Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Самовол, О псевдонормальной форме вещественных автономных систем с двумя чисто мнимыми собственными числами, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 5, 731–746

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10039>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 12:32:27

О псевдонормальной форме вещественных автономных систем с двумя чисто мнимыми собственными числами

В. С. Самовол

В статье рассматриваются вещественные автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности невырожденной особой точки, у которых матрица линейной части имеет два чисто мнимых собственных значения, а остальные собственные значения лежат вне мнимой оси. Исследуется приводимость таких систем к псевдонормальной форме. Уточняется понятие резонанса, вводятся понятия устранимых и неустранимых резонансов.

Библиография: 9 названий.

Введение. В работе рассматриваются вопросы, связанные с приводимостью вещественной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений к нормальной форме в окрестности особой точки. Речь пойдет о системах, матрица линейной части которых имеет два чисто мнимых собственных числа, в то время как другие собственные числа лежат вне мнимой оси. Подход, использованный в статье, основан на методах, изложенных в работе [1].

Нормальная форма системы обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно хорошо изучена. В частности, подробно исследована задача аналитической приводимости к нормальной форме (см., например, [2; гл. II, III], [3]). Приведение к нормальной форме тесно связано с задачей локальной эквивалентности систем уравнений. Конечно-гладкие задачи такого рода хорошо изучены, однако в большинстве работ исследуются системы с невырожденной особой точкой (или инвариантным многообразием) в то время как даже слабо вырожденные системы весьма мало исследованы. По поводу частично вырожденных систем см. [4]. Задача бесконечно-гладкой эквивалентности систем с одним нулевым или парой чисто мнимых собственных чисел рассмотрена в [5]. Следует отметить, что в работах [1], [5] использованы методы, предложенные в исследованиях [6], [7], в которых изучена связь между формальными и бесконечно-гладкими решениями линейных систем уравнений с одним нулевым собственным числом. При этом рассматриваются преобразования с особенностями. Поскольку эти преобразования не являются обратимыми, систему, получающуюся при их применении, мы, в отличие от нормальной формы, будем называть *псевдонормальной формой*. Этот подход развит в [1], где

предложен новый взгляд на псевдонормальную форму систем с одним нулевым собственным числом (в указанной работе мы не использовали термин псевдонормальная форма и именовали ее нормальной формой). В представленной ниже работе указанные методы получают дальнейшее развитие, и на этой основе будет дана новая информация о псевдонормальной форме систем с двумя мнимыми собственными числами.

Рассмотрим вещественную автономную систему

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = Q(\xi), \quad (1)$$

где $\xi, Q(\xi) \in \mathbb{R}^{n+2}$, $n > 0$, $Q(\xi)$ – функция класса C^∞ в некоторой окрестности начала координат, $Q(0) = 0$, матрица $\tilde{A} = Q'(0)$ имеет n собственных чисел, лежащих вне мнимой оси, и пару чисто мнимых собственных чисел. Цель данной работы состоит в определении вида псевдонормальной формы такой системы уравнений и построении преобразования, приводящего систему (1) к псевдонормальной форме в некоторой окрестности начала координат.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные числа матрицы $\tilde{A}$ с ненулевой действительной частью, $\pm i\omega$ – пара чисто мнимых собственных чисел данной матрицы, $\omega > 0$, i – мнимая единица.

С помощью стандартного линейного преобразования приведем систему (1) к следующему виду, где матрица $\tilde{A}$ станет жордановой,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= i\omega x_1 + f_1(x, y), \\ \dot{x}_2 &= -i\omega x_2 + f_2(x, y), \\ \dot{y}_j &= \epsilon_j y_{j+1} + \lambda_j y_j + g_j(x, y), \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь x, y – комплексные координаты, $x = (x_1, x_2)$, $x_2 = \bar{x}_1$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, комплексно сопряженным переменным соответствуют комплексно сопряженные уравнения (см., например [2; с. 167–168]), ряды Тейлора функций f_1, f_2, g_j , $j = 1, \dots, n$, не содержат линейных членов. Переменные x мы будем называть *вырожденными*, а переменные y , соответственно, *невырожденными*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В данной работе нас будут интересовать преобразования, относящиеся к системам уравнений, переменные в которых являются комплексными. В то же время исходная система (1) является вещественной. При переходе от системы (1) к комплексной системе (2) все уравнения разбиваются на пары комплексно сопряженных уравнений (соответствующих комплексно сопряженным собственным числам) и вещественных уравнений (для вещественных собственных чисел). Важным является то обстоятельство, что при всех последующих преобразованиях комплексных систем будет соблюдаться принцип, согласно которому комплексно сопряженные переменные и соответствующие им уравнения будут преобразовываться в комплексно сопряженные. Каждому такому преобразованию будет соответствовать вещественное преобразование исходной системы. Этот принцип (условие) мы будем называть принципом (условием) вещественности.

Следующая теорема, при формулировке которой мы используем хорошо известное понятие резонансного монома (см., например, [2]–[4]), представляет собой стандартное утверждение, и мы ограничимся лишь ее формулировкой.

ТЕОРЕМА 1. *Существует невырожденное преобразование класса C^∞ , приводящее систему (2) к виду, при котором ряд Тейлора правой части системы является суммой резонансных мономов по всем переменным (как вырожденным, так и невырожденным).*

Ниже будем считать, что система (2) уже приведена к виду, указанному в теореме 1.

В рассматриваемых системах, как и в случае с одним нулевым собственным значением, главной проблемой является приведение к удобной форме линейной (по невырожденным координатам) части системы. Основным препятствием являются так называемые резонансы единичного веса (см. [8]), которые возникают в тех случаях, когда для каких либо $1 \leq j_1 \neq j_2 \leq n$ число $(\lambda_{j_1} - \lambda_{j_2})/(i\omega)$ целое. Такие собственные числа, а также соответствующие переменные и уравнения системы мы будем называть *эквивалентными* между собой. В случае отсутствия указанных резонансов система (1) всегда может быть приведена к полиномиальной нормальной форме преобразованием конечного класса гладкости [8; теорема 3]. Среди указанных резонансов выделим такие, где числа $\lambda_{j_1} = \overline{\lambda_{j_2}}$. Это означает, что число $2\omega^{-1} \operatorname{Im} \lambda_{j_1}$ целое. Такие резонансы, где это число нечетное, будем называть *особыми*. Переменные, соответствующие собственным числам λ , для которых число $2\omega^{-1} \operatorname{Im} \lambda$ нечетное, будем также называть *особыми* переменными, а если это число не является нечетным (или оно не целое), то соответствующие переменные будем называть *неособыми*.

У формальной системы, соответствующей системе (2), имеется двумерное инвариантное центральное многообразие, отвечающее мнимой части спектра. Из [5] следует, что у системы (2) также имеется инвариантное центральное многообразие класса C^∞ (вообще говоря, не единственное), на котором в окрестности особой точки интегральные кривые либо замкнуты (случай центра), либо являются спиралями (случай фокуса). В данной статье исследуются системы вида (2), имеющие фокус на центральном многообразии. На любом центральном многообразии система может быть приведена формальным преобразованием к следующей нормальной форме

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(i\omega + ig_2(\tilde{r}) + g_1(\tilde{r})), \\ \dot{x}_2 &= x_2(-i\omega - ig_2(\tilde{r}) + g_1(\tilde{r})),\end{aligned}$$

где $\tilde{r} = x_1 x_2$, $g_j(\tilde{r})$, $j = 1, 2$, – вещественные формальные ряды без свободных членов. Мы ограничимся рассмотрением основного случая, когда $g_1(\tilde{r}) \not\equiv 0$ (случай негрубого фокуса).

С учетом формулы (2.7) из [9], а также исходя из соображений вещественности получаем, что на центральном многообразии система в случае фокуса может быть приведена формальным преобразованием к следующей нормальной форме:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(i\omega + i\varphi(\tilde{r}) + \tilde{b}(\tilde{r})), \\ \dot{x}_2 &= x_2(-i\omega - i\varphi(\tilde{r}) + \tilde{b}(\tilde{r})).\end{aligned}\tag{3}$$

Здесь и ниже

$$\tilde{r} = x_1 x_2, \quad \varphi(\tilde{r}) = \sum_{j=1}^m \varphi_j \tilde{r}^j, \quad \tilde{b}(\tilde{r}) = b\tilde{r}^m + c\tilde{r}^{2m},$$

$m \geq 1$ – целое число, $\varphi_1, \dots, \varphi_m, b, c$ – вещественные числа, $b \neq 0$. Отметим, что переменная $\tilde{r}$ удовлетворяет уравнению $\dot{\tilde{r}} = 2\tilde{r}\tilde{b}(\tilde{r})$. Зафиксируем одно из центральных многообразий. После соответствующей замены переменных можно считать, что данное многообразие определяется уравнением $y = 0$. Возможность формального преобразования в случае фокуса на центральном многообразии означает существование преобразования класса C^∞ , приводящего систему на центральном многообразии к виду (3) (см., например, [5]). Будем считать, что в системе (2) указанное преобразование уже сделано.

Рассмотрим линейную (по невырожденным координатам) часть системы (2):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(i\omega + i\varphi(\tilde{r}) + \tilde{b}(\tilde{r})), \\ \dot{x}_2 &= x_2(-i\omega - i\varphi(\tilde{r}) + \tilde{b}(\tilde{r})), \\ \dot{y} &= A(x)y.\end{aligned}\tag{4}$$

Отметим, что за счет соответствующей нумерации переменных можно добиться того, что матрица $\hat{A}(x)$, являющаяся формальным аналогом матрицы $A(x)$, будет иметь блочно-диагональную форму, где в отдельные блоки будут входить только группы эквивалентных переменных (под $\hat{A}(x)$ понимается ряд Тейлора матрицы $A(x)$).

В данной работе мы часто будем пользоваться соображением о том, что наличие формальных преобразований рассматриваемых систем уравнений означает существование соответствующих преобразований класса C^∞ (см. [5]–[7]). Поэтому рассмотрение системы в подобных случаях будем заменять исследованием ее формального аналога. С учетом этого будем в дальнейшем считать, что матрица $A(x)$ в (4) также имеет указанный блочно-диагональный вид.

Заметим теперь, что в случае, когда число $2\omega^{-1} \operatorname{Im} \lambda_j$ целое, переменные y_j и $\bar{y}_j$ будут эквивалентными и уравнения для них будут находиться в одном блоке. Отсюда нетрудно видеть, что для некоторого набора эквивалентных переменных y_j либо все числа $2\omega^{-1} \operatorname{Im} \lambda_j$ целые, и тогда все пары комплексно сопряженных переменных y_j и $\bar{y}_j$ окажутся в одном блоке, либо все числа $2\omega^{-1} \operatorname{Im} \lambda_j$ не являются целыми, и комплексно сопряженные переменные будут входить в разные блоки.

Нашей главной целью является приведение системы (4) к виду, где матрица $A(x)$ будет иметь жорданову форму. С учетом блочно-диагонального вида $A(x)$ достаточно соответствующее утверждение доказать для системы, отвечающей отдельному блоку матрицы $A(x)$. В каждом блоке эквивалентных уравнений, включающем комплексно сопряженные уравнения (все числа $2\omega^{-1} \operatorname{Im} \lambda_j$ целые), перенумеруем невырожденные переменные таким образом, чтобы сначала шли переменные, у которых мнимые части собственных чисел положительны, затем те, у которых они отрицательны, а затем – переменные, отвечающие вещественным собственным числам. Отметим также то обстоятельство, что в таком блоке все числа $2\omega^{-1} \operatorname{Im} \lambda_j$ одновременно все четные или все нечетные, соответственно, все переменные, входящие в блок, либо не являются особыми, либо все они особые. Действительно, для двух чисел $\lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}$, относящихся к такому блоку, имеем

$$2\omega^{-1} \operatorname{Im} \lambda_{j_1} = 2\omega^{-1} \operatorname{Im} \lambda_{j_2} + 2(i\omega)^{-1}(\lambda_{j_1} - \lambda_{j_2}),$$

при этом второе слагаемое в правой части равенства очевидно четное, откуда следует указанное свойство.

В [1] мы рассматривали так называемые срезающие и слабо вырожденные преобразования, широко используемые В. Вазовым при изучении систем с одним нулевым собственным числом (см. [6]). Здесь мы также будем использовать подобные преобразования, несколько расширив их класс. Приведем соответствующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Срезающими преобразованиями* называются преобразования вида

$$y = S(\tilde{r})z, \quad y = S_1(x_1)z, \quad y = S_2(x_2)z, \quad (5)$$

где $S(\eta) = \text{diag}(\eta^{\delta_1}, \eta^{\delta_2}, \dots, \eta^{\delta_n})$, δ_q – рациональные числа, $S_j(\eta) = \text{diag}(\eta^{h_{1j}}, \eta^{h_{2j}}, \dots, \eta^{h_{nj}})$, h_{qj} – целые числа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Слабо вырожденным преобразованием* называется замена переменных вида

$$\tilde{r} = du^l, \quad y = T^*z = BVTz. \quad (6)$$

Здесь $B = S_1(x)S_2(x)$, $T = T(\tilde{r})$ является произведением конечного числа преобразований, одна часть которых является срезающими преобразованиями вида $S(\tilde{r})$, а другая часть – это близкие к тождественным преобразования класса C^∞ . Число l является натуральным числом, $d = \text{const} > 0$. Преобразование V имеет блочно-диагональную структуру, совпадающую со структурой матрицы $A(x)$, $V = \text{diag}(V_1, \dots, V_K)$. При этом для блоков, не включающих комплексно сопряженные уравнения (т.е. соответствующие числа $2\omega^{-1} \text{Im } \lambda_q$ не целые), V_j – тождественные преобразования, а для блоков, включающих комплексно сопряженные уравнения, преобразования V_j имеют вид

$$V_j = \text{diag}(e^{i\tilde{h}\alpha} E_1, e^{-i\tilde{h}\alpha} E_1, E_2), \quad \alpha = \arg x_1, \quad e^{i\alpha} = \frac{x_1}{\sqrt{\tilde{r}}},$$

$\tilde{h}$ – наименьшее из положительных чисел $h_q = \omega^{-1} \text{Im } \lambda_q$, относящихся к данному блоку. Здесь E_1, E_2 – единичные матрицы размеров, соответствующих группам комплексных и вещественных переменных рассматриваемого блока.

Отметим, что при преобразовании (6) переменная α остается неизменной, а вырожденные переменные преобразуются следующим образом

$$x_j = \sqrt{du^{l-1}} u_j, \quad u = u_1 u_2, \quad j = 1, 2.$$

Основным результатом относительно системы (4) является следующая теорема (аналог теоремы 2 из [1]).

ТЕОРЕМА 2. *Существует слабо вырожденное преобразование (6), приводящее систему (4) к следующей псевдонормальной форме:*

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_1(i\omega + i\psi(u) + b_1 u^p + c_1 u^{2p}), \\ \dot{u}_2 &= u_2(-i\omega - i\psi(u) + b_1 u^p + c_1 u^{2p}), \\ \dot{z} &= (A_0 + uA_1 + \dots + u^{p-1}A_{p-1} + u^p A_p)z. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $u = u_1 u_2$, $\psi(u) = \sum_{h=1}^p \psi_h u^h$, $\psi_1, \dots, \psi_p, b_1, c_1$ – вещественные числа, $A_0, A_1, \dots, A_{p-1}$ – постоянные диагональные матрицы, A_p – постоянная жорданова матрица, $p = 2ml$. При этом матрица A_p такова, что если числа $\lambda_{j_1}^h$ и $\lambda_{j_2}^h$, стоящие на

диагонали какой-либо матрицы A_h , $0 \leq h \leq p-1$, не равны друг другу, то соответствующие диагональные элементы жордановой матрицы A_p располагаются в ее разных жордановых клетках. Переменная $u = u_1 u_2$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{u} = 2(b_1 u^{p+1} + c_1 u^{2p+1}).$$

Число $|b_1|$ можно сделать равным любому заданному положительному числу за счет выбора d в преобразовании (6).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Конечные отрезки рядов Тейлора преобразований класса C^∞ , являющихся множителями T из теоремы 2, определяются конечными отрезками ряда Тейлора матрицы $A(x)$ системы (4). Общее количество множителей, составляющих преобразование T , также зависит только от конечного отрезка ряда Тейлора матрицы $A(x)$, длина которого зависит от m и n . Срезающие преобразования, входящие множителями в преобразование T , определяются отрезком ряда Тейлора матрицы $A(x)$, длина которого равна некоторому числу $m_1(m, n)$. Число l зависит только от n . Отметим также, что при $x \neq 0$ преобразование T из (6) является невырожденным класса C^∞ . Это же относится и к преобразованию V , если среди чисел $2\omega^{-1} \operatorname{Im} \lambda_q$ нет нечетных (нет особых переменных). В случае, когда среди целых чисел $2\omega^{-1} \operatorname{Im} \lambda_q$ есть нечетные (есть особые переменные), преобразование V будет разрывным в точках, где x_1 – вещественное положительное число, и невырожденным класса C^∞ во всех остальных точках, где $x \neq 0$.

Рассмотрим теперь систему, которая получится после применения к системе (2) преобразования, приводящего ее линейную часть (4) к виду (7). В случае отсутствия особых переменных система будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_1(i\omega + i\psi(u) + b_1 u^p + c_1 u^{2p}) + G_1(u_1, u_2, z), \\ \dot{u}_2 &= u_2(-i\omega - i\psi(u) + b_1 u^p + c_1 u^{2p}) + G_2(u_1, u_2, z), \\ \dot{z} &= (A_0 + uA_1 + \dots + u^{p-1}A_{p-1} + u^p A_p)z + F(u_1, u_2, z). \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$F(u_1, u_2, z) = u^{-h} F_1(u_1, u_2, z), \quad G_j(u_1, u_2, z) = u^{-h} G_{1j}(u_1, u_2, z),$$

$F_1(u_1, u_2, z)$, $G_{1j}(u_1, u_2, z)$ – функции класса C^∞ , ряды Тейлора которых представляют собой суммы резонансных мономов, нелинейных по z , $h > 0$ – целое число. Для того, чтобы избавиться от отрицательных степеней, сделаем замену $z = u^{h+1}w$. В результате этой замены в уравнениях системы (8) исчезнут отрицательные степени вырожденной переменной, а ряды Тейлора функций $F(u_1, u_2, z)$, $G_j(u_1, u_2, z)$ станут суммой нелинейных по z резонансных мономов, причем $F(0, 0, z) = 0$, $G_j(0, 0, z) = 0$. При этом в последних n уравнениях линейной (по невырожденным переменным) части системы появятся “лишние” члены порядка u^{2p} , однако, аналогично тому, как отмечено в доказательстве теоремы 2 из [1], эти члены можно убрать с помощью невырожденного бесконечно-гладкого преобразования. В случае наличия особых переменных в дополнение к указанным преобразованиям необходимо сделать замену $\alpha = 2\tilde{\alpha}$, после чего система приобретет указанную форму. Указанные выше замечания относительно гладкости (см. замечание 2) относятся и к данному преобразованию. Чтобы не загромождать изложение, будем считать, что полученная

система (8) уже имеет нужный вид. Систему (8), с учетом сделанных замечаний, будем называть *псевдонормальной формой* системы (1).

Приведение линейной части рассматриваемой системы к виду (7) открывает новые возможности для уточнения понятия резонанса. Начиная с этого момента, целесообразно на центральном многообразии перейти к полярным координатам

$$u_1 = re^{i\alpha}, \quad u_2 = re^{-i\alpha}.$$

Система уравнений (8) в новых координатах примет вид

$$\begin{aligned} \dot{r} &= b_1 r^{2p+1} + c_1 r^{4p+1} + H_1(r, \alpha, z), \\ \dot{\alpha} &= \omega + \psi(r^2) + H_2(r, \alpha, z), \\ \dot{z} &= (A_0 + r^2 A_1 + \dots + r^{2p} A_p)z + H(r, \alpha, z). \end{aligned} \quad (9)$$

При этом члены рядов Тейлора функций $F(u_1, u_2, z)$, $G_j(u_1, u_2, z)$ из системы (8) преобразуются в мономы вида $r^L e^{iK\alpha} z^s$, где $L \geq 0$, K – целые числа, а s – неотрицательные целочисленные наборы. Кроме того, мы используем стандартные обозначения, принятые в [1]: $z^s = z_1^{s_1} \dots z_n^{s_n}$, $s = (s_1, \dots, s_n)$, $s_1, \dots, s_n$ – неотрицательные целые числа, $|s|$ – вес набора s , $|s| = s_1 + \dots + s_n$. Указанные мономы удовлетворяют следующим резонансным соотношениям:

- $Ki\omega + (s, \lambda) = 0$, если моном входит в первое или второе уравнение системы;
- $Ki\omega + (s, \lambda) = \lambda_j$, если моном входит в уравнение с номером j , $3 \leq j \leq n+2$.

Отсюда, в частности, следует, что число K однозначно определяется набором s и номером j уравнения, в которое входит данный моном.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Уровнем резонансного монома $r^L e^{iK\alpha} z^s$, входящего в уравнение с номером j , $3 \leq j \leq n+2$, системы (9) называется такое целое число q , $0 \leq q \leq p-2$, для которого выполняются условия

$$(\tilde{s}, \lambda^h) = \lambda_{j-2}^h, \quad 0 \leq h \leq q, \quad (\tilde{s}, \lambda^{q+1}) \neq \lambda_{j-2}^{q+1}. \quad (10)$$

Здесь и ниже

$$\tilde{s} = (K, s_1, \dots, s_n), \quad \lambda^h = (\lambda_0^h, \lambda_1^h, \dots, \lambda_n^h), \quad 0 \leq h \leq p, \quad \lambda_0^h = i\psi_h, \quad \psi_0 = \omega.$$

Напомним, что λ_j^h , $1 \leq j \leq n$, – это диагональные элементы матриц A_h , $0 \leq h \leq p$.

Если при некотором j , $3 \leq j \leq n+2$ выполняются условия

$$(\tilde{s}, \lambda^h) = \lambda_{j-2}^h, \quad 0 \leq h \leq p-1, \quad (11)$$

то уровнем монома $r^L e^{iK\alpha} z^s$, входящего в уравнение с номером j , называется число $p-1$.

Если моном $r^L e^{iK\alpha} z^s$ входит в уравнения с номерами $j=1$ или $j=2$, то условия (10) и (11) заменяются, соответственно, на следующие:

$$(\tilde{s}, \lambda^h) = 0, \quad 0 \leq h \leq q, \quad (\tilde{s}, \lambda^{q+1}) \neq 0, \quad (12)$$

$$(\tilde{s}, \lambda^h) = 0, \quad 0 \leq h \leq p-1. \quad (13)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Мы будем говорить, что моном $r^L e^{iK\alpha} z^s$ является *устраняемым мономом*, если

- либо этот моном является мономом уровня q , $0 \leq q \leq p-2$, и $L \geq 2(q+1)$,
- либо данный моном является мономом уровня $p-1$, $L > 2p$, и выполняется неравенство $(\tilde{s}, \lambda^p) + b_1(L-2p) \neq \lambda_{j-2}^p$ (если моном входит в одно из уравнений системы с номером j , $3 \leq j \leq n+2$) или же неравенство $(\tilde{s}, \lambda^p) + b_1(L-4p-1) \neq 0$ (если моном входит в первое уравнение), а если моном входит во второе уравнение, то выполняется неравенство $(\tilde{s}, \lambda^p) + b_1(L-2p) \neq 0$.

Будем считать моном $r^L e^{iK\alpha} z^s$ *неустраняемым*, если он не является устранимым мономом.

Из последнего определения ясно, что все резонансные (в традиционном смысле) мономы z^s являются неустраняемыми.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из предыдущего определения следует, что при

$$L > 4p + 1 + |\tilde{s}| |b_1^{-1}| \max_{0 \leq j \leq n} |\lambda_j^p|$$

все мономы $r^L e^{iK\alpha} z^s$ являются устранимыми.

Рассмотрим формальную систему, аналогичную системе (9):

$$\begin{aligned} \dot{r} &= b_1 r^{2p+1} + c_1 r^{4p+1} + H_1^*(r, \alpha, z), \\ \dot{\alpha} &= \omega + \psi(r^2) + H_2^*(r, \alpha, z), \\ \dot{z} &= (A_0 + r^2 A_1 + \dots + r^{2p} A_p)z + H^*(r, \alpha, z). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь матрицы A_j , $1 \leq j \leq p$, такие же, как и в системе (9), $H_1^*(r, \alpha, z)$, $H_2^*(r, \alpha, z)$, $H^*(r, \alpha, z)$ – формальные ряды, члены которых являются резонансными мономерами вида $r^L e^{iK\alpha} z^s$, о которых шла речь в определении системы (9). Заметим, что в этих мономах $|s| > 1$. Для такой системы верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Для системы (14) существует близкое к тождественному формальное преобразование, приводящее ее к формальной системе следующего вида (для простоты мы сохраняем обозначения системы (14)):

$$\begin{aligned} \dot{r} &= b_1 r^{2p+1} + c_1 r^{4p+1} + \tilde{H}_1(r, \alpha, z), \\ \dot{\alpha} &= \omega + \psi(r^2) + \tilde{H}_2(r, \alpha, z), \\ \dot{z} &= (A_0 + r^2 A_1 + \dots + r^{2p} A_p)z + \tilde{H}(r, \alpha, z), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\tilde{H}_1$, $\tilde{H}_2$, $\tilde{H}$ – суть формальные ряды, члены которых являются неустраняемыми мономерами.

С учетом определения неустраняемых мономов слагаемые формальных рядов $\tilde{H}_1$, $\tilde{H}_2$, $\tilde{H}$ в системе (15) можно представить в виде $P(r, \alpha) z^s$, где $P(r, \alpha)$ будет являться конечной суммой мономов вида $r^L e^{iK\alpha}$, где $L \geq 0$, K – целые числа, причем максимальная степень L у этих мономов линейно зависит от $|s|$.

1. Примеры. В данном пункте мы проиллюстрируем доказательство теоремы 2 о приведении линейной (по невырожденным координатам) системы (4) к псевдонормальной форме. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(i\omega + x_1x_2) + f_1(x, y), \\ \dot{x}_2 &= x_2(-i\omega + x_1x_2) + f_2(x, y), \\ \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1 + g_{11}(x)y_1 + g_{12}(x)y_2 + g_1(x, y), \\ \dot{y}_2 &= \lambda_2 y_2 + g_{21}(x)y_1 + g_{22}(x)y_2 + g_2(x, y).\end{aligned}\tag{16}$$

Здесь переменные x_1 и x_2 , y_1 и y_2 попарно комплексно сопряжены, это же верно и для пары λ_1 и λ_2 , при этом комплексно сопряженным переменным соответствуют комплексно сопряженные уравнения. Кроме того, $f_l(x, 0) = g_{lj}(0) = 0$, $|g_l(x, y)| = o(\|y\|)$, $1 \leq l, j \leq 2$. Пусть $\lambda_1 = a + \beta i$, $\lambda_2 = a - \beta i$, $a \neq 0$, $\beta > 0$, $\omega > 0$.

В отличие от общего случая (см. систему (3)) мы считаем, что $\varphi(\tilde{r}) = 0$, $\tilde{b}(\tilde{r}) = \tilde{r}$. Отметим при этом, что все результаты остаются верными и в общем случае. Согласно теореме 1 без ограничения общности будем считать, что в данной системе ряды Тейлора функций в правых частях являются суммами резонансных мономов. Но резонансные мономы в последних двух уравнениях системы могут быть только линейными по невырожденным переменным, а в первых двух уравнениях таких резонансных мономов, относящихся к функциям $f_j(x, y)$, $j = 1, 2$, нет совсем. Следовательно, все функции $f_j(x, y)$, $g_j(x, y)$ являются плоскими. Но тогда, поскольку, согласно [5], формальная эквивалентность систем вида (16) означает их C^∞ -эквивалентность, можно считать указанные функции равными нулю. Итак, без ограничения общности будем полагать, что рассматриваемая система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(i\omega + x_1x_2), \\ \dot{x}_2 &= x_2(-i\omega + x_1x_2), \\ \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1 + g_{11}(x)y_1 + g_{12}(x)y_2, \\ \dot{y}_2 &= \lambda_2 y_2 + g_{21}(x)y_1 + g_{22}(x)y_2.\end{aligned}\tag{17}$$

Для мономов $x_1^p x_2^q$, входящих в ряд Тейлора функции $g_{12}(x)$, выполняется резонансное равенство $(p - q)i\omega + \lambda_2 = \lambda_1$. Аналогичное равенство верно и для $g_{21}(x)$. Следовательно, если число $(\lambda_1 - \lambda_2)/(i\omega)$ не является целым, то функции $g_{12}(x)$, $g_{21}(x)$ будут плоскими и можно считать (см. выше), что они равны нулю. В этом случае приведение системы (17) к системе вида (7) довольно элементарно и достигается невырожденным преобразованием класса C^∞ (см., например, лемму 2 из [8]).

Рассмотрим теперь случай, когда $h = (\lambda_1 - \lambda_2)/(i\omega) > 0$ – целое. Функции $g_{lj}(x)$, $1 \leq l, j \leq 2$, можно представить в следующем виде:

$$g_{ll}(x) = d_{ll}(\tilde{r}) + \gamma_{ll}(x), \quad g_{lj}(x) = x_l^h d_{lj}(\tilde{r}) + \gamma_{lj}(x), \quad l \neq j,$$

$\tilde{r} = x_1x_2$; $\gamma_{ll}(x)$, $\gamma_{lj}(x)$ – плоские функции, $d_{ll}(\tilde{r})$, $d_{lj}(\tilde{r})$ – функции класса C^∞ . Согласно [5] все функции $\gamma_{ll}(x)$, $\gamma_{lj}(x)$ можно считать равными нулю. Дополнительно заметим, что $d_{ll}(0) = 0$, $l = 1, 2$.

Ниже мы подробно разберем неособый случай, т.е. когда число h четное. Для особого случая мы в конце данного раздела ограничимся рассмотрением частного (но важного) примера системы (17).

Обозначим $\tilde{h} = h/2$ и сделаем следующую замену переменных:

$$y_1 = e^{i\tilde{h}\alpha}\nu_1, \quad y_2 = e^{i\tilde{h}\alpha}\nu_2, \quad \alpha = \arg x_1, \quad e^{i\alpha} = \frac{x_1}{\sqrt{\tilde{r}}}. \quad (18)$$

Переменная α удовлетворяет уравнению $\dot{\alpha} = \omega$. Отметим, что данное преобразование невырожденно при $\tilde{r} \neq 0$.

Первые два уравнения системы (17) не изменятся, а последние два примут вид

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= a\nu_1 + d_{11}(\tilde{r})\nu_1 + \tilde{r}^{\tilde{h}}d_{12}(\tilde{r})\nu_2, \\ \dot{\nu}_2 &= a\nu_2 + \tilde{r}^{\tilde{h}}d_{21}(\tilde{r})\nu_1 + d_{22}(\tilde{r})\nu_2. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь $a = \operatorname{Re} \lambda_1$, $d_{22}(\tilde{r}) = \overline{d_{11}(\tilde{r})}$, $d_{21}(\tilde{r}) = \overline{d_{12}(\tilde{r})}$. Переменная $\tilde{r}$ удовлетворяет уравнению $\dot{\tilde{r}} = 2\tilde{r}^2$. В полученной системе рассмотрим два случая. Первый, когда $\tilde{h} > 1$, и второй, когда $\tilde{h} = 1$.

В первом случае систему уравнений (19) можно записать в виде

$$\dot{\nu} = (aE + \tilde{r}B_1 + \tilde{r}^2B_2(\tilde{r}))\nu, \quad B_2(\tilde{r}) \in C^\infty. \quad (20)$$

Здесь B_1 – постоянная диагональная матрица, диагональные элементы которой – это числа $d'_{11}(0)$ и $d'_{22}(0) = \overline{d'_{11}(0)}$. Рассмотрим вспомогательную систему

$$\dot{\nu}^1 = (B_1 + r^1B_2(\tilde{r}^1))\nu^1, \quad \dot{r}^1 = 2r^1. \quad (21)$$

Поскольку разность чисел $d'_{11}(0)$ и $d'_{22}(0)$ не равняется целому отличному от нуля числу, у приведенной системы нет резонансных членов. Следовательно, существует невырожденное преобразование

$$\nu_1 = H(r^1)z^1, \quad H(r^1) \in C^\infty, \quad (22)$$

приводящее систему (21) к виду

$$\dot{z}^1 = B_1z^1, \quad \dot{r}^1 = 2r^1.$$

Но тогда такое же преобразование

$$\nu = H(\tilde{r})z$$

приводит систему (20) к нормальной форме

$$\dot{z} = (aE + \tilde{r}B_1)z. \quad (23)$$

Случай $\tilde{h} > 1$ разобран.

Если $\tilde{h} = 1$, то система (19) приобретает вид (20), где собственные числа матрицы B_1 могут отличаться на целое не равное нулю число. Если это так, то указанные собственные числа будут вещественными и, соответственно, жорданова форма матрицы B_1 будет также вещественной. Переходя в системе (20) к вещественным координатам и приводя матрицу B_1 к жордановой форме, получаем вещественную систему

$$\dot{u} = (aE + \tilde{r}\tilde{B}_1 + \tilde{r}^2\tilde{B}_2(\tilde{r}))u, \quad \tilde{B}_2(\tilde{r}) \in C^\infty, \quad (24)$$

в которой матрица $\tilde{B}_1$ диагональна, причем разность ее диагональных элементов равна целому числу. В этой ситуации целесообразно использовать срезающие преобразования вида

$$u = P(\tilde{r})u^1,$$

где

$$P(\tilde{r}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{r} \end{pmatrix}$$

или

$$P(\tilde{r}) = \begin{pmatrix} \tilde{r} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

с помощью которых можно добиться того, чтобы у матрицы $\tilde{B}_1$ в системе (24) не было собственных значений, отличающихся на целое число (см. [6]). Предполагая, что это условие выполнено, с помощью невырожденного преобразования вида $u = H(\tilde{r})u^1$, $H(\tilde{r}) \in C^\infty$ с вещественной матрицей $H(\tilde{r})$ система (24) приводится к виду $\dot{u}^1 = (aE + \tilde{r}B_1)u^1$, чем заканчивается рассмотрение случая $\tilde{h} = 1$. Таким образом, утверждение теоремы 2 доказано для системы (16).

Рассмотрим теперь особый случай, когда число $h = 2\omega^{-1} \operatorname{Im} \lambda_1$ нечетное. Следующая система представляет собой простейший пример такого вида, где $h = 1$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(i\omega + x_1x_2), \\ \dot{x}_2 &= x_2(-i\omega + x_1x_2), \\ \dot{y}_1 &= \lambda y_1 + x_1y_2, \\ \dot{y}_2 &= \bar{\lambda} y_2 + x_2y_1, \end{aligned}$$

где $\omega = 2 \operatorname{Im} \lambda$.

Замена переменных $y_1 = \sqrt{e^{ih\alpha}} \nu_1$, $y_2 = \sqrt{e^{-ih\alpha}} \nu_2$ приводит уравнения для невырожденных переменных к виду

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= a\nu_1 + \sqrt{\tilde{r}}\nu_2, \\ \dot{\nu}_2 &= a\nu_2 + \sqrt{\tilde{r}}\nu_1, \quad a = \operatorname{Re} \lambda. \end{aligned}$$

Основная неприятность заключается в том, что данное преобразование разрывно в точках, где x_1 является вещественным положительным числом.

Очевидно, что путем перехода к вещественным координатам полученная система приводится к диагональному виду и, следовательно, исходная система приобретает псевдонормальную форму.

2. Доказательство основной теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Рассмотрим прежде всего формальную систему, соответствующую системе (4). Для простоты сохраним обозначения системы (4) и не будем пока делать различий между системой (4) и ее формальным аналогом. Остановимся подробно на отношении эквивалентности переменных и соответствующих уравнений, о котором упоминалось во введении. Если нет каких-либо оговорок, то далее речь будет идти об уравнениях для невырожденных переменных. Разобьем

эти переменные и соответствующие им уравнения в системе (4) на отдельные группы по указанному во введении принципу эквивалентности, а именно, в одну группу относим переменные (и соответствующие уравнения) y_j и y_l , если $(\lambda_j - \lambda_l)/(i\omega)$ целое число. Переменные (и соответствующие элементы спектра λ_j), входящие в одну группу, будем называть *эквивалентными* и обозначать это знаком $\approx$ (такое отношение эквивалентности было также использовано в [5]). Заметим, что если $y_j \approx y_l \approx \bar{y}_j$, то $\bar{y}_l \approx y_l$. В этом случае числа $2\omega^{-1} \operatorname{Im} \lambda_j$, $2\omega^{-1} \operatorname{Im} \lambda_l$ являются целыми. Если $y_j \approx y_l$ и y_l вещественно ($y_l = \bar{y}_j$), то $y_j \approx \bar{y}_j$. В этом случае целым будет число $\omega^{-1} \operatorname{Im} \lambda_j$. Очевидно, что для группы эквивалентных переменных y_j числа $\operatorname{Re} \lambda_j$ равны между собой (но разные, вообще говоря, для разных групп). Отметим также, что в группе эквивалентных переменных либо все переменные являются особыми, либо все не особые (см. введение).

Рассмотрим уравнения для какой-либо группы эквивалентных переменных. Они образуют автономную подсистему системы (4), т.е. в правые части уравнений для этих переменных входят только переменные этой же группы (речь идет о формальной системе). За счет подходящей нумерации переменных считаем, что в (4) жорданова матрица $A(0)$ имеет блочно диагональный вид $A(0) = \operatorname{diag}(J_1, J_2, J_3)$, где $J_2 = \bar{J}_1$ – жорданова матрица порядка L и $J_3 = \bar{J}_3$ – жорданова матрица порядка M , $\lambda_{j+L} = \bar{\lambda}_j$, $1 \leq j \leq L$, $\operatorname{Re} \lambda_j = a$, $1 \leq j \leq 2L + M$, при этом предполагаем, что $\operatorname{Im} \lambda_{j+1} \geq \operatorname{Im} \lambda_j > 0$, $1 \leq j \leq L - 1$. Пусть $a_{jl}(x)$ – элементы матрицы $A(x) - A(0)$, а $\hat{a}_{jl}(x)$ – элементы соответствующей формальной матрицы. Представим слагаемые $x_1^{h_1} x_2^{h_2}$, являющиеся элементами ряда $\hat{a}_{jl}(x)$, $1 \leq j, l \leq L$, в виде $x_1^{h_1} x_2^{h_2} = (x_1 x_2)^{h_1} x_2^{h_2 - h_1}$. С учетом резонансного равенства $\lambda_j = (h_1 - h_2)i\omega + \lambda_l$ получаем, что $h_2 - h_1 = (\lambda_l - \lambda_j)/(i\omega)$. Введем в рассмотрение целые числа

$$\alpha_j = \frac{\lambda_j - \lambda_1}{i\omega}, \quad 1 \leq j \leq L. \quad (25)$$

Отсюда следует, что функции $\hat{a}_{jl}(x)$, $1 \leq j, l \leq L$, могут быть представлены в виде

$$\hat{a}_{jl}(x) = \tilde{b}_{jl}(\tilde{r}) x_2^{\alpha_l - \alpha_j}, \quad 1 \leq j, l \leq L, \quad \tilde{r} = x_1 x_2.$$

Рассуждая аналогичным образом, получаем следующее представление для функций $\hat{a}_{jL+l}(x)$, $1 \leq j, l \leq L$:

$$\hat{a}_{jL+l}(x) = \hat{b}_{jL+l}(\tilde{r}) x_1^{\alpha_l + \alpha_j + 2\tilde{h}}, \quad \tilde{h} = \omega^{-1} \operatorname{Im} \lambda_1$$

и для функций $\hat{a}_{j2L+l}(x)$, $1 \leq j \leq L$, $1 \leq l \leq M$:

$$\hat{a}_{j2L+l}(x) = \hat{b}_{j2L+l}(\tilde{r}) x_1^{\alpha_j + \tilde{h}}.$$

Заметим, что при наличии в системе вещественных переменных ($M > 0$) число $\tilde{h}$ является целым. С учетом комплексной сопряженности соответствующих переменных имеем

$$\begin{aligned} \hat{a}_{L+jl}(x) &= \overline{\hat{b}_{jL+l}(\tilde{r})} x_2^{\alpha_l + \alpha_j + 2\tilde{h}}, & 1 \leq j, l \leq L, \\ \hat{a}_{L+jL+l}(x) &= \overline{\hat{b}_{jl}(\tilde{r})} x_1^{\alpha_l - \alpha_j}, & 1 \leq j, l \leq L, \\ \hat{a}_{L+j2L+l}(x) &= \overline{\hat{b}_{j2L+l}(\tilde{r})} x_2^{\alpha_j + \tilde{h}}, & 1 \leq j \leq L, \quad 1 \leq l \leq M. \end{aligned}$$

Для функций $\widehat{a}_{2L+jl}(x)$, $1 \leq j \leq M$, аналогичное представление имеет вид

$$\begin{aligned}\widehat{a}_{2L+jl}(x) &= \widehat{b}_{2L+jl}(\tilde{r})x_2^{\alpha_l+\tilde{h}}, & 1 \leq l \leq L, \\ \widehat{a}_{2L+jL+l}(x) &= \overline{\widehat{b}_{2L+jl}(\tilde{r})}x_1^{\alpha_l+\tilde{h}}, & 1 \leq l \leq L, \\ \widehat{a}_{2L+j2L+l}(x) &= \overline{\widehat{a}_{2L+j2L+l}(x)} = \widehat{b}_{2L+j2L+l}(\tilde{r}), & 1 \leq l \leq M.\end{aligned}$$

С учетом высказанного во введении замечания о переходе от формальных функций к их реальным прообразам без ограничения общности будем считать, что аналогичные представления верны и для функций $a_{jl}(x)$.

Сделаем следующую замену переменных:

$$\begin{aligned}y_j &= x_2^{-\alpha_j}\nu_j, & y_{L+j} &= x_1^{-\alpha_j}\nu_{L+j}, & 1 \leq j \leq L, \\ & & y_{2L+j} &= \nu_{2L+j}, & 1 \leq j \leq M.\end{aligned}\tag{26}$$

Система приобретет следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{\nu}^1 &= \Lambda_1\nu^1 + B_{11}(\tilde{r})\nu^1 + x_1^{2\tilde{h}}B_{12}(\tilde{r})\nu^2 + x_1^{\tilde{h}}B_{13}(\tilde{r})\nu^3, \\ \dot{\nu}^2 &= \Lambda_2\nu^2 + x_2^{2\tilde{h}}\overline{B_{12}(\tilde{r})}\nu^1 + \overline{B_{11}(\tilde{r})}\nu^2 + x_2^{\tilde{h}}\overline{B_{13}(\tilde{r})}\nu^3, \\ \dot{\nu}^3 &= \Lambda_3\nu^3 + x_2^{\tilde{h}}B_{31}(\tilde{r})\nu^1 + x_1^{\tilde{h}}\overline{B_{31}(\tilde{r})}\nu^2 + B_{33}(\tilde{r})\nu^3.\end{aligned}\tag{27}$$

Здесь ν^1 – вектор, координаты которого – невырожденные переменные, отвечающие собственным числам с положительной мнимой частью, $\nu^2 = \bar{\nu}^1$, ν^3 – вектор с вещественными координатами, Λ_1 – жорданова матрица, структура которой совпадает со структурой матрицы J_1 , а на диагонали стоит число λ_1 , $\Lambda_2 = \bar{\Lambda}_1$, $\Lambda_3 = J_3$, $B_{jl}(\tilde{r}) \in C^\infty$. Отметим также, что элементы матриц $B_{11}(0)$, $B_{33}(0)$, находящиеся на их главной диагонали и под ней, равны нулю.

Отметим, что схожие преобразования использовались в [5], однако в указанной работе, в отличие от нашего подхода, не было необходимости в соблюдении принципа вещественности.

Сделаем в полученной системе еще одну замену переменных:

$$\nu^1 = e^{i\tilde{h}\alpha}w^1, \quad \nu^2 = e^{-i\tilde{h}\alpha}w^2, \quad \nu^3 = w^3, \quad \alpha = \arg x_1, \quad e^{i\alpha} = \frac{x_1}{\sqrt{\tilde{r}}}.\tag{28}$$

Отметим, что если $\tilde{h}$ целое, то данное преобразование невырожденно и принадлежит классу C^∞ при $\tilde{r} \neq 0$. В результате система (27) примет вид

$$\begin{aligned}\dot{w}^1 &= \tilde{\Lambda}_1w^1 + \tilde{B}_{11}(\tilde{r})w^1 + \tilde{r}^{\tilde{h}}B_{12}(\tilde{r})w^2 + (\sqrt{\tilde{r}})^{\tilde{h}}B_{13}(\tilde{r})w^3, \\ \dot{w}^2 &= \tilde{\Lambda}_2w^2 + \tilde{r}^{\tilde{h}}\overline{B_{12}(\tilde{r})}w^1 + \overline{\tilde{B}_{11}(\tilde{r})}w^2 + (\sqrt{\tilde{r}})^{\tilde{h}}\overline{B_{13}(\tilde{r})}w^3, \\ \dot{w}^3 &= \Lambda_3w^3 + (\sqrt{\tilde{r}})^{\tilde{h}}B_{31}(\tilde{r})w^1 + (\sqrt{\tilde{r}})^{\tilde{h}}\overline{B_{31}(\tilde{r})}w^2 + B_{33}(\tilde{r})w^3.\end{aligned}$$

Здесь $\tilde{\Lambda}_1$ – жорданова матрица, структура которой совпадает со структурой матрицы J_1 , а на диагонали стоит число $a = \operatorname{Re} \lambda_1$, $\tilde{\Lambda}_2 = \bar{\tilde{\Lambda}}_1$, $\Lambda_3 = J_3$, $\tilde{B}_{11}(\tilde{r}) \in C^\infty$. Элементы матрицы $\tilde{B}_{11}(0)$, находящиеся на ее главной диагонали и под ней, равны нулю.

Таким образом, полученная система может быть представлена в следующем виде:

$$\dot{w} = Jw + C(\sqrt{\tilde{r}})w, \quad (29)$$

где J – жорданова матрица, имеющая ту же структуру, что и матрица $A(0)$ в системе (4), с тем лишь отличием, что на диагонали матрицы J стоит число $a = \operatorname{Re} \lambda_1$. Матрица $C = C(\sqrt{\tilde{r}})$ имеет такую же блочную структуру, что и матрица $A(x)$:

$$\begin{aligned} C &= (C_{jl}), & C_{jl} &= C_{jl}(\sqrt{\tilde{r}}), & 1 \leq j, l \leq 3, & & C_{21} &= \overline{C}_{12}, \\ C_{22} &= \overline{C}_{11}, & C_{23} &= \overline{C}_{13}, & C_{32} &= \overline{C}_{31}, & C_{33} &= \overline{C}_{33}. \end{aligned}$$

Все элементы матрицы $C(\eta)$ принадлежат классу C^∞ . При этом элементы матрицы $C(0)$, находящиеся на ее главной диагонали и под ней, все равны нулю, так что все собственные числа матрицы $J + C(0)$ равны $a = \operatorname{Re} \lambda_1$. Итак, преобразование для автономной системы эквивалентных переменных практически завершено. Остается только заметить, что жорданова матрица J в (29) не совсем типична. Она вещественна, в то время как переменные w_j , $1 \leq j \leq 2L$, комплексные. Поэтому целесообразно перейти от системы (29) к соответствующей вещественной системе.

Заметим, что если комплексно сопряженные переменные не являются эквивалентными, то они преобразовываются по формулам, аналогичным (26), где $M = 0$, после чего видно, что правая часть системы (27) будет зависеть только от $\tilde{r}$ и преобразование (28) не требуется, так как мы получим систему вида (29).

Теперь можно к полученной системе применить методы, представленные в работе [1] (см. теорему 2 из [1]), а именно, построить слабо вырожденное преобразование

$$\tilde{r} = du^l, \quad w = T(\tilde{r})z, \quad (30)$$

в результате которого система (29) приводится к псевдонормальной форме (7) (описание преобразования (30) см. во введении). Теорема 2 доказана.

3. Формальная псевдонормальная форма, состоящая из неустранимых мономов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Отметим прежде всего, что ряды $H^*(r, \alpha, z)$, $H_1^*(r, \alpha, z)$, $H_2^*(r, \alpha, z)$ в системе (14) состоят из мономов вида $r^L e^{iK\alpha} z^s$, $r^L e^{iK\alpha} z^s$ и $r^{L-1} e^{iK\alpha} z^s$, соответственно, где $L \geq 1$, K – целые числа. При этом, как отмечалось во введении, число K однозначно зависит от набора s и номера уравнения, в которое входит рассматриваемый моном.

Следующие рассуждения в значительной мере повторяют те, что использованы в доказательстве теоремы 3 в [1], поэтому ограничимся изложением основных моментов.

Отметим прежде всего, что мономы $cu_1^p u_2^q z^s$, являющиеся членами рядов Тейлора функций $F(u_1, u_2, z)$ системы (8), после перехода к полярным координатам, примут вид $cr^L e^{iK\alpha} z^s$, где $L = p + q$, $K = p - q$. Аналогичные мономы первого и второго уравнений в (8) преобразуются следующим образом: в уравнении для переменной r

$$r^L (A e^{i(K-1)\alpha} z^s + \overline{A} e^{-i(K-1)\alpha} \overline{z}^s), \quad A = \frac{c}{2}, \quad (31)$$

в уравнении для переменной α

$$r^{L-1}(Be^{i(K-1)\alpha}z^s - \bar{B}e^{-i(K-1)\alpha}\bar{z}^s), \quad B = \frac{c}{2i}. \quad (32)$$

Указанные мономы будут являться слагаемыми соответствующих формальных сумм в системе (14). При этом, как отмечалось во введении, число K однозначно зависит от набора s и номера уравнения, в которое входит рассматриваемый моном.

Для устранимых мономов $r^L e^{iK\alpha} z^s$, входящих в уравнение с номером $3 \leq j \leq n+2$, уровень которых $q \leq p-2$ и $L > 2(q+1)$, делаем преобразование

$$z_j = w_j + d_j r^{L-2(q+1)} e^{iK\alpha} w^s, \quad (33)$$

где

$$d_j = \frac{c_j}{(\tilde{s}, \lambda^{q+1}) - \lambda_{j-2}^{q+1}},$$

c_j – коэффициент, с которым указанный моном входит в соответствующее уравнение. Для аналогичных мономов, входящих в первые два уравнения системы, преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} r &= r_1 + r_1^{L-2(q+1)} (d_1 e^{iK\beta} w^s + \bar{d}_1 e^{-iK\beta} \bar{w}^s), \\ \alpha &= \beta + r_1^{L-1-2(q+1)} (d_2 e^{iK\beta} w^s - \bar{d}_2 e^{-iK\beta} \bar{w}^s), \\ d_1 &= \frac{A}{(\tilde{s}, \lambda^{q+1})}, \quad d_2 = \frac{B}{(\tilde{s}, \lambda^{q+1})}. \end{aligned}$$

Если уровень q указанных устранимых мономов равен $p-1$, то замены переменных сохраняют вид, но коэффициенты d_j выглядят несколько иначе:

$$\begin{aligned} d_j &= \frac{c_j}{(\tilde{s}, \lambda^p) - \lambda_{j-2}^p + b_1(L-2p)}, \quad 3 \leq j \leq n+2, \\ d_1 &= \frac{A}{(\tilde{s}, \lambda^p) + b_1(L-4p-1)}, \quad d_2 = \frac{B}{(\tilde{s}, \lambda^p) + b_1(L-2p-1)}. \end{aligned}$$

Очевидно, что при указанных преобразованиях выполняется условие вещественности (см. введение, замечание 1).

Доказательство теоремы завершается повторением рассуждений, использованных при доказательстве аналогичной теоремы 3 из [1]. Теорема доказана.

Автор выражает искреннюю благодарность А. Д. Брюно за полезные обсуждения вопросов, связанных с проблематикой данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. С. Самовол, “О новых резонансах и нормальной форме автономных систем с одним нулевым корнем”, *Матем. заметки*, **88**:1 (2010), 63–77.
- [2] А. Д. Брюно, *Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений*, М., Наука, 1979.
- [3] А. Д. Брюно, “Аналитическая форма дифференциальных уравнений”, *Тр. ММО*, **25**, ГИФМЛ, М., 1971, 119–262.

- [4] В. С. Самовол, “Эквивалентность систем дифференциальных уравнений в окрестности особой точки”, Тр. ММО, **44**, ГИФМЛ, М., 1982, 213–234.
- [5] Г. Р. Белицкий, “Гладкая эквивалентность ростков векторных полей с одним нулевым или парой чисто мнимых собственных значений”, *Функц. анализ и его прил.*, **20**:4 (1986), 1–8.
- [6] В. Вазов, *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1968.
- [7] А. Н. Кузнецов, “Дифференцируемые решения вырождающихся систем обыкновенных уравнений”, *Функц. анализ и его прил.*, **6**:2 (1972), 41–51.
- [8] В. С. Самовол, “Конечно-гладкая нормальная форма автономной системы с двумя чисто мнимыми корнями”, *Матем. заметки*, **80**:2 (2006), 270–281.
- [9] А. Д. Брюно, В. Ю. Петрович, *Нормальные формы системы ОДУ*, Препринт № 18, ИПМ РАН, 2000.

В. С. Самовол

Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, Москва

E-mail: 555svs@mail.ru

Поступило

06.10.2011