Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. П. Барановский, П. Г. Кононенко, Об одном способе вывода L -многогранников n -мерных решеток, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 6, 830–841

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1005>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 11:41:39

УДК 514.17

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ВЫВОДА L -МНОГОГРАННИКОВ n -МЕРНЫХ РЕШЕТОК

Е. П. Барановский, П. Г. Кононенко

Предложен один из способов выделения L -симплекса из L -многогранника n -мерной решетки евклидова пространства. Опираясь на специального вида условия того, что симплекс решетки является L -симплексом, и рассматривая выделенный из L -многогранника симплекс, предложен новый метод вывода всех типов L -многогранников решеток данной размерности n . Как пример использования предложенного метода получены выведенные ранее другими способами типы L -многогранников n -мерных решеток при $n = 2, 3, 4$.

Библиография: 7 названий.

Решение ряда задач в геометрии точечных решеток, заданных в евклидовых пространствах E^n , часто связывается с исследованием определяемых решетками разбиений этих пространств: разбиением на области Дирихле–Вороного и двойственным ему в комбинаторном и метрическом смыслах разбиением на L -многогранники (L -разбиением). Последнее и служит объектом исследования настоящей заметки.

Пусть в пространстве E^n задана некоторая n -мерная решетка. L -многогранником этой решетки называется такой n -мерный выпуклый многогранник с вершинами в точках решетки, который вписывается в шар (т.е. существует шар, на поверхности которого лежат все вершины многогранника), и этот замкнутый шар не содержит, кроме вершин многогранника, никаких других точек решетки. Множество таких многогранников образует нормальное разбиение пространства E^n , называемое L -разбиением. При заданной размерности n количество комбинаторно различных видов L -многогранников конечно, и одна из задач относительно L -разбиений – назвать и описать эти виды. Для $n \leq 4$ эта задача решена. На плоскости такими видами являются остроугольный треугольник и прямоугольник, в пространстве E^3 этих видов пять (см., например, [1]), в пространстве E^4 – 19 [2]. В статье [3] строение 4-мерных L -многогранников получено вместе со строением тех L -звезд, в которые входят эти многогранники.

Частичное решение задачи вывода 5-мерных L -многогранников содержится в статье [4]. Результат настоящей заметки позволяет распространить использованный в [4] подход к выводу L -многогранников для отыскания всех видов L -многогранников при данном n , в частности, завершить вывод их при $n = 5$. В качестве примера в конце заметки такой подход использован для вывода L -многогранников при $n = 2, 3, 4$.

1. Выделение L -симплекса из L -многогранника. Пусть P – некоторый L -многогранник n -мерной решетки Γ^n евклидова пространства E^n . Возьмем один из симплексов $S = \{A_0 A_1 \dots A_n\}$ с вершинами в вершинах многогранника P и обозначим

$$|A_k A_l|^2 = h_{kl}, \quad k, l = 0, 1, \dots, n, \quad k \neq l.$$

Величины h_{kl} будем рассматривать как параметры решетки, а для характеристики расстояния точек от центра O сферы Ω , описанной вокруг симплекса S (и, следовательно, вокруг многогранника P), введем функцию (см., например, [4]):

$$\Phi(X) = \Phi(x^0, x^1, \dots, x^n) = - \sum_{0 \leq k < l \leq n} h_{kl} x^k x^l = |OX|^2 - R^2,$$

где $x^0, x^1, \dots, x^n$ – барицентрические координаты точки X относительно симплекса S как базиса, а R – радиус сферы Ω .

ЛЕММА 1. Точка $M \in E^n$ лежит внутри, на поверхности или вне шара $\Omega(S)$, описанного вокруг симплекса S , если соответственно значение функции $\Phi(M)$ меньше, равно или больше 0.

Рассмотрим такое аффинное преобразование, при котором точки $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ останутся на месте, а вершина A_n симплекса S сдвинется по направлению вектора $\overrightarrow{OA_n}$. Это преобразование будем называть *деформацией решетки Γ^n* или просто *деформацией*. Если сдвиг точки A_n происходит на прямой $A_n O$ к точке O , то деформация определяется следующим равенством:

$$\bar{a}_n(\lambda) = \overline{A_0 A}(\lambda) = (1 - \lambda)\bar{a}_n + \lambda\bar{R}, \quad (\text{A})$$

где $\bar{a}_n = \overline{A_0 A_n}$, $\lambda > 0$, $A_n(\lambda)$ – положение точки A_n после смещения, а $\bar{R} = \overline{A_0 O}$.

В случае сдвига в противоположную сторону деформация определяется при тех же обозначениях равенством

$$\bar{a}_n(\lambda) = (1 + \lambda)\bar{a}_n - \lambda\bar{R}. \quad (\text{B})$$

ЛЕММА 2. При аффинном преобразовании, определяемом равенством (A), и достаточно малом значении λ вершины L -многогранника P , находящиеся по ту же сторону гиперплоскости, определяемой точками $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$, что и симплекс S , окажутся вне сферы Ω_λ , описанной вокруг симплекса $S_\lambda = \{A_0 A_1 \dots A_{n-1} A_n(\lambda)\}$, а вершины, находящиеся на противоположной стороне этой гиперплоскости, – внутри сферы Ω_λ .

Если преобразование определяется равенством (B), то те вершины многогранника P , которые в случае равенства (A) сдвинулись внутрь сферы, сдвинутся наружу, а те, что сдвинулись наружу, – сдвинутся внутрь.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим новые значения $h_{kl}(\lambda)$ параметров h_{kl} решетки после деформации. Для всех $i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ имеем $h_{ij}(\lambda) = h_{ij}$, а для оставшихся параметров

$$h_{in}(\lambda) = [(1 - \lambda)\bar{a}_n + \lambda\bar{R} - \bar{a}_i]^2,$$

где $\bar{a}_i = \overline{A_0 A_i}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$; после тривиальных выкладок получим:

$$h_{in}(\lambda) = \lambda^2 R^2 + (1 - \lambda)h_{in}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1)$$

Найдем выражение для функции $\Phi(X)$ относительно деформированного симплекса S_λ , обозначив его через $\Phi_\lambda(X)$. Имеем

$$\Phi_\lambda(X) = - \sum_{0 \leq i < j \leq n-1} x^i x^j h_{ij} - \sum_{i=0}^{n-1} x^i x^n [\lambda^2 R^2 + (1-\lambda)h_{in}]. \quad (2)$$

В выражении (2) через $x^0, x^1, \dots, x^n$ обозначены барицентрические координаты относительно симплекса S_λ как базиса. Отметим, что эти новые координаты для точек деформированной решетки имеют те же самые значения, что и соответствующие старые координаты точек исходной решетки.

Далее из выражения (2) получаем

$$\frac{d\Phi_\lambda(X)}{d\lambda} = - \sum_{i=0}^{n-1} x^i x^n [2\lambda R^2 - h_{in}],$$

откуда

$$\left. \frac{d\Phi_\lambda(X)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \sum_{i=0}^{n-1} x^i x^n h_{in}. \quad (3)$$

Пусть $Q = (q^0, q^1, \dots, q^n)$ — одна из вершин многогранника P . Из равенства $\Phi(Q) = 0$ выводим соотношение

$$- \sum_{0 \leq i < j \leq n-1} q^i q^j h_{ij} = \sum_{i=0}^{n-1} q^i q^n h_{in}.$$

После подстановки в (3) имеем

$$\left. \frac{d\Phi_\lambda(Q)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = - \sum_{0 \leq i < j \leq n-1} q^i q^j h_{ij}. \quad (4)$$

В случае, когда $q^n = 1$, справедливо равенство $\sum_{i=0}^{n-1} q^i = 0$ и строка $(q^0, q^1, \dots, q^{n-1}, 0)$ представляет собой координатную строку некоторого вектора $\bar{v}$. В этом случае выполняется оценка $\Phi(\bar{v}) > 0$, если вершина Q не есть точка A_n . Тем самым, для производной (4) в случае $q^n = 1$ и $Q \neq A_n$ имеем

$$\left. \frac{d\Phi_\lambda(Q)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \Phi(q^0, q^1, \dots, q^{n-1}, 0) > 0.$$

Рассмотрим случай $q^n \neq 1$. Так как $1 - q^n \neq 0$, выражение (3) можем переписать следующим образом:

$$\left. \frac{d\Phi_\lambda(Q)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = -(1 - q^n)^2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{q^i}{1 - q^n} \frac{\dot{q}^n}{1 - q^n} h_{in}.$$

Поскольку

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{q^i}{1 - q^n} = 1,$$

строка

$$\left(\frac{q^0}{1-q^n}, \frac{q^1}{1-q^n}, \dots, \frac{q^{n-1}}{1-q^n}, 0 \right)$$

представляет собой координатную строку некоторой точки, которую обозначим через Q^* . Отметим, что точка Q^* расположена на плоскости Π , определяемой вершинами $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ симплекса S .

Обозначив $\bar{q} = \overline{A_0 Q}$ и $\bar{q}^* = \overline{A_0 Q^*}$, по координатам точек Q, Q^* и A_n устанавливаем, что имеет место равенство

$$\bar{q}^* = \frac{q^n}{1-q^n} \bar{a}_n + \frac{1}{1-q^n} \bar{q}. \quad (5)$$

Из равенства (5) вытекает, что точка Q^* расположена на прямой QA_n и лежит на отрезке QA_n , если $0 \leq q^n \leq 1$, и вне этого отрезка в противном случае.

В первом случае (напоминаем, что $q^n \neq 0$ и $q^n \neq 1$) точка Q расположена по отношению к симплексу S по другую сторону плоскости Π и, следовательно, точка Q^* лежит внутри сферы Ω . Отсюда вытекают неравенства $\Phi(Q^*) < 0$ и

$$\left. \frac{d\Phi_\lambda(Q)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = (1-q^n)^2 \Phi(Q^*) < 0. \quad (6)$$

Неравенство (6) означает, что точка Q после деформации при достаточно малом значении параметра λ сместится внутрь сферы Ω_λ .

Во втором случае точки Q и A_n расположены по одну и ту же сторону плоскости Π , а точка Q^* лежит вне сферы Ω , поэтому $\Phi(Q^*) > 0$ и

$$\left. \frac{d\Phi_\lambda(Q)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} > 0.$$

Следовательно, в этом случае точка Q после достаточно малой деформации расположится вне сферы Ω_λ . Первое предложение леммы доказано.

Так как соотношение (В) – это соотношение (А) при условии, что $\lambda < 0$, доказательство второго предложения леммы повторяет доказательство первого с учетом названного условия.

ТЕОРЕМА 1. Среди вершин всякого L -многогранника P n -мерной решетки найдутся такие линейно независимые $n+1$ вершины, что при некоторой достаточно малой деформации решетки симплекс с этими вершинами будет L -симплексом полученной после деформации решетки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем симплекс S , о котором шла речь в рассмотренной выше лемме, таким образом, чтобы его вершины $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ принадлежали одной из гиперграней, скажем P_1 , многогранника P . Поскольку по ту сторону определяемой гранью P_1 плоскости Π , где расположен симплекс S , нет вершин многогранника P , то, опираясь на первое предложение леммы 2, можно так деформировать решетку, что пирамида с вершиной в точке A_n и основанием P_1 будет L -многогранником этой решетки.

Очевидно, проделав с полученной L -пирамидой процедуру, аналогичную той, что описана выше для исходного многогранника P , затем повторив ее, если потребуется,

конечное число (меньшее n) раз для получаемых L -пирамид над пирамидами, придем к требуемому L -симплексу.

Достаточно очевидно также, что для получения требуемого теоремой L -симплекса можно использовать и второе предложение леммы 2, или совместно оба.

2. О выводе L -многогранников на основе L -условий для симплексов решетки. Рассмотрим при заданном n множество n -мерных решеток. Пусть относительные объемы L -симплексов этих решеток имеют значения $1, 2, \dots, v_m$. (Эти значения известны в настоящее время для $n \leq 6$: при $n \leq 4$ объем $v_m = 1$, для 5-мерных решеток $v_m = 2$, для 6-мерных – $v_m = 3$.)

Под L -условиями для симплекса S относительного объема v будем понимать такие необходимые и достаточные условия того, что симплекс S является L -симплексом решетки, которые заданы в виде требования, чтобы для конечного множества $B^v = \{B_1^v, \dots, B_r^v\}$ точек решетки выполнялись неравенства

$$\Phi(B_q^v) > 0, \quad q = 1, 2, \dots, r. \quad (7)$$

Множество B^v называется *множеством определяющих L -условия точек для симплекса S* , или более коротко, *множеством определяющих точек симплекса S* . По отношению к множеству B^v определяющих точек некоторого симплекса S все точки решетки, кроме вершин симплекса и самих определяющих точек, делятся на строго заслоненные и нестрого заслоненные. Точка называется *строго заслоненной*, если она не попадет на поверхность шара $\Omega(S)$ ни при каких случаях обращения в равенства каких-либо неравенств (7) для данного множества определяющих точек. В противном случае точка называется *нестрого заслоненной*. Таким образом, если некоторая точка M относительно множества B^v является нестрого заслоненной, существует такое подмножество точек $B_{i_1}^v, \dots, B_{i_p}^v$ этого множества, что при условиях

$$\Phi(B_{i_1}^v) = 0, \quad \dots, \quad \Phi(B_{i_p}^v) = 0$$

для точки M справедливо равенство $\Phi(M) = 0$.

Способ вывода L -условий для решеток размерностей $n \leq 5$ в статье [5] позволяет легко получить и перечень нестрого заслоненных точек в этих размерностях. Как следует из [5], при $n = 2$ таких точек нет, при $n = 3$ это точки видов $(-1^2, 1^1, 2^1)$ и $(-2^1, 1^3)$, при $n = 4$ – некоторые точки, максимальное значение абсолютной величины координат которых не превосходит 3.

Перейдем к описанию алгоритма для вывода всех комбинаторно различных видов L -многогранников решеток данной размерности n .

Пусть мы знаем L -условия для симплексов при данном n . Возьмем множество B^v определяющих L -условия точек для симплекса объема v , состоящее, скажем, из r точек, и последовательными шагами рассмотрим все наборы, составленные соответственно из $1, 2, \dots, r$ точек этого множества, причем для дальнейшего оставим только такие, которые попарно неэквивалентны относительно перенумерации координат, т.е. из каждого множества такого рода эквивалентности возьмем по одному представителю.

Пусть $T = \{B_1^v, B_2^v, \dots, B_t^v\}$ – один из таких наборов. Положим

$$\Phi(B_i^v) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, t, \quad (8)$$

и рассмотрим при условиях (8) неравенства (7) для оставшихся точек множества B^v . Возможны следующие варианты:

- 1) оставшиеся неравенства совместны с равенствами (8);
- 2) оставшиеся неравенства совместны с (8) при условии, что некоторые из них должны сами быть равенствами;
- 3) оставшиеся неравенства несовместны даже при допущении обращения неравенств в равенства.

Первые два случая означают, что существует L -многогранник, вершины которого, кроме вершин симплекса S , суть точки из множества B^v , в которых значение функции Φ равно 0, и, если система равенств их порождает, некоторые нестрогие заслоненные относительно данной системы L -условий точки решетки. Третий случай, очевидно, не соответствует никакому L -многограннику.

На этом пути, который назовем S -алгоритмом, получим некоторое множество L -многогранников, построенных на базе L -симплексов S объемов $1, 2, \dots, v_m$. Естественно, среди полученного множества могут оказаться многогранники одного и того же комбинаторного вида; выберем из этого множества подмножество, в котором каждый вид представлен одним L -многогранником.

ТЕОРЕМА 2. *Полученное посредством S -алгоритма множество комбинаторно различных видов L -многогранников n -мерных решеток является полным множеством таких видов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P – произвольный L -многогранник некоторой решетки. Согласно теореме 1 из него можно выделить некоторый L -симплекс. Из определения L -условий для симплекса решетки следует, что среди вершин многогранника P , не являющихся вершинами выделенного из этого многогранника симплекса, есть точки, определяющие L -условия этого симплекса. А так как все случаи появления на поверхности описанной вокруг симплекса сферы такого рода точек рассмотрены при проведении S -алгоритма, то комбинаторный тип рассматриваемого многогранника P содержится в полученном этим алгоритмом списке.

Вычисления при проведении S -алгоритма сокращаются при использовании следующей леммы.

ЛЕММА 3. *Пусть на некотором шаге S -алгоритма к вершинам симплекса S добавлены в качестве вершин строящегося на нем L -многогранника таких два набора точек, по одинаковому числу точек в каждом, которые привели к одному и тому же L -многограннику. Тогда следующие шаги с добавлением точек из L -условий достаточно проводить на базе только одного из этих наборов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Названная в лемме ситуация означает, что в полученном L -многограннике основной симплекс S , от которого началось проведение алгоритма, был выбран двумя различными способами. Так как L -условия, которым удовлетворяет L -многогранник, определяются его метрическими свойствами и никак не зависят от выбора в нем симплекса S , то все дальнейшее проведение алгоритма на основе данного L -многогранника даст результат вне зависимости от того, какой из двух наборов мы будем дополнять точками.

Как показывает практическое использование S -алгоритма, в одних случаях, например при выводе в статье [4] 5-мерных L -многогранников для значения $v_m = 2$, он дает хороший результат, в других же может оказаться весьма громоздким. В таких случаях его удобно сочетать с методом статьи [6], в котором построение n -мерных L -многогранников базируется на знании строения L -разбиений решеток размерности $n - 1$. Пример такого сочетания см. ниже при выводе 4-мерных L -многогранников.

Построение L -многогранника методом [6], называемым методом *поэтажного* или *слоевого построения*, заключается в следующем. Пусть имеется некоторый $(n-1)$ -мерный L -многогранник Q и известно строение L -разбиения, к которому принадлежит многогранник Q . Пусть $\{L_Q\}$ – множество элементов этого разбиения, т.е. множество его граней всех размерностей от 0 до $n - 1$. Тогда n -мерный L -многогранник, построенный на основе многогранника Q , представляет собой выпуклую оболочку расположенных в двух параллельных $(n - 1)$ -мерных плоскостях самого многогранника Q и некоторого элемента разбиения из множества $\{L_Q\}$. Подробнее о методе слоевого построения см. [6].

3. Вывод L -многогранников двух- и трехмерных решеток. В размерностях $n = 2, 3, 4$ максимальный относительный объем v_m (см. п. 2) L -симплексов равен 1. Таким образом, в каждой из этих размерностей предстоит выполнить исследование только в одном случае, когда симплекс S является основным симплексом решетки.

Условимся о следующих обозначениях: через S^n, C^n, P^n будем обозначать соответственно n -мерные симплекс, кросс-полиэдр (n -мерный аналог 3-мерного октаэдра), прямоугольный параллелепипед, а через $p(Q), bp(Q), R(Q)$ – пирамиду, бипирамиду и прямую призму над $(n - 1)$ -мерным многогранником Q .

При $n = 2$ и $n = 3$ множество определяющих L -условия точек состоит только из точек вида $\tau = (-1^1, 1^2, 0^{n-2})$. Точку такого вида с координатами $x^i = -1, x^j = x^k = 1$ и с остальными – равными 0, будем обозначать через $\tau_{i,j,k}$.

Пусть $n = 2$. Все точки вида τ попарно эквивалентны относительно треугольника S . Так как выбор на первом шаге S -алгоритма одной из названных точек исключает обращение в 0 значений функции Φ в остальных двух, то алгоритм оканчивается после первого шага и мы получаем, что единственным, кроме самого остроугольного треугольника S , L -многоугольником 2-мерных решеток может быть только один из прямоугольников $A_0 A_1 A_2 \tau_{i,j,k}$, где i, j, k – перестановка из чисел 0, 1, 2.

Переходим к 3-мерным решеткам. И в этом случае, как и при $n = 2$, все определяющие L -условия точки попарно эквивалентны, поэтому на первом шаге рассматривается случай только какой либо одной из них, скажем, точки $\tau_{1,2,3}$.

Выбор точки $\tau_{1,2,3}$, что соответствует равенству $\Phi(0, -1, 1, 1) = 0$, не влечет за собой аналогичных равенств $\Phi = 0$ ни для одной из других определяющих точек. Не удовлетворяет этот выбор также условиям появления в качестве вершины соответствующего L -многогранника каких-либо нестрого заслоненных точек. Таким образом, на первом шаге S -алгоритма мы получили 5-вершинный L -многогранник $\{A_0 A_1 A_2 A_3 \tau_{1,2,3}\}$ – пирамиду с прямоугольным основанием.

На втором шаге при рассмотрении всевозможных пар определяющих точек прежде всего учитываем, что участие в выборе точки $\tau_{1,2,3}$ исключает из него точки $\tau_{2,1,3}$ и $\tau_{3,1,2}$. После небольшого перебора обнаруживаем, что имеется всего четыре попарно неэквивалентные пары; в качестве их представителей возьмем

$$(\tau_{1,2,3}, \tau_{0,2,3}), (\tau_{1,2,3}, \tau_{1,0,3}), (\tau_{1,2,3}, \tau_{2,0,1}), (\tau_{1,2,3}, \tau_{2,0,3}).$$

Определяемые этими парами виды связей между двумя точками вида τ (т.е. соотношения между координатами с одинаковыми номерами) обозначим соответственно через O, M, A, P :

$$O = \begin{pmatrix} 0, -1, 1, 1 \\ -1, 0, 1, 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0, -1, 1, 1 \\ 1, -1, 0, 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0, -1, 1, 1 \\ 1, 1, -1, 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0, -1, 1, 1 \\ 1, 0, -1, 1 \end{pmatrix}.$$

Первые три пары не влекут за собой дополнительных вершин определяемых ими L -многогранников. Этими многогранниками являются соответственно

- 1) октаэдр,
- 2) трехгранная призма, в которой вершины $\tau_{1,23}$ и $\tau_{1,03}$ принадлежат одному основанию, и
- 3) трехгранная призма, в которой вершины $\tau_{1,23}$ и $\tau_{2,01}$ принадлежат разным основаниям.

Последней паре соответствуют равенства

$$h_{12} + h_{13} = h_{23}, \quad h_{02} + h_{23} = h_{03},$$

следствием которых являются еще два равенства

$$h_{02} + h_{12} = h_{01}, \quad h_{01} + h_{13} = h_{03}.$$

Последние равенства означают, что $\Phi(\tau_{2,01}) = 0$ и $\Phi(\tau_{1,03}) = 0$, т.е. что определяемому этой парой L -многограннику принадлежат в качестве вершин еще и точки $\tau_{2,01}$, $\tau_{1,03}$. Рассмотрев условия появления нестрого заслоненных точек, выясняем, что таких точек нет. Полученные вершины и те условия, которым они удовлетворяют, показывают, что данной паре соответствует прямоугольный параллелепипед.

На третьем шаге перебор дает следующие семь попарно неэквивалентных троек, которые мы зададим, назвав их попарные связи:

$$OMP, MAP, MMM, OAA, MPP, APP, PPP.$$

(Заметим, что на третьем шаге мы могли бы сократить вычисления, воспользовавшись леммой 3, однако сознательно этого не сделали, чтобы увидеть полную картину построений при выполнении S -алгоритма в пространстве E^3 .)

Так как следствием полученных в каждой из последних трех троек равенств является обращение в нули некоторых из параметров h_{kl} , то эти тройки не соответствуют никаким L -многогранникам.

Возьмем согласно первым четырем связям следующие тройки точек:

$$\begin{aligned} OMP & --- \tau_{1,23}, \tau_{0,23}, \tau_{0,13}, & MAP & --- \tau_{1,23}, \tau_{1,03}, \tau_{0,12}, \\ MMM & --- \tau_{1,23}, \tau_{1,03}, \tau_{1,02}, & OAA & --- \tau_{1,23}, \tau_{0,23}, \tau_{3,01}. \end{aligned}$$

Эти тройки определяют дополнительно еще по одной вершине, которые названы в том же порядке, что и сами тройки:

$$\tau_{1,02}, \quad \tau_{0,23}, \quad (1, -2, 1, 1), \quad (-1, -1, 1, 2).$$

Как видим, последние две вершины – это нестрого заслоненные точки. Все случаи определяют L -многогранники одного и того же вида – прямоугольные параллелепипеды.

Для записи связей между четырьмя точками, перенумерованными в некотором порядке, будем пользоваться правилом: первая связь – между первой и второй точками, вторая – между первой и третьей точками, третья – между второй и третьей точками, далее в скобках – связи четвертой точки соответственно с первой, второй и третьей.

Очевидно, что третий шаг алгоритма уже предопределил четвертый шаг и показал, что алгоритм на четвертом шаге заканчивается. Как и при $n = 2$, получили хорошо известный результат – L -многогранники $S^3, p(S^2), C^3, R(S^2), P^3$.

Для дальнейшего нам потребуется

Предложение 1. *На 3-мерной плоскости из множества определяющих точек вида $(-1^1, 1^2, 0^p)$, $p \geq 1$, можно образовать следующие множества вершин:*

- 1) из одной точки,
- 2) из двух точек со связями O, M или A ,
- 3) из трех точек со связями MMM или OAA , причем в первом случае в качестве четвертой вершины появляется нестрого заслоненная точка вида $(-2^1, 1^3, 0^{p-1})$, а во втором случае – нестрого заслоненная точка вида $(-1^2, 1^1, 2^1, 0^{p-1})$,
- 4) из четырех точек, связи между которыми суть следующие: $PMO(AMP)$.

Сами L -многогранники, соответствующие перечисленным в предложении 1 множествам вершин, названы в этом пункте выше.

4. L -многогранники 4-мерных решеток. При $n = 4$ множество определяющих L -условия точек состоит из точек рассмотренного выше вида τ и точек вида $\pi = (-1^2, 1^3)$. Относительно последних справедливо следующее

Предложение 2. *У 4-мерных L -многогранников две вершины вида π несовместимы.*

Доказательство. Между двумя точками вида π имеются только следующие два вида связи:

$$\begin{pmatrix} 1, 1, 1, -1, -1 \\ 1, -1, -1, 1, 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, 1, 1, -1, -1 \\ 1, 1, -1, -1, 1 \end{pmatrix}.$$

В первом случае имеем

$$\Phi(1, 1, 1, -1, -1) + \Phi(1, -1, -1, 1, 1) = 2(h_{13} + h_{14} + h_{23} + h_{24} - h_{12} - h_{34}) = 0,$$

откуда вытекают равенства

$$\begin{aligned} \Phi(0, -1, 0, 1, 1) &= 0, & \Phi(0, 0, -1, 1, 1) &= 0, \\ \Phi(0, 1, 1, -1, 0) &= 0, & \Phi(0, 1, 1, 0, -1) &= 0. \end{aligned}$$

Из этих равенств следует, что вершины A_1, A_2, A_3, A_4 базисного симплекса S расположены на одной 2-плоскости.

Во втором случае имеем

$$\Phi(1, 1, 1, -1, -1) + \Phi(1, 1, -1, -1, 1) = 2(h_{03} + h_{13} + h_{24} - h_{01}) \geq 2h_{24} > 0,$$

что и означает несовместимость этих двух вершин.

В пространстве E^4 будем пользоваться следующими обозначениями для L -многогранников:

T_7 – выпуклая оболочка двух прямоугольников с общей вершиной, 2-плоскости которых различны и пересечением которых является эта вершина;

T_8 – выпуклая оболочка прямой призмы $R(S^2)$ и отрезка, не лежащего в ее 3-плоскости и параллельного одному из ребер оснований призмы;

T_9 – выпуклая оболочка прямой призмы $R(S^2)$ и треугольника, не лежащего в ее 3-плоскости и полученного преобразованием центральной симметрии из треугольника, являющегося основанием призмы;

T_9^* – то же, что и T_9 , но треугольник получен из основания призмы параллельным переносом;

T_{10} – выпуклая оболочка октаэдра C^3 и не лежащего в его 3-плоскости тетраэдра, полученного параллельным переносом одного из тетраэдров, которые можно получить при “естественном” достраивании октаэдра до параллелепипеда.

(В работе [2] приведенным обозначениям соответствуют обозначения $F_2^7, F_2^6, F_4^5, F_4^4$, в работе [3] – обозначения S_4, S_5, S_8, S_{11}).

Прежде всего, рассмотрим только определяющие точки вида τ . Одна точка этого множества дает L -многогранник $p[p(P^2)]$; две точки, треугольники которых расположены в одной 3-плоскости, исследованы при $n = 3$. Они определяют 4-мерные L -многогранники $p(C^3), p[R(S^2)], p(P^3)$.

Если треугольники двух точек вида τ расположены в разных 3-плоскостях, связи между ними могут быть следующих трех видов:

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1, 1, 1, 0, 0 \\ -1, 0, 0, 1, 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} -1, 1, 1, 0, 0 \\ 0, -1, 0, 1, 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} -1, 1, 1, 0, 0 \\ 0, 0, 1, 1, -1 \end{pmatrix}.$$

Во всех трех случаях L -многогранником является многогранник T_7 .

Обратим внимание на то, что наличие двух точек вида τ с треугольниками в общей 3-плоскости и со связью P определяет при добавлении любых других точек из множества определяющих точек 4-мерный L -многогранник, одной из граней которого или срединным сечением является многогранник P^3 (предложение 1). Все такие многогранники легко перечислить – это многогранники $p(P^3), R[p(P^2)], R[R(S^2)], P^4, bp(P^3), R(C^3)$. Первые четыре суть выпуклые оболочки многогранника P^3 и расположенных в параллельной с его 3-плоскостью соответственно точки, отрезка, параллельного и конгруэнтного какому-либо его ребру, прямоугольника, конгруэнтного какой-либо его 2-грани и параллельно с ней расположенного, параллелепипеда, конгруэнтного самому многограннику и параллельно с ним расположенному. Бипирамида $bp(P^3)$ и многогранник $R(C^3)$ построены на многограннике P^3 как на сечении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Все 4-мерные L -многогранники, у которых гранью или сечением является параллелепипед P^3 , суть следующие:

$$p(P^3), bp(P^3), R[p(P^2)], R(C^3), R[R(S^2)], P^4.$$

Из предложения 3 вытекает, что в дальнейшем исследовать случаи, в которых участвуют две точки вида τ со связью P , уже нет необходимости. А из предложения 1 выводим, что не нужно также рассматривать и те наборы определяющих точек, в которых содержатся три точки вида τ , треугольники которых расположены в одной 3-плоскости.

Тем самым мы проведение S -алгоритма дополнили использованием метода слоевого построения, предложенного в работе [6].

Исключив случаи связи P и трех точек с треугольниками в одной 3-плоскости и используя лемму 3, получим для трех точек вида τ следующие 11 видов связей:

$$OOO, OA\beta, OM\gamma, O\beta\alpha, AM\beta, M\gamma\beta, MM\alpha, MAA, MMM, O\beta\beta, M\gamma\gamma.$$

Тройка точек с первой связью задает кросс-полиэдр C^4 , следующие три – бипирамиду $bp[R(S^2)]$, следующие за ними три – L -многогранник T_8 , следующие две – призму $R(S^3)$, наконец, последние две тройки задают многогранник $bp(P^3)$, содержащий параллелепипед P^3 .

При тех же условиях, что и тройки, находим всевозможные четверки точек вида τ . Согласно лемме 3 достаточно рассмотреть тройки

$$OOO, OM\gamma, MM\alpha, MMM.$$

Отбросив четверки

$$OOO(\alpha\beta M), OM\gamma(\beta\beta A), MMM(\gamma\beta O),$$

которые задают соответственно многогранники $bp(P^3)$, $bp(P^3)$ и P^4 , содержащие параллелепипед P^3 , имеем

$$OM\gamma(\beta A\gamma), OM\gamma(\gamma MO), OM\gamma(\alpha\beta M), MM\alpha(MM\alpha).$$

Первые три набора этих точек задают L -многогранник T_9 , последний – L -многогранник T_9^* .

Дополняя, где это позволено нашими условиями, эти четырехточечные наборы пятой точкой, получим следующие набор со связями

$$OM\gamma(\alpha\beta M)(\beta A\gamma O),$$

где в последней скобке названы связи пятой точки соответственно с первой, ..., четвертой точками. Этот набор из пяти точек определяет L -многогранник вида T_{10} .

Шестой точки и большего числа точек вида τ не позволяет добавлять требование, чтобы треугольники никаких трех из них не принадлежали одной 3-плоскости.

Переходим к рассмотрению определяющих точек вида π . Согласно предложению 2 в L -многограннике вершина этого вида может быть только одной, 6-вершинник с такой вершиной представляет собой бездиагональный многогранник комплекса переделывания V_{22}^4 [7], все девять граней которого – тетраэдры. Обозначим этот L -многогранник через T_6 .

Будем добавлять к точке $B = (1, 1, 1, -1, -1)$ вида π точки вида τ . Добавление одной точки дает следующие пять видов связей:

$$\begin{pmatrix} 1, 1, 1, -1, -1 \\ 1, 1, 0, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 1, 1, -1, -1 \\ 0, 0, -1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 1, 1, -1, -1 \\ 1, 0, 0, -1, 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1, 1, 1, -1, -1 \\ -1, 1, 0, 0, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 1, 1, -1, -1 \\ -1, 1, 1, 0, 0 \end{pmatrix}.$$

Точки первых двух видов связей определяют L -многогранники вида T_7 . Третья связь влечет за собой появление в качестве вершин L -многогранника точек $(0, 1, 1, 0 - 1)$, $(1, 0, 1, -1, 0)$, $(1, 1, 0, -1, 0)$, четвертая – точек $(0, 1, 1, -1, 0)$, $(1, 0, 1, 0, -1)$, $(-1, 0, 0, 1, 1)$, пятая – точек $(0, 1, 1, -1, 0)$, $(0, 1, 1, 0, -1)$, $(-1, 0, 0, 1, 1)$. Точки с последними тремя связями определяют соответственно L -многогранники $R[p(P^2)]$, $R[p(P^2)]$, $bp(P^3)$, содержащие параллелепипед P^3 .

Так как добавление точек вида τ в случае многогранника T_7 было рассмотрено выше, на этом наш вывод 4-мерных L -многогранников закончен. Как итог, имеем список четырехмерных L -многогранников, не содержащих прямоугольных параллелепипедов P^3 ни в качестве граней, ни в качестве сечений:

$$S^4, T_6, p[p(P^2)], p(C^3), p[R(S^2)], T_7, R(S^3), T_8, C^4, bp[R(S^2)], T_9, T_9^*, T_{10}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Делоне Б. Н. Геометрия положительных квадратичных форм // УМН. 1937. № 3. С. 16–62; // УМН. 1938. № 4. С. 102–164.
- [2] Erdahl R. M., Ryshkov S. S. The empty sphere // Canad. J. Math. 1987. V. 39. № 4. P. 794–824.
- [3] Барановский Е. П., Власов Е. В., Новикова Н. В. Строение L -разбиений четырехмерных решеток // Деп. ВИНТИ № 78-B91. М.: ВИНТИ, 1991. С. 1–38.
- [4] Барановский Е. П., Кононенко П. Г. Двухслойные L -многогранники 5-мерных решеток // Деп. ВИНТИ № 387-B98. М.: ВИНТИ, 1998. С. 1–28.
- [5] Барановский Е. П. Симплексы L -разбиений евклидовых пространств // Матем. заметки. 1971. Т. 10. № 6. С. 659–670.
- [6] Рышков С. С., Эрдал Р. М. Поэтажное построение L -тел решеток // УМН. 1989. Т. 44. № 2. С. 241–242.
- [7] Рышков С. С., Барановский Е. П. C -типы n -мерных решеток и пятимерные примитивные параллелепипеды (с приложением к теории покрытий) // Тр. МИАН. 1976. Т. 137. С. 3–131.

Ивановский государственный университет

Поступило
16.04.1998