Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Х. Арансон, Е. В. Жужома, О свойствах абсолюта, влияющих на гладкость потоков на замкнутых поверхностях, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 6, 819–829

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1004>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 17:54:02

УДК 517.917+513.9

О СВОЙСТВАХ АБСОЛЮТА, ВЛИЯЮЩИХ НА ГЛАДКОСТЬ ПОТОКОВ НА ЗАМКНУТЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

С. Х. Арансон, Е. В. Жужома

Пусть M_g^2 – замкнутая ориентируемая поверхность рода $g \geq 2$, наделенная структурой риманова многообразия постоянной отрицательной кривизны. Для универсальной накрывающей $\bar{M}$ имеется понятие абсолюта, каждая точка которого определяет асимптотическое направление пучка параллельных сонаправленных геодезических. В статье доказывается существование на абсолюте континуального множества U_g такого, что если произвольный поток на M_g^2 имеет полутраекторию, накрывающая для которой имеет асимптотическое направление, определяемое точкой из U_g , то данный поток не является аналитическим и имеет бесконечное множество точек покоя.

Библиография: 22 названия.

Введение. Везде далее M – замкнутая ориентируемая поверхность (двумерное замкнутое многообразие) неположительной эйлеровой характеристики $\chi(M) \leq 0$. Универсальная накрывающая $\bar{M}$ для M есть либо евклидова плоскость $\mathbb{R}^2$ (в этом случае $\chi(M) = 0$ и M является тором T^2 замкнутой ориентируемой поверхностью рода $g = 1$), либо плоскость Лобачевского Δ (в этом случае $\chi(M) < 0$ и M является замкнутой ориентируемой поверхностью M_g^2 рода $g \geq 2$). Обозначим через $\pi: \bar{M} \rightarrow M$ универсальное (неразветвленное) накрытие, которое индуцирует на M структуру риманова многообразия постоянной кривизны. Направленный пучок параллельных геодезических на $\bar{M}$ в одной из указанных геометрий (евклидовой или гиперболической) определяет точку так называемого абсолюта (см. точное описание для поверхности M_g^2 рода $g \geq 2$ в п. 1), и наоборот, каждая точка абсолюта определяет направленный пучок параллельных геодезических [1]. Обозначим абсолют через S_∞ . (Для наблюдателя, “стоящего” на $\bar{M}$, множество S_∞ представляет собой “горизонт”.) Универсальную накрывающую $\bar{M}$ можно пополнить точками абсолюта S_∞ и ввести топологию на $\bar{M} \cup S_\infty$ так, чтобы $\bar{M} \cup S_\infty$ было гомеоморфно замкнутому диску с границей S_∞ , гомеоморфной окружности.

Пусть f^t – поток на M . Для f^t существует накрывающий поток $\bar{f}^t$ на $\bar{M}$. Вопрос о том, как могут уходить в бесконечность полутраектории потока $\bar{f}^t$, является одним из вопросов проблемы Аносова–Вайля (см. обзоры [2], [3] и [4, гл. 10], где приведена обширная библиография по данной тематике). В самом общем смысле под проблемой Аносова–Вайля понимается исследование асимптотических свойств поднятий кривых без самопересечений на универсальной накрывающей и “сравнение” этих кривых (в определенном смысле) с линиями постоянной геодезической кривизны, которые имеют то же самое асимптотическое направление, что и исследуемые кривые.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00230, и фонда INTAS, грант № 97-1843.

Пусть $l^{(\cdot)}$ – полутраектория потока f^t и $\bar{l}^{(\cdot)}$ – накрывающая ее полутраектория потока $\bar{f}^t$ на $\bar{M}$. Для определенности будем считать полутраектории положительными, т.е. $l^{(\cdot)} = l^+$, $\bar{l}^{(\cdot)} = \bar{l}^+$. Если l^+ стремится ровно к одной точке $\sigma \in S_\infty$ (точные формулировки см. в п. 1), то будем говорить, что $\bar{l}^+$ имеет асимптотическое направление σ , а точка σ достижима потоком $\bar{f}^t$. Позволяя себе некоторую вольность, будем также говорить, что поток f^t достигает точку σ .

Точка $\sigma \in S_\infty$ называется (просто) достижимой, если существует поток на M такой, что у накрывающего потока имеется полутраектория, стремящаяся к σ .

Если поверхность M является тором T^2 , то все точки абсолюта достижимы. Для каждой точки σ абсолюта можно построить аналитический поток f^t с накрывающим $\bar{f}^t$ на $\mathbb{R}^2$ такой, что σ достижима потоком $\bar{f}^t$ и f^t имеет конечное (возможно, пустое) множество точек покоя. Для поверхности M , которая является замкнутой ориентируемой поверхностью M_g^2 рода $g \geq 2$, ситуация, в некотором смысле, прямо противоположная. Во-первых, не все точки абсолюта достижимы [5]. Во-вторых, некоторые достижимые точки влияют на гладкость потока и мощность множества точек покоя. Следующая теорема, доказанная в п. 2, является основным результатом данной статьи.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть M_g^2 – замкнутая ориентируемая поверхность рода $g \geq 2$ с универсальной накрывающей Δ и абсолютом S_∞ . Тогда существует континуальное множество достижимых точек $U_g \subset S_\infty$ со следующим свойством: если произвольный поток f^t достигает точку из U_g , то поток f^t не аналитический и имеет бесконечное множество точек покоя.

Отметим, что в силу теоремы из работы [6] о сглаживании потока для любой точки из U_g существует поток f^t класса гладкости C^∞ , удовлетворяющий условию теоремы 2.1.

1. Основные определения.

Плоскость Лобачевского. Обозначим через Δ плоскость Лобачевского (или гиперболическую плоскость), взяв в качестве модели единичный диск $|z| < 1$ комплексной z -плоскости, наделенный метрикой, которая индуцируется формой $ds = 2|dz|/(1 - |z|^2)$. Мы также будем иногда рассматривать Δ как единичный диск евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Обозначим через $\bar{d}_E(\cdot, \cdot)$ (соответственно $\bar{d}_{NE}(\cdot, \cdot)$) евклидову (соответственно неевклидову) метрику на Δ . Окружность $S_\infty = \partial\Delta = (|z| = 1)$ называется абсолютом или окружностью в бесконечности. Геodesическими в плоскости Δ являются открытые дуги евклидовых окружностей, ортогональные абсолюту S_∞ . Как правило, мы будем предполагать, что геodesические имеют ориентацию и их идеальные концевые точки лежат на S_∞ . Для геodesической $\bar{g} \subset \Delta$ начальная концевая точка обозначается через $\sigma^-(\bar{g})$, конечная – через $\sigma^+(\bar{g})$.

Известно, что любую замкнутую ориентируемую поверхность $M = M_g^2$ рода $g \geq 2$ можно представить в виде факторпространства Δ/Γ , где Γ – дискретная подгруппа сохраняющих ориентацию гиперболических изометрий, изоморфная фундаментальной группе поверхности M . Естественная проекция $\pi: \Delta \rightarrow \Delta/\Gamma \cong M$ является универсальным накрытием. Каждая изометрия $\gamma \in \Gamma$ есть дробно-рациональное преобразование комплексной плоскости с двумя неподвижными точками $\gamma^+, \gamma^- \in S_\infty$. Точка $\sigma \in S_\infty$ называется рациональной (относительно группы Γ), если $\sigma = \gamma^\pm$ для некоторого элемента $\gamma \in \Gamma$. Точка абсолюта, отличная от рациональной, называется иррациональной.

Два подмножества плоскости $\Delta \cup S_\infty$ называются конгруэнтными, если одно переводится в другое преобразованием из группы Γ .

Достижимые точки абсолюта. Рассмотрим на M параметризованную непрерывную кривую $l = \{m(t) \in M : t \geq 0\}$ с начальной точкой $m(0)$ и бесконечную в одном направлении (так как параметр принимает значения из промежутка $[0, +\infty)$, то это направление удобно называть *положительным*). Если l – замкнутая кривая, то будем считать ее простой. Если l – незамкнутая кривая, то будем считать ее без самопересечений. Для удобства в обоих случаях (замкнутой и незамкнутой кривой) будем называть l *кривой без самопересечений*. Типичными примерами кривых без самопересечений, которые понадобятся нам в дальнейшем, являются одномерные полутраектории потоков и одномерные полуслои слоений.

Пусть $\bar{l} = \{\bar{m}(t) : t \geq 0\}$ – поднятие кривой l на Δ (это означает, что $\bar{l}$ является компонентой множества $\pi^{-1}(l)$). Очевидно, $\bar{l}$ является параметризованной непрерывной кривой, бесконечной в положительном направлении. Отметим, что l имеет счетное множество поднятий и все поднятия попарно конгруэнтны. Выбор поднятия будет либо ясен из контекста, либо произвольный.

Будем говорить, что кривая $\bar{l}$ *уходит в бесконечность*, если

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{d}_{NE}(m_0, \bar{m}(t)) = +\infty.$$

Уходящая в бесконечность кривая стремится в евклидовой метрике к абсолюту. Если $\bar{l}$ стремится ровно к одной точке $\sigma \in S_\infty$ (т.е. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{d}_E(\sigma, \bar{m}(t)) = 0$), то будем говорить, что *кривая $\bar{l}$ имеет асимптотическое направление σ* , а точка σ называется *достижимой* для кривой $\bar{l}$. Ясно, что если одно из поднятий l имеет асимптотическое направление, то любое другое ее поднятие также имеет асимптотическое направление. Поэтому мы будем говорить в этом случае, что кривая l (на поверхности) имеет асимптотическое направление.

Обозначим через $A \subset S_\infty$ множество точек, достижимых всевозможными поднятиями кривых без самопересечений, бесконечных в одном направлении и имеющих асимптотическое направление.

Для любого потока f^t (соответственно слоения $\mathcal{F}$) на поверхности M_g^2 существует накрывающий поток $\bar{f}^t$ (соответственно накрывающее слоение $\bar{\mathcal{F}}$) на Δ . Обозначим через $A_{\text{fl}} \subset S_\infty$ (соответственно $A_{\text{fol}} \subset S_\infty$) множество точек, достижимых всевозможными поднятиями полутраекторий (соответственно полуслоев), имеющих асимптотическое направление, всевозможных потоков (соответственно слоений) на поверхности M_g^2 . Имеют место включения

$$A_{\text{fl}} \subset A_{\text{fol}} \subset A.$$

Первое включение выполняется, поскольку одномерные траектории образуют слоение (в силу теоремы о выпрямлении, см., например, [7]) на дополнении к множеству точек покоя. Второе включение справедливо, поскольку любой одномерный слой является кривой без самопересечений. Согласно [8, теорема 7] любая кривая без самопересечений аппроксимируется траекторией некоторого потока. Отсюда получаем

$$A_{\text{fl}} = A_{\text{fol}} = A.$$

В каждом из множеств A_{fl} , A_{fol} мы выделим собственные подмножества ORA , RA соответственно. Сперва напомним некоторые определения. Пусть на поверхности M задан поток f^t . Положительная (отрицательная) полутраектория $l^{+(-)}$ потока f^t называется *ω -рекуррентной* (*α -рекуррентной*), если она содержится в собственном ω -предельном

(α -предельном) множестве. Траектория называется *рекуррентной*, если обе ее положительная и отрицательная полутраектории ω - и α -рекуррентны соответственно. Рекуррентная траектория или полутраектория называется *нетривиальной*, если она отлична от точки покоя и периодической траектории. Полностью аналогично определяются соответствующие понятия для слоев и полуслоев слоений (основные определения теории слоений на поверхностях см., например, в [9]).

В силу [10] поднятие любой нетривиально рекуррентной полутраектории имеет асимптотическое направление. Следуя [11], обозначим через $ORA \subset A_{\Pi}$ множество точек абсолюта S_{∞} , достижимых всевозможными поднятиями нетривиально рекуррентных полутраекторий (всевозможных) потоков. Аналогично, для любого слоения на поверхности M_g^2 существует покрывающее слоение на Δ . Обозначим через $RA \subset A_{\text{fol}}$ множество точек абсолюта S_{∞} , достижимых всевозможными поднятиями нетривиально рекуррентных полуслоев, имеющих асимптотическое направление, (всевозможных) слоений. Отметим, что в отличие от потоков не каждый нетривиально рекуррентный полуслой имеет асимптотическое направление. Поэтому в последнем определении требуется его наличие. Отметим, что все включения

$$ORA \subset A_{\Pi}, \quad RA \subset A_{\text{fol}}, \quad ORA \subset RA$$

собственные.

Точки абсолюта, достижимые иррациональными потоками и слоениями. На двумерном торе T^2 существуют *минимальные* потоки, т.е. потоки, любая траектория которых всюду плотна на T^2 . Типичный пример – иррациональная обмотка [7]. Любой поток на ориентируемой замкнутой поверхности M_g^2 большего рода (т.е. рода $g \geq 2$) необходимо имеет точки покоя и, следовательно, не является минимальным. Аналогом минимального потока на такой поверхности является иррациональный поток. Поток называется *иррациональным*, если его любая одномерная траектория всюду плотна на поверхности и поток не имеет точек покоя нулевого индекса (т.е. точек покоя типа седло с двумя седловыми секторами – так называемых *фальшивых седел* или *проходимых крошек*). Иррациональное слоение определяется полностью аналогично. Очевидно, каждая полутраектория (полуслой) иррационального потока (слоения), не стремящаяся к особенности, нетривиально рекуррентная.

Иррациональные потоки (и, следовательно, иррациональные слоения) существуют на поверхности M_g^2 любого рода $g \geq 2$ [7]. Обозначим через $I_{\Pi}(M_g^2)$ множество таких потоков. В множестве иррациональных слоений мы выделим подмножество $I_{\text{fol}}^-(M_g^2)$ слоений с особенностями отрицательного индекса (такие слоения существуют, см. [9]). В лемме 2.1 мы доказываем существование таких слоений с особенностями полуделого индекса. Известно [12], что каждый полуслой иррационального слоения из $I_{\text{fol}}^-(M_g^2)$ имеет асимптотическое направление. Обозначим через $IA_{\Pi}(M_g^2)$ (соответственно $IA_{\text{fol}}^-(M_g^2)$) множество точек абсолюта S_{∞} , достижимых всевозможными поднятиями нетривиально рекуррентных полутраекторий (соответственно полуслоев) потоков из $I_{\Pi}(M_g^2)$ (соответственно слоений из $I_{\text{fol}}^-(M_g^2)$). Имеют место включения

$$IA_{\Pi}(M_g^2) \subset ORA, \quad IA_{\text{fol}}^-(M_g^2) \subset RA.$$

Можно показать, что все включения собственные.

Геодезические, соответствующие кривым без самопересечений. Пусть $l = \{m(t) \in M : -\infty < t < +\infty\}$ – параметризованная непрерывная кривая на M , бесконечная в обоих направлениях. Будем считать, что l является кривой без самопересечений. Точка $m(0)$ делит l на две полукривые: *положительную* $l^+ = \{m(t) \in M : t \geq 0\}$ и *отрицательную* $l^- = \{m(t) \in M : t \leq 0\}$. Пусть $\bar{l} = \{\bar{m}(t) : -\infty < t < +\infty\}$ – поднятие кривой l на Δ . Тогда каждая из полукривых

$$\bar{l}^+ = \{\bar{m}(t) : t \geq 0\}, \quad \bar{l}^- = \{\bar{m}(t) : t \leq 0\}$$

является поднятием l^+ и l^- соответственно. Предположим, что $\bar{l}^+$ и $\bar{l}^-$ имеют асимптотическое направление $\omega(\bar{l}) \in S_\infty$ и $\alpha(\bar{l}) \in S_\infty$ соответственно, и предположим, что $\alpha(\bar{l}) \neq \omega(\bar{l})$. Тогда существует геодезическая $\bar{g}(\bar{l})$ с теми же идеальными концевыми точками $\alpha(\bar{l}), \omega(\bar{l})$, ориентированная от $\alpha(\bar{l})$ к $\omega(\bar{l})$. Геодезическая $\bar{g}(\bar{l})$ называется *соответствующей* кривой $\bar{l}$. Ясно, что геодезическая $\pi(\bar{g}(\bar{l})) \stackrel{\text{def}}{=} g(l)$ на поверхности M не зависит от выбора накрывающей $\bar{l}$, и поэтому она называется *геодезической, соответствующей кривой l* .

Нетривиально рекуррентные геодезические. Геодезическая называется *нетривиально рекуррентной*, если ее внутренняя топология не совпадает с топологией, которая индуцируется на ней как на подмножестве поверхности. Нетрудно показать [7], [12], что геодезическая, соответствующая нетривиально рекуррентной траектории, является нетривиально рекуррентной. Известно [13], что геодезическая, соответствующая любой траектории (для которой соответствующая геодезическая существует), не имеет самопересечений.

Пусть L – ориентированная кривая и Σ – дуга или замкнутая кривая, снабженная нормальной ориентацией. Мы говорим, что L пересекает Σ *ориентируемо*, если индекс пересечения $\Sigma \cap L$ в любой точке пересечения один и тот же (+1 либо -1). Геодезическая g на поверхности M_g^2 называется *сонаправленной*, если для любой точки $m \in g$ найдется геодезический сегмент Σ , трансверсально пересекающий g в точке m , такой, что g пересекает Σ ориентируемо.

Обозначим через $CG(M_g^2)$ множество нетривиально рекуррентных сонаправленных геодезических без самопересечений на поверхности M_g^2 . Это множество непусто, поскольку любая геодезическая, соответствующая нетривиально рекуррентной траектории, принадлежит $CG(M_g^2)$. Согласно теореме Уитни [14] (см. также [7], [4]) любая сонаправленная геодезическая вкладывается в поток. Таким образом, $CG(M_g^2)$ есть в точности множество геодезических, соответствующих нетривиально рекуррентным траекториям всевозможных потоков на M_g^2 .

Внутренние и граничные геодезические. Пусть $\overline{CG} = \pi^{-1}(CG(M_g^2))$ – поднятия геодезических из $CG(M_g^2)$. Объединение идеальных концевых точек геодезических из $\overline{CG}$ есть множество ORA . Геодезическая $\bar{L} \in \overline{CG}$ называется *представителем точки σ* , или *геодезической, представляющей точку σ* , если σ является идеальной концевой точкой $\bar{L}$, соответствующей положительному направлению на $\bar{L}$. В [11] показано, что любая точка $\sigma \in ORA$ имеет не более двух представителей (из множества $\overline{CG}$). Этот факт позволяет разбить точки множества ORA на два подмножества следующим образом: $\sigma \in ORA$ называется точкой *первого рода*, если она имеет ровно одну представляющую ее геодезическую. Остальные точки $\sigma \in ORA$ называются точками *второго*

рода. Множество точек первого (второго) рода обозначим через ORA_1 (соответственно ORA_2). В соответствии с этим разбиением множества ORA на два класса разбиваются геодезические из $\overline{CG}$ (и, как следствие, из $CG(M_g^2)$): геодезическая называется *внутренней* (соответственно *границной*), если она представляет точку первого (соответственно второго) рода. Если $\overline{L}_1, \overline{L}_2$ – граничные геодезические с общей идеальной концевой точкой $\sigma^+(\overline{L}_1) = \sigma^+(\overline{L}_2)$, то $\overline{L}_1$ и $\overline{L}_2$ называются *ассоциированными*.

2. Доказательство основных результатов. Нам понадобится

ЛЕММА 2.1. Пусть M_g^2 – замкнутая ориентируемая поверхность рода $g \geq 2$. Тогда на M_g^2 существует иррациональное слоение $\mathcal{F}$, каждая особенность которого имеет отрицательный индекс, и существует по крайней мере одна особенность с полуцелым индексом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [15] на проективной плоскости P^2 существует иррациональное слоение $\mathcal{F}_{3,1}$ с тремя иглами и одной треногой, причем других особенностей слоение $\mathcal{F}_{3,1}$ не имеет. Пусть $p: S^2 \rightarrow P^2$ – двулистное (неразветвленное) накрытие проективной плоскости сферой S^2 . Тогда на S^2 имеется накрывающее (относительно p) слоение $\mathcal{F}_{6,2}$ с шестью иглами $n_1, \dots, n_6$ и двумя треногами t_1, t_2 . В силу двулистности накрытия p слоение $\mathcal{F}_{6,2}$ иррациональное. Возьмем теперь на S^2 семейство Σ_{2g-4} , состоящее из $2g - 4$ точек (если $g = 2$, то Σ_{2g-4} – пустое множество), таким образом, чтобы точки из Σ_{2g-4} не лежали на сепаратрисах и принадлежали попарно различным слоям слоения $\mathcal{F}_{6,2}$. Объявим каждую точку из Σ_{2g-4} особенностью и полученное слоение обозначим через $\mathcal{F}'_{6,2}$. Отметим, что каждая особенность из Σ_{2g-4} является седлом с двумя седловыми секторами (так называемое “фальшивое седло”). Так как точки из Σ_{2g-4} принадлежат попарно различным слоям слоения $\mathcal{F}_{6,2}$ и не лежат на сепаратрисах, то слоение $\mathcal{F}'_{6,2}$ иррациональное.

Обозначим через $q: M_g^2 \rightarrow S^2$ двулистное разветвленное накрытие с точками ветвления $\Sigma_{2g-4} \cup_{i=1}^6 \{n_i\}$ индекса 2 каждая. Так как множество особенностей слоения $\mathcal{F}'_{6,2}$ совпадает с $\Sigma_{2g-4} \cup_{i=1}^6 \{n_i\}$, то на M_g^2 существует слоение $\mathcal{F}'$, накрывающее (относительно q) слоение $\mathcal{F}'_{6,2}$. Из конечнолистности q вытекает, что $\mathcal{F}'$ – иррациональное слоение. Множество особенностей слоения $\mathcal{F}'$ состоит из шести фальшивых седел $q^{-1}(n_1), \dots, q^{-1}(n_6)$, четырех треног, принадлежащих прообразам $q^{-1}(t_1), q^{-1}(t_2)$, и $2g - 4$ седел, каждое из которых имеет четыре сепаратрисы (т.е. индекса -1). Удалив фальшивые седла, получим требуемое слоение $\mathcal{F}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку сумма индексов особенностей слоения равна целому числу $2 - 2g$ (эйлеровой характеристике), то слоение должно иметь четное число особенностей полуцелого индекса. Поэтому слоение $\mathcal{F}$, удовлетворяющее лемме 2.1, имеет по крайней мере две особенности с полуцелым индексом.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть M_g^2 – замкнутая ориентируемая поверхность рода $g \geq 2$ с универсальной накрывающей Δ и абсолютном S_∞ . Тогда существует континуальное множество достижимых точек $U_g \subset S_\infty$ со следующим свойством: если произвольный поток f^t достигает точку из U_g , то поток f^t не аналитический и имеет бесконечное множество точек покоя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольное иррациональное слоение $\mathcal{F}$ на M_g^2 , удовлетворяющее условиям леммы 2.1. Пусть $\overline{\mathcal{F}}$ – накрывающее для $\mathcal{F}$ слоение на Δ . Поскольку все особенности слоения $\mathcal{F}$ имеют отрицательный индекс, существует непустое

множество (которое мы обозначим через $U(\mathcal{F})$) точек абсолюта, достижимых нетривиально рекуррентными слоями и полуслоями слоения $\overline{\mathcal{F}}$ [12]. Мы покажем, что каждая точка из $U(\mathcal{F})$ удовлетворяет требованиям теоремы. Для удобства разобьем доказательство на шаги.

Шаг 2.1. Пусть Σ – произвольный отрезок без контакта, наделенный нормальной ориентацией, и $L^\pm$ – одномерный (ориентированный) полуслой слоения $\mathcal{F}$, предельное множество которого есть вся поверхность. Тогда $L^\pm$ пересекает Σ в противоположных направлениях.

Доказательство. По условию теоремы существует особенность s_0 седлового типа с нечетным числом сепаратрис. Поэтому имеются два соседних седловых сектора, которые полуслой $L^\pm$ “проходит в противоположных направлениях” сколь угодно близко к точке s_0 (рис. 1). Более точно, существует отрезок без контакта Σ_0 , пересекающийся с сепаратрисой S_0 седла s_0 , который пересекается с $L^\pm$ в противоположных направлениях (т.е. с разными индексами пересечения) сколь угодно близко к любой точке из пересечения $\Sigma_0 \cap S_0$. Так как сепаратриса S_0 всюду плотна на M_g^2 (как и любой одномерный слой иррационального слоения [16]), то S_0 пересекает Σ . Из теоремы о непрерывной зависимости слоев от начальных условий вытекает требуемый результат.

Рис. 1. Полуслой $L^\pm$ вблизи s_0

Шаг 2.2. Пусть L – произвольно ориентированный одномерный слой слоения $\mathcal{F}$, не являющийся сепаратрисой, и пусть $\overline{L}$ – поднятие L на Δ . Тогда существует последовательность элементов $\gamma_n \in \Gamma$ таких, что

$$\overline{d}_E(\alpha(\overline{L}), \gamma_n(\omega(\overline{L}))) \rightarrow 0, \quad \overline{d}_E(\omega(\overline{L}), \gamma_n(\alpha(\overline{L}))) \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Поскольку слой L нетривиально рекуррентный, то существует негомоторная нулю замкнутая простая трансверсаль T , пересекающаяся с L [16]. Снова из нетривиальной рекуррентности L следует, что L пересекает T бесконечное множество раз. Поэтому на Δ имеется последовательность трансверсалей $\overline{T}_j \in \pi^{-1}(T)$, сходящихся в смысле топологического предела к точке $\omega(\overline{L})$ (соответственно $\alpha(\overline{L})$) при $j \rightarrow +\infty$ (соответственно при $j \rightarrow -\infty$) и пересекающихся с $\overline{L}$. Отметим, что так как каждая особенность слоения $\mathcal{F}$ имеет отрицательный индекс, то накрывающий слой $\overline{L}$ пересекает любую трансверсаль $\overline{T}_j$ накрывающего слоения не более чем в одной точке.

Зафиксируем произвольный номер $j_0 > 0$. В силу теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий на $\bar{T}_{j_0}$ существует окрестность $\bar{U}$ точки $m_0 = \bar{T}_{j_0} \cap \bar{L}$ такая, что любой слой, пересекающий $\bar{U}$, пересекает трансверсаль $\bar{T}_{-j_0}$. Согласно шагу 2.1 существует слой $\gamma_n(\bar{L})$, $\gamma_n \in \Gamma$, конгруэнтный $\bar{L}$, который пересекает $\bar{U}$ сколько угодно близко к точке m_0 в противоположном направлении (рис. 2). Так как последовательность трансверсалей $\bar{T}_j$ сходится к точкам $\omega(\bar{L})$, $\alpha(\bar{L})$ при $j \rightarrow +\infty$ и $j \rightarrow -\infty$ соответственно, то отсюда вытекает требуемое утверждение.

Рис. 2. Слой $\gamma_n(\bar{L})$

ШАГ 2.3. Пусть накрывающий для f^t поток $\tilde{f}^t$ на Δ имеет положительную полутраекторию $\tilde{l}^+$ такую, что $\omega(\tilde{l}^+) = \omega(\bar{L})$, где $L = \pi(\bar{L})$ — произвольно ориентированный одномерный слой слоения $\mathcal{F}$, не являющийся сепаратрисой. Тогда поток f^t имеет бесконечное множество точек покоя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Так как слоение $\mathcal{F}$ иррациональное, то точка $\omega(\bar{L})$ иррациональная [17]. Из конечности числа точек покоя и того, что полутраектория $l^+ = \pi(\tilde{l}^+)$ имеет асимптотическое направление, вытекает, что в предельном множестве полутраектории l^+ имеются одномерные траектории. Из иррациональности точки $\omega(\tilde{l}^+)$ следует, что f^t имеет нетривиально рекуррентные траектории и полутраектории, принадлежащие $\omega(\tilde{l}^+)$ [18]. Следовательно, f^t имеет квазиминимальное множество $Q = \text{clos}(l^+)$.

Покажем, что существует нетривиально рекуррентная полутраектория потока f^t такая, что некоторое ее поднятие имеет асимптотическое направление $\omega(\tilde{l}^+)$. Если l^+ является нетривиально рекуррентной полутраекторией, то доказывать нечего. Если l^+ не является нетривиально рекуррентной полутраекторией, то l^+ лежит в некоторой компоненте, скажем K , множества $M_g^2 - Q$. Тогда достижимая из K граница множества Q содержит нетривиально рекуррентные полутраектории, которые имеют асимптотическое направление, одинаковое с l^+ [7]. Следовательно, существуют нетривиально рекуррентные полутраектории с требуемым асимптотическим направлением. Не уменьшая общности, можно считать, что l^+ является нетривиально рекуррентной полутраекторией. Более того, мы будем считать, что l^+ принадлежит нетривиально рекуррентной траектории l . (В противном случае вместо l мы бы рассматривали максимально возможное число продолжений по Бендиксону полутраектории l^+ в отрицательном на-

правления. Поскольку по предположению число точек покоя конечно, то и число продолжений по Бендиксону также конечно, и эти продолжения закончились бы нетривиально рекуррентной полутраекторией в отрицательном направлении.)

Существует простая замкнутая трансверсаль C потока f^t , которая пересекается с l [7]. Так как в силу нетривиальной рекуррентности l пересекает C бесконечное множество раз, то C не гомотопна нулю. Поэтому все поднятия C на Δ являются незамкнутыми кривыми, идеальные концевые точки которых принадлежат абсолюту. Возьмем поднятие $\bar{l}$ траектории l такое, что $\omega(\bar{l}) = \omega(\bar{L})$. Поскольку $\omega(\bar{l})$ является топологическим пределом некоторой последовательности кривых из $\pi^{-1}(C)$, то существует поднятие $\bar{C}$ кривой C такое, что пара идеальных концевых точек $\bar{C}^+, \bar{C}^- \in S_\infty$ кривой $\bar{C}$ разделена на абсолют с парой точек $\omega(\bar{L}), \alpha(\bar{L})$. Не уменьшая общности, можно считать, что $\bar{C}$ пересекается с $\bar{l}$.

В силу [11] геодезические $\bar{g}(\bar{l}), \bar{g}(\bar{L})$ либо равны, либо (если не равны) являются ассоциированными граничными геодезическими. Предположим сначала, что $\bar{g}(\bar{l}) = \bar{g}(\bar{L})$. В силу того, что l пересекает C ориентируемо, все геодезические, конгруентные $\bar{g}(\bar{l})$ и пересекающие геодезическую $\bar{g}(\bar{C})$, пересекают $\bar{g}(\bar{C})$ ориентируемо. С другой стороны, согласно шагу 2.2 имеются геодезические, конгруентные $\bar{g}(\bar{l}) = \bar{g}(\bar{L})$, которые пересекают $\bar{g}(\bar{C})$ неориентируемо. Мы получили противоречие. Таким образом, для доказательства шага 2.3 осталось показать, что $\bar{g}(\bar{l}) \neq \bar{g}(\bar{L})$. Для этого достаточно установить, что $\bar{g}(\bar{L})$ является внутренней геодезической. Предположим противное. Тогда слой $\bar{L}$ является накрывающим для граничного нетривиально рекуррентного слоя. Но из иррациональности слоения $\mathcal{F}$ следует, что L должен быть сепаратрисой некоторого седла [11], что противоречит тому, что L есть нетривиально рекуррентный (в обе стороны) слой.

Шаг 2.4. Пусть накрывающий для f^t поток $\bar{f}^t$ на Δ имеет положительную полутраекторию $\bar{l}^+$ такую, что $\omega(\bar{l}^+) = \omega(\bar{L}^+)$, где $L^+ = \pi(\bar{L}^+)$ – ориентированный одномерный слой слоения $\mathcal{F}$, являющийся сепаратрисой в отрицательном направлении. Тогда поток f^t имеет бесконечное множество точек покоя.

Доказательство проводится аналогично доказательству шага 2.3. Мы его опускаем.

Шаг 2.5. Пусть накрывающий для f^t поток $\bar{f}^t$ на Δ имеет положительную полутраекторию $\bar{l}^+$ такую, что $\omega(\bar{l}^+) = \omega(\bar{L})$. Тогда поток f^t не аналитический.

Доказательство. Предположим противное. Следуя [19, с. 38–39], дадим описание множества $\text{Fix}(f^t)$ точек покоя аналитического потока f^t . Множество $\text{Fix}(f^t)$ содержит конечное число изолированных точек покоя и неизолированных “особых” точек S , к которым подходят кривые, составленные из точек покоя. Остальная часть множества $\text{Fix}(f^t)$ – это конечная система кривых, либо замкнутых, либо заканчивающихся в S . Вне S эти кривые вещественно аналитичны, не пересекаются друг с другом и не имеют самопересечений.

Будем придерживаться обозначений доказательства шага 2.3. Напомним, что точка $\omega(\bar{L})$ иррациональная [17]. Покажем, что в предельном множестве полутраектории $l^+ = \pi(\bar{l}^+)$ имеются одномерные траектории. Предположим противное. Так как накрывающая полутраектория $\bar{l}^+$ имеет асимптотическое направление, то l^+ должна спиралевидно стремиться к некоторому компактному, лежащему в $\text{Fix}(f^t)$. Из описания Аносова [19] множества $\text{Fix}(f^t)$ вытекает, что предельное множество l^+ есть контур, составленный из замкнутых кривых. Это противоречит иррациональности точки $\omega(\bar{L})$.

Таким образом, в $\omega(\bar{l}^+)$ имеются одномерные траектории. Более того, из конечности числа кривых в множестве $\text{Fix}(f^t)$ и их компактности следует, что в $\omega(\bar{l}^+)$ имеются такие одномерные траектории, в предельном множестве которых также имеются одномерные траектории. Согласно теореме Майера [18] поток f^t имеет нетривиально рекуррентные траектории и полутраектории, принадлежащие $\omega(\bar{l}^+)$. Следовательно, f^t имеет квазиминимальное множество $Q = \text{clos}(l^+)$.

Вновь из описания множества $\text{Fix}(f^t)$ вытекает, что достижимая из $M_g^2 - Q$ граница множества Q содержит только конечное число компактных кривых, составленных из точек покоя. Поэтому в достижимой из $M_g^2 - Q$ границе множества Q существуют нетривиально рекуррентные полутраектории, которые имеют асимптотическое направление, одинаковое с l^+ [7]. Далее повторяя рассуждения доказательства шага 2.3 (и шага 2.4), получаем противоречие с утверждением шага 2.2.

Итак, мы показали, что каждая точка из $U(\mathcal{F})$ удовлетворяет требованиям теоремы. В [17] доказано, что различные поднятия слоев иррационального слоения имеют попарно различные асимптотические направления. Так как имеется континуальное множество слоев, то множество $U(\mathcal{F})$ также континуальное. Положим $U_g = \bigcup U(\mathcal{F})$, где объединение берется по всем иррациональным слоениям, удовлетворяющим лемме 2.1. Оно континуальное и согласно шагам 2.3, 2.5 удовлетворяет требованиям теоремы.

В заключение покажем, что выделенное нами множество $U_g = \bigcup U(\mathcal{F})$ принадлежит на абсолюте множеству нулевой меры. Для этого понадобится один результат Мирберга [20]. Следуя [21], будем называть геодезическую $\bar{g} \subset \Delta$ *транзитивной*, если для любых открытых интервалов $U_1, U_2 \subset \Delta$ найдется элемент $\gamma \in \Gamma$ такой, что одна идеальная концевая точка геодезической $\gamma(\bar{g})$ лежит в U_1 , а другая – в U_2 . Обозначим через $TR(\Gamma) \in S_\infty$ множество идеальных концевых точек всех транзитивных геодезических. Согласно [20] $TR(\Gamma)$ является множеством полной лебеговой меры.

ЛЕММА 2.2. Пусть $U_g = \bigcup U(\mathcal{F})$, где объединение берется по всем иррациональным слоениям, удовлетворяющим лемме 2.1. Тогда $U_g \subset S_\infty - TR(\Gamma)$. В частности, U_g принадлежит множеству нулевой лебеговой меры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда существует точка $\sigma \in U_g \cap TR(\Gamma)$. Следовательно, σ является идеальной концевой точкой некоторой транзитивной геодезической $\bar{G}$ и представляет собой асимптотическое направление поднятия $\bar{L}^+$ полуслоя L^+ некоторого иррационального слоения $\mathcal{F}$. Мы считаем L^+ ориентированным и стремящимся к σ , когда параметр стремится к $+\infty$.

Если L^+ не является сепаратрисой, то L^+ принадлежит нетривиально рекуррентному слою L . Если L^+ является сепаратрисой седла s_0 , то обозначим через L объединение L^+ с s_0 и с одним из продолжений по Бендиксону сепаратрисы L^+ в отрицательном направлении (обобщенный слой в терминологии [12]). Пусть $\bar{L}$ – поднятие L , содержащее $\bar{L}^+$. Так как слоение $\mathcal{F}$ иррациональное, то $\bar{L}$ имеет асимптотические направления в обоих направлениях и эти асимптотические направления различны [17]. Следовательно, существует геодезическая $\bar{g}(\bar{L})$, соответствующая $\bar{L}$. Так как слои слоения попарно не пересекаются, то $\bar{g}(\bar{L})$ проектируется на поверхность в геодезическую g без самопересечений [17].

Геодезические $g, G = \pi(\bar{G})$ однозначно соответствуют траекториям l_g, l_G геодезического потока на поверхности. Так как $\bar{g}(\bar{L})$ и $\bar{G}$ экспоненциально сближаются [22], то предельные множества траекторий l_g, l_G совпадают. Следовательно, $\bar{g}(\bar{L})$ является транзитивной геодезической. Это противоречит тому, что g не имеет самопересечений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Eberlein P., O'Neill B. Visibility manifolds // Pacific J. Math. 1973. V. 46. P. 45–109.
- [2] Аносов Д. В. Как могут уходить в бесконечность кривые на универсальной накрывающей плоскости, накрывающие несамопересекающиеся кривые на замкнутой поверхности // Тр. МИАН СССР. 1989. Т. 191. С. 34–44.
- [3] Anosov D. V. Flows on closed surfaces and behavior of trajectories lifted to the universal covering plane // J. of Dyn. and Control Syst. 1995. V. 1. № 1. P. 125–138.
- [4] Nikolaev I., Zhuzhoma E. Flows on 2-dimensional manifolds // Lecture Notes in Math. 1999. V. 1705.
- [5] Арансон С. Х. О некоторых арифметических свойствах динамических систем на двумерных многообразиях // Докл. АН СССР. 1975. Т. 222. № 2. С. 265–268.
- [6] Gutierrez C. Smoothing continuous flows on 2-manifolds and recurrences // Ergodic Theory Dynamical Systems. 1986. V. 6. P. 17–44.
- [7] Aranson S., Belitsky G., Zhuzhoma E. An Introduction to Qualitative Theory of Dynamical Systems on Surfaces. Amer. Math. Soc. Math. Monogr. Providence: Amer. Math. Soc., 1996.
- [8] Аносов Д. В. О поведении траекторий на плоскости Евклида или Лобачевского, накрывающих траектории потоков на замкнутых поверхностях, 2 // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 3. С. 451–478.
- [9] Aranson S., Bronshtein I., Nikolaev I., Zhuzhoma E. Qualitative theory of foliations on closed surfaces // J. Math. Sci. 1998. V. 90. № 3. P. 2111–2149.
- [10] Арансон С. Х., Гринес В. З. О некоторых инвариантах динамических систем на двумерных многообразиях (необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности транзитивных динамических систем) // Матем. сб. 1973. Т. 90. № 3. С. 372–402.
- [11] Aranson S., Zhuzhoma E. Maier's theorems and geodesic laminations of surface flows // J. of Dyn. and Control Syst. 1996. V. 2. № 4. P. 557–582.
- [12] Levitt G. Foliations and laminations on hyperbolic surfaces // Topology. 1983. V. 22. № 2. P. 119–135.
- [13] Арансон С. Х., Гринес В. З. О представлении минимальных множеств потоков на двумерных многообразиях геодезическими линиями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. № 1. С. 104–129.
- [14] Whitney H. Regular families of curves // Ann. of Math. 1933. V. 34. № 2. P. 244–270.
- [15] Arnoux P., Yoccoz J. C. Construction de difféomorphismes pseudo-Anosov // C. R. Acad. Sci. 1981. V. 292. P. 75–78.
- [16] Арансон С. Х., Жужома Е. В. О структуре квазимиимальных множеств слоений на поверхностях // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 8. С. 31–62.
- [17] Арансон С. Х. Топологическая классификация слоений с особенностями и гомеоморфизмов с инвариантными слоениями на замкнутых поверхностях. Часть 1. Слоения // Деп. ВИНТИ № 6887 В-88. Горький: ГГУ им. Н. И. Лобачевского, 1988. Р. 1–194; Часть 2. Гомеоморфизмы // Деп. ВИНТИ № 1043 В-89. Горький: ГГУ им. Н. И. Лобачевского, 1989. Р. 1–137.
- [18] Майер А. Г. О траекториях на ориентируемых поверхностях // Матем. сб. 1943. Т. 12. № 1. С. 71–84.
- [19] Аносов Д. В. О поведении траекторий на плоскости Евклида или Лобачевского, накрывающих траектории потоков на замкнутых поверхностях, 1 // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. № 1. С. 16–43.
- [20] Myrberg P. J. Ein Approximationssatz für die Fuchsschen Gruppen // Acta Math. 1931. V. 57. P. 389–409.
- [21] Hedlund G. Two-dimensional manifolds and transitivity // Ann. Math. 1936. V. 37. № 3. P. 534–542.
- [22] Несторович Н. М. Геометрические построения на плоскости Лобачевского // Сер. Геометрия Лобачевского и развитие ее идей / ред. В. Ф. Кагана. М.–Л.: ГИТТЛ, 1951.