение системы $(\Gamma(E_t))$ предгильбертовых $\mathcal{N}_{\mathfrak{S}}$ - $\mathcal{N}_{\mathfrak{S}}$ -модулей в смысле работы [13].

6. Связь с алгеброй конечных разностей. После замен $c \rightarrow 2$ и $\rho \rightarrow \rho/2$ правая часть уравнения (5.1), продолженного очевидным образом с множества индикаторных функций на множество ступенчатых функций, является ядром Букаса [15], [16], определяющим пространство представления для алгебры конечных разностей Файнсилверы [4]. Поэтому пространство Букаса и наше пространство совпадают.

После того, как установлено совпадение пространств представления, возникает естественный вопрос о том, содержит ли алгебра квадратов белого шума элементы, удовлетворяющие соотношениям алгебры конечных разностей. Действительно, полагая $c = 2$ и определяя

$$Q_f = \frac{1}{2}(B_f^+ + N_f), \quad P_f = \frac{1}{2}(B_f^- + N_f), \quad T_f = 1 \operatorname{Tr} f + P_f + Q_f \quad (6.1)$$

для $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, мы получаем

$$[P_f, Q_g] = [T_f, Q_g] = [P_f, T_g] = T_{fg}. \quad (6.2)$$

В частном случае $f = \bar{f} \in \mathfrak{S}$ эти соотношения являются соотношениями алгебры конечных разностей. Действительно, операторы Q_f, P_f, T_f совпадают с операторами, найденными Букасом. Однако не ясно, следуют ли соотношения $T_f = 1 \operatorname{Tr} f + P_f + Q_f$ из (6.2) либо они независимы. Во втором случае представление Букаса не может быть точным.

Во всех случаях операторов Q_f, P_f, T_f не достаточно, чтобы восстановить B_f, B_f^+, N_f . Можно лишь восстановить операторы $B_f^+ - B_f$ и $B_f^+ + B_f + 2N_f$. Поскольку алгебра квадратов белого шума порождается операторами рождения, уничтожения и числа частиц, представление алгебры конечных разностей должно порождаться некоторыми линейными комбинациями этих операторов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Accardi L., Lu Y. G., Volovich I. V. White Noise Approach to Classical and Quantum Stochastic Calculi. Preprint, Rome, to appear in the lecture notes of the Volterra International School of the same title, held in Trento, 1999.
- [2] Sniady P. Quadratic Bosonic and Free White Noise. Preprint, 1999.
- [3] Accardi L., Skeide M. Interacting Fock Space Versus Full Fock Module. Preprint, Rome, 1998. Revised in January 2000.
- [4] Feinsilver P. J. Discrete analogues of the Heisenberg–Weyl algebra // *Mh. Math.* 1987. V. 104. P. 89–108.
- [5] Boukas A. Stochastic calculus on the finite-difference Fock space // *Quantum Probability and Related Topics* / ed. L. Accardi. V. VI: World Scientific, 1991.
- [6] Parthasarathy K. R., Sinha K. B. Unification of quantum noise processes in Fock spaces // *Quantum Probability and Related Topics* / ed. L. Accardi. V. VI: World Scientific, 1991. P. 371–384.
- [7] Skeide M. Hilbert modules in quantum electrodynamics and quantum probability // *Comm. Math. Phys.* 1998. V. 192. P. 569–604.
- [8] Accardi L., Lu Y. G. From the weak coupling limit to a new type of quantum stochastic calculus // *Quantum Probability and Related Topics* / ed. L. Accardi. V. VII: World Scientific, 1992. P. 1–14.
- [9] Accardi L., Lu Y. G. The Wigner semi-circle law in quantum electrodynamics // *Comm. Math. Phys.* 1996. V. 180. P. 605–632.
- [10] Pimsner M. V. A class of C^* -algebras generalizing both Cuntz–Krieger algebras and crossed products by $\mathbb{Z}$ // *Free Probability Theory* / ed. D. V. Voiculescu. V. 12: Fields Institute Communications, 1997. P. 189–212.
- [11] Speicher R. Combinatorial Theory of the Free Product with Amalgamation and Operator-valued Free Probability Theory. *Mem. Amer. Math. Soc.* V. 627. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1998.
- [12] Accardi L., Lu Y. G., Volovich I. V. Interacting Fock Spaces and Hilbert Module Extensions of the Heisenberg Commutation Relations. Kyoto: IAS Publications, 1997.
- [13] Bhat B. V. R., Skeide M. Tensor Product Systems of Hilbert Modules and Dilations of Completely Positive Semigroups. Preprint, Cottbus, Revised version, Rome. Submitted to *Infinite-Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, 1999.
- [14] Arveson W. Continuous Analogues of Fock Space. *Mem. Amer. Math. Soc.* V. 409. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1989.
- [15] Boukas A. Quantum Stochastic Analysis: a Non-Brownian Case. PhD thesis: Southern Illinois University, 1988.
- [16] Boukas A. An example of quantum exponential process // *Mh. Math.* 1991. V. 112. P. 209–215.

Center V. Volterra, Università degli Studi di Roma “Tor Vergata” (Л. Аккарди)
 Lehrstuhl für Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik,
 Brandenburgische Technische Universität Cottbus (М. Скайде)
E-mail: accardi@volterra.mat.uniroma2.it, skeide@math.tu-cottbus.de

Поступило
 09.10.1999