Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. З. Гараев, О нижних оценках L_1 -нормы некоторых экспоненциальных сумм, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 6, 842–850

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1006>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 13:42:45

УДК 511.3

О НИЖНИХ ОЦЕНКАХ L_1 -НОРМЫ НЕКОТОРЫХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СУММ

М. З. Гараев

В работе описывается способ получения нижних оценок L_1 -нормы некоторых экспоненциальных сумм.

Библиография: 3 названия.

1. Введение. Бочкарев [1] описал метод получения нижних оценок L_1 -нормы экспоненциальных сумм. Карацуба [2] обнаружил тесную связь между оценками L_1 -нормы широкого класса экспоненциальных сумм и верхними оценками для числа решений соответствующих диофантовых уравнений.

Пусть $f(x)$ – строго монотонно возрастающая целозначная функция от натурального аргумента x , и пусть уравнение $f(x) + f(y) = f(u) + f(v)$ в натуральных числах x, y, u, v , $1 \leq x, y, u, v \leq n$, имеет $n^3 \Delta(n)$ решений.

ТЕОРЕМА (А. А. Карацуба). Для любых коэффициентов $\gamma(x)$, $|\gamma(x)| = 1$, справедливо неравенство

$$\int_0^1 \left| \sum_{x=1}^n \gamma(x) e^{2\pi i \beta f(x)} \right| d\beta \geq (\Delta(n))^{-1/2}.$$

Теорема Карацубы позволяет по иному подойти к исследованию данной проблемы.

Конягин [3] для строго выпуклых последовательностей получил оценку $\Delta(n) \ll n^{-1/2}$. Последовательность $f(1), f(2), \dots, f(n)$ называется *строго выпуклой*, если $0 < f(2) - f(1) < \dots < f(n) - f(n-1)$. Для доказательства своей теоремы Конягин привлек методы комбинаторной геометрии.

В настоящей работе для некоторых задач мы предлагаем новый способ получения нижней оценки величины $\Delta(n)$. Это позволяет расширить класс последовательностей, на который распространяется результат Конягина. В частности, мы получим новое элементарное доказательство теоремы Конягина.

2. Обозначения и предварительные оценки. Пусть $f(1), f(2), \dots, f(n)$ – растущая последовательность действительных чисел: $f(1) < f(2) < \dots < f(n)$. Обозначим через $J = J(n)$ число решений уравнения

$$f(x) + f(y) = f(u) + f(v), \quad 1 \leq x, y, u, v \leq n,$$

а через $J_0 = J_0(n)$ число решений уравнения

$$f(x) + f(y) = f(u) + f(v), \quad 1 \leq x \leq y \leq n, \quad 1 \leq u \leq v \leq n.$$

Очевидно, что $J \leq 4J_0$. Поэтому для получения верхней оценки величины J достаточно получить верхнюю оценку для J_0 .

Через F^2 обозначим множество различных чисел вида $f(x) + f(y)$, $1 \leq x \leq y \leq n$. Для каждого $s_j \in F^2$ через m_j обозначим число решений уравнения

$$s_j = f(x) + f(y), \quad 1 \leq x \leq y \leq n. \quad (1)$$

Упорядочим числа s_j так, чтобы m_j не убывали, т.е. пусть $s_1, s_2, \dots, s_w$ — все числа из F^2 , занумерованные так, что $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_w$. Очевидно, что $m_j \leq n$, $w \leq n^2$,

$$J_0 = \sum_{j \leq w} m_j^2, \quad J \leq 4 \sum_{j \leq w} m_j^2, \quad \sum_{j \leq w} m_j = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Пусть $s_1, s_2, \dots, s_k$ — все те числа, для которых $m_1 \geq \dots \geq m_k \geq 2$. Тогда

$$J \leq 4 \sum_{j \leq k} m_j^2 + 4n^2.$$

Всюду ниже существование нескольких таких чисел $m_j \geq 2$ предполагается. В противном случае все сформулированные теоремы становятся очевидными.

При фиксированном l , $1 \leq l < n$, через $J_l = J_l(n)$ будем обозначать число решений уравнения

$$f(x) + f(y) = f(x+l) + f(z), \quad 1 \leq x \leq y \leq n, \quad x+l \leq z \leq n.$$

Далее $\gamma(1), \gamma(2), \dots, \gamma(n)$ обозначают произвольные комплексные числа, по модулю равные единице. И наконец, символ “ $\gg$ ” будет обозначать знак Виноградова с абсолютной постоянной, “ $\gg_{\alpha, A}$ ” обозначает, что постоянная в знаке Виноградова зависит только от α и A .

3. Основное утверждение.

ЛЕММА. Пусть последовательность действительных чисел $\Phi_l = \Phi_l(n)$, $1 \leq l < n$, такова, что $J_l \leq \Phi_l$ при всех l . Тогда для любого натурального числа r , $1 \leq r \leq k$, существуют действительное число a и натуральные числа $q, l_1, \dots, l_q, l_{q+1}$ такие, что либо

- 1) $\Phi_{l_1} \geq \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_r}{2}$, $l_1 \leq \frac{2nr}{m_1 + m_2 + \dots + m_r}$, либо
- 2) $l_1 < \dots < l_q < l_{q+1} < n$, $0 < a \leq \Phi_{l_{q+1}}$, $\Phi_{l_1} + \dots + \Phi_{l_q} + a = (m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \dots + (m_r - 1)$, $l_1 \Phi_{l_1} + \dots + l_q \Phi_{l_q} + l_{q+1} a \leq nr$.

4. Вывод теоремы Конягина.

ТЕОРЕМА (С. В. Конягин). Пусть $f(1), f(2), \dots, f(n)$ – строго выпуклая последовательность целых чисел. Тогда

$$\int_0^1 \left| \sum_{x=1}^n \gamma(x) e^{2\pi i \beta f(x)} \right| d\beta \gg n^{1/4}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме Карацубы достаточно доказать, что $J \ll n^{5/2}$.

Для применения леммы сначала оценим J_l , которое равняется числу решений уравнения

$$f(x) + f(y) = f(x+l) + f(z), \quad 1 \leq x \leq y \leq n, \quad x+l \leq z \leq n.$$

Так как последовательность $f(1), f(2), \dots, f(n)$ выпуклая, то $1 \leq x < x+l \leq z < y$. В силу этого при всех $d \geq l$ имеем $f(y) - f(y-d) > f(x+l) - f(x)$. Следовательно, $0 < y-z < l$. При фиксированных x и $y-z = c < l$ наше уравнение будет иметь не более одного решения, так как $f(z+c) - f(z)$ растёт с ростом z . Поэтому $J_l \leq (l-1)n$. В качестве $\Phi_l = \Phi_l(n)$ берём число ln .

Докажем, что $m_r < 6nr^{-1/3}$. Применим лемму.

Если $l_1 n \geq (m_1 + \dots + m_r)/2$, $l_1 \leq 2nr/(m_1 + m_2 + \dots + m_r)$, то ввиду того, что $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_r$, имеем $m_r \leq 2nr^{-1/2} < 6nr^{-1/3}$.

Если же это не так, то в обозначениях леммы имеем

$$l_1 < \dots < l_q < l_{q+1} < n, \quad 0 < a \leq l_{q+1}n, \quad (5)$$

$$(l_1 + \dots + l_q)n + a = (m_1 - 1) + \dots + (m_r - 1) \geq \frac{m_1 + \dots + m_r}{2}, \quad (6)$$

$$(l_1^2 + \dots + l_q^2)n + l_{q+1}a \leq nr. \quad (7)$$

Из (5), (6) следует, что

$$q+1 \leq 2q \leq 2\sqrt{\frac{2(m_1 + m_2 + \dots + m_r)}{n}}. \quad (8)$$

С учетом (7), (8), применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} n^2 r &\geq (l_1^2 + \dots + l_q^2)n^2 + a^2 \geq \frac{(l_1 n + \dots + l_q n + a)^2}{q+1} \\ &\geq \frac{(m_1 + m_2 + \dots + m_r)^2}{4(q+1)} \geq \frac{(m_1 + m_2 + \dots + m_r)^{3/2} n^{1/2}}{8\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

откуда $m_r < 6n/r^{1/3}$ при всех r , $1 \leq r \leq k$. Это же неравенство верно и для тех r , для которых $m_r = 1$. Учитывая, что

$$\sum_j m_j = \frac{n(n+1)}{2},$$

получим

$$J \leq 4 \sum_j m_j^2 = 4 \left(\sum_{j \leq n^{3/2}} m_j^2 + \sum_{j > n^{3/2}} m_j^2 \right) \leq 2^8 n^{5/2}.$$

5. ТЕОРЕМА. Пусть $1 < \alpha < 2$, $A > 0$. Тогда при $n \geq n_1(\alpha, A) > 0$ справедливо неравенство

$$\int_0^1 \left| \sum_{x=1}^n \gamma(x) e^{2\pi i \beta [A x^\alpha]} \right| d\beta \gg_{\alpha, A} \min \left(\frac{n^{(\alpha-1)/2}}{\log n}, n^{1/4} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду того, что $\alpha > 1$, существует число $n_0 = n_0(\alpha, A) \geq 0$ такое, что последовательность $f(1), f(2), \dots$, где $f(x) = [A(x+n_0)^\alpha]$, будет возрастать. Предполагая n достаточно большим, будем оценивать J_l – число решений уравнения

$$f(x) + f(y) = f(x+l) + f(z), \quad 1 \leq x \leq y \leq n, \quad x+l \leq z \leq n. \quad (9)$$

Пусть $x = x_0 < n$ – такое значение переменной x , для которого уравнение (9) имеет наибольшее число решений в переменных y, z , но при фиксированных x . Обозначим это количество через J'_l . Тогда J'_l есть число решений в натуральных числах y, z уравнения

$$A(y+n_0)^\alpha - A(z+n_0)^\alpha = A(x_0+l+n_0)^\alpha - A(x_0+n_0)^\alpha + 4\Theta$$

с условиями $x_0 + l \leq z < y \leq n$, где $|\Theta| \leq 1$, Θ зависит от всех переменных и констант.

Имеем

$$J_l \leq n J'_l.$$

Далее нетрудно видеть, что $0 < y - z \leq C_1 l$, где $C_1 = C_1(\alpha, A)$ некоторая постоянная. Действительно, пусть $y - z = l + \delta_0$, $\delta_0 \geq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} & 4 + A(x_0 + l + n_0)^\alpha - A(x_0 + n_0)^\alpha \\ & \geq A(y + n_0)^\alpha - A(z + n_0)^\alpha = A(z + l + \delta_0 + n_0)^\alpha - A(z + n_0)^\alpha \\ & \geq A(x_0 + l + l + \delta_0 + n_0)^\alpha - A(x_0 + l + n_0)^\alpha > A(x_0 + l + \delta_0 + n_0)^\alpha - A(x_0 + n_0)^\alpha \\ & > A(x_0 + l + n_0)^\alpha - A(x_0 + n_0)^\alpha + A\delta_0^\alpha, \end{aligned}$$

откуда $A\delta_0 < 4$.

Таким образом, $0 < y - z \leq C_1 l$. Сделаем подстановку $y = z + \delta$. Имеем

$$A(z + \delta + n_0)^\alpha - A(z + n_0)^\alpha = C_2 + 4\Theta_1, \quad z + \delta \leq n. \quad (10)$$

Здесь $C_2 = A(x_0 + n_0 + l)^\alpha - A(x_0 + n_0)^\alpha$ зафиксировано, $|\Theta_1| \leq 1$. Пусть при фиксированных δ , $0 < \delta \leq C_1 l$, уравнение (10) имеет $J_l(\delta)$ решений. Тогда

$$J'_l = \sum_{0 < \delta \leq C_1 l} J_l(\delta), \quad J_l \leq n \sum_{0 < \delta \leq C_1 l} J_l(\delta). \quad (11)$$

Покажем, что $J_l(\delta) \ll_{\alpha, A} 1 + n^{2-\alpha}/\delta$. Пусть z_0 – самое маленькое по величине решение уравнения (10). Тогда запишем (10) в виде неравенства

$$A(z + \delta + n_0)^\alpha - A(z + n_0)^\alpha < A(z_0 + \delta + n_0)^\alpha - A(z_0 + n_0)^\alpha + 8.$$

Это неравенство можно переписать в виде

$$\alpha(\alpha - 1) \int_{z_0}^z \int_0^\delta A(\varphi + \psi + n_0)^{\alpha-2} d\varphi d\psi < 8.$$

Пределы изменения φ, ψ таковы, что $\varphi + \psi + n_0 \leq n + n_0 \leq 2n$. Следовательно,

$$0 < \delta(z - z_0) \ll_{\alpha, A} n^{2-\alpha},$$

т.е.

$$0 < z - z_0 \ll_{\alpha, A} \frac{n^{2-\alpha}}{\delta}.$$

Это означает, что

$$J_l(\delta) \ll_{\alpha, A} 1 + \frac{n^{2-\alpha}}{\delta}.$$

Поэтому из (11) имеем

$$J_l \leq Cn(l + n^{2-\alpha} \log n),$$

где $C = C(\alpha, A)$ – константа, зависящая от α, A .

Теперь применим лемму. Наша цель – доказать, что

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r \ll_{\alpha, A} n^{(4-\alpha)/2} (\log n)^{1/2} r^{1/2} + n^{3-\alpha} \log n + nr^{2/3}$$

для всех r , $1 \leq r \leq k$. Для доказательства этого неравенства берем в лемме $\Phi_l = Cn \times (l + n^{2-\alpha} \log n)$.

Если $\Phi_{l_1} \geq (m_1 + m_2 + \dots + m_r)/2$, $l_1 \leq 2nr/(m_1 + m_2 + \dots + m_r)$, то

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r \leq 2C \frac{2n^2r}{m_1 + m_2 + \dots + m_r} + Cn^{3-\alpha} \log n,$$

откуда

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r \ll_{\alpha, A} nr^{1/2} + n^{3-\alpha} \log n,$$

т.е. искомое неравенство получено.

В противном случае в обозначениях леммы имеем

$$\begin{aligned} l_1 < \dots < l_q < l_{q+1} < n, \quad 0 < a \leq Cn(l_{q+1} + n^{2-\alpha} \log n), \\ Cn(l_1 + \dots + l_q) + Cn^{3-\alpha} \log n \cdot q + a &= (m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \dots + (m_r - 1), \\ Cn(l_1^2 + \dots + l_q^2) + Cn^{3-\alpha} \log n(l_1 + \dots + l_q) + l_{q+1}a &\leq nr. \end{aligned}$$

Далее, в случае $(m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \dots + (m_r - 1) \leq 10Cn^{3-\alpha} \log n$ искомое неравенство очевидно. Поэтому будем считать, что

$$(m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \dots + (m_r - 1) > 10Cn^{3-\alpha} \log n.$$

Если $a/(Cn) < 2n^{2-\alpha} \log n$, то имеем систему

$$\begin{cases} l_1^2 + \dots + l_q^2 + n^{2-\alpha} \log n \cdot (l_1 + \dots + l_q) \leq \frac{r}{C}, \\ l_1 + \dots + l_q + n^{2-\alpha} \log n \cdot q > \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_r}{3Cn}, \\ q^2 + qn^{2-\alpha} \log n \leq \frac{2(m_1 + m_2 + \dots + m_r)}{Cn}. \end{cases} \quad (12)$$

Наоборот, если $a/(Cn) \geq 2n^{2-\alpha} \log n$, то $l_{q+1} \geq a/(2Cn)$, и тогда имеем систему

$$\begin{cases} l_1^2 + \dots + l_q^2 + n^{2-\alpha} \log n \cdot (l_1 + \dots + l_q) + \left(\frac{a}{2Cn}\right)^2 \leq \frac{r}{C}, \\ l_1 + \dots + l_q + n^{2-\alpha} \log n \cdot q + \frac{a}{Cn} > \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_r}{3Cn}, \\ q^2 + qn^{2-\alpha} \log n \leq \frac{2(m_1 + m_2 + \dots + m_r)}{Cn}. \end{cases} \quad (13)$$

Все это означает, что либо справедлива система (12), либо (13). Если в (13) взять $a = 0$, то получим (12). Поэтому предполагая, что система (13) справедлива при некотором $a \geq 0$, и доказав при этом требуемую оценку для $m_1 + m_2 + \dots + m_r$, мы тем самым разберем случай и с системой (12).

Итак, пусть имеет место (13), $a \geq 0$. Среди чисел $l_1, \dots, l_q$ могут быть меньшие, чем $n^{2-\alpha} \log n$. Пусть $l_1 < \dots < l_t < n^{2-\alpha} \log n \leq l_{t+1} < \dots < l_q$. Может случиться так, что такого t не существует (т.е. $n^{2-\alpha} \log n \leq l_1 < \dots < l_q$) или же $t = q$ ($l_1 < \dots < l_q < n^{2-\alpha} \log n$). В этих случаях следующие ниже рассуждения повторяются с небольшим упрощением. Имеем

$$\begin{aligned} (l_1 + \dots + l_t) n^{2-\alpha} \log n + l_{t+1}^2 + \dots + l_q^2 + \left(\frac{a}{2Cn}\right)^2 &\leq \frac{r}{C}, \\ tn^{2-\alpha} \log n + l_{t+1} + \dots + l_q + \frac{a}{Cn} \\ &\geq \frac{1}{2} \left((l_1 + n^{2-\alpha} \log n) + \dots + (l_q + n^{2-\alpha} \log n) + \frac{a}{Cn} \right) \\ &> \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_r}{6Cn}, \\ t \leq q, \quad q^2 + qn^{2-\alpha} \log n &\leq \frac{2(m_1 + m_2 + \dots + m_r)}{Cn}, \end{aligned}$$

т.е.

$$(l_1 + \dots + l_t) n^{2-\alpha} \log n + l_{t+1}^2 + \dots + l_q^2 + \left(\frac{a}{2Cn}\right)^2 \leq \frac{r}{C}, \quad (14)$$

$$tn^{2-\alpha} \log n + l_{t+1} + \dots + l_q + \frac{a}{Cn} > \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_r}{6Cn}, \quad (15)$$

$$t \leq q, \quad q^2 + qn^{2-\alpha} \log n \leq \frac{2(m_1 + m_2 + \dots + m_r)}{Cn}. \quad (16)$$

Ввиду того, что $l_1 < \dots < l_q$, из (14) имеем

$$t^2 n^{2-\alpha} \log n + (l_{t+1}^2 + \dots + l_q^2) + \left(\frac{a}{Cn}\right)^2 \leq \frac{4r}{C}. \quad (17)$$

Если $tn^{2-\alpha} \log n > (m_1 + m_2 + \dots + m_r)/(12Cn)$, то из (17) следует, что

$$\frac{4r}{C} \geq t^2 n^{2-\alpha} \log n > \left(\frac{m_1 + m_2 + \dots + m_r}{12Cn}\right)^2 \frac{1}{n^{2-\alpha} \log n},$$

откуда

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r \ll_{\alpha, A} 24C^{1/2} n^{(4-\alpha)/2} (\log n)^{1/2} r^{1/2},$$

т.е. искомое неравенство получено.

Пусть теперь $tn^{2-\alpha} \log n \leq (m_1 + m_2 + \dots + m_r)/(12Cn)$. В этом случае из (15) имеем

$$l_{t+1} + \dots + l_q + \frac{a}{Cn} \geq \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_r}{12Cn}, \quad (18)$$

из (17)

$$\frac{4r}{C} \geq l_{t+1}^2 + \dots + l_q^2 + \left(\frac{a}{Cn}\right)^2. \quad (19)$$

Применяя к (19) неравенство Гёльдера и учитывая (18), получим, что

$$\frac{4r}{C} \geq \frac{1}{2q} \left(l_{t+1} + \dots + l_q + \frac{a}{Cn}\right)^2 > \frac{1}{2q} \left(\frac{m_1 + m_2 + \dots + m_r}{12Cn}\right)^2. \quad (20)$$

Но согласно (16)

$$2q \leq 3 \sqrt{\frac{m_1 + m_2 + \dots + m_r}{Cn}}.$$

Поэтому из (20) следует, что

$$\left(\frac{m_1 + m_2 + \dots + m_r}{n}\right)^{3/2} \ll_{\alpha, A} r,$$

откуда

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r \ll_{\alpha, A} nr^{2/3}.$$

Итак, существует постоянная $C_2 = C_2(\alpha, A) > 0$ такая, что для любого r , $1 \leq r \leq k$, выполняется неравенство

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r \leq C_2 (n^{(4-\alpha)/2} (\log n)^{1/2} r^{1/2} + n^{3-\alpha} \log n + nr^{2/3}).$$

Отсюда следует, что для любого r либо

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r \leq 3C_2 nr^{2/3}, \quad (21)$$

либо

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r \leq 3C_2 n^{(4-\alpha)/2} (\log n)^{1/2} r^{1/2}, \quad (22)$$

либо

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r \leq 3C_2 n^{3-\alpha} \log n. \quad (23)$$

Пусть B_1 – множество тех r , для которых имеет место (21). Тогда при $r \in B_1$ имеем $m_r \leq 3C_2 n r^{-1/3}$. Поэтому так же, как и при выводе теоремы Конягина, получим

$$\sum_{r \in B_1} m_r^2 \ll_{\alpha, A} n^{5/2}. \quad (24)$$

Пусть B_2 – множество тех r , для которых имеет место (22). Тогда для $r \in B_2$ имеем

$$\sum_{r \in B_2} m_r^2 \ll_{\alpha, A} n^{4-\alpha} \log^2 n. \quad (25)$$

Пусть B_3 – множество тех r , для которых имеет место (23), а r_1 – максимальное число из множества B_3 . Тогда

$$\sum_{r \in B_3} m_r^2 \leq n(m_1 + \dots + m_{r_1}) \leq 3C_2 n^{4-\alpha} \log n. \quad (26)$$

Поэтому из (24)–(26) получим, что

$$J \ll_{\alpha, A} n^{4-\alpha} \log^2 n + n^{5/2}.$$

Теперь остается применить теорему Карацубы, предварительно заметив, что

$$\int_0^1 \left| \sum_{x=1}^n \gamma(x) e^{2\pi i \beta [A x^\alpha]} \right| d\beta \geq \int_0^1 \left| \sum_{x=1}^n \gamma_1(x) e^{2\pi i \beta f(x)} \right| d\beta - 2n_0,$$

где $|\gamma_1(x)| = 1$ при $1 \leq x \leq n$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность профессору В.Н. Чубарикову за помощь в подготовке работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бочкарев С. В. Об одном методе оценки L_1 -нормы экспоненциальной суммы // Тр. МИАН. 1997. Т. 218. С. 74–76.
- [2] Карацуба А. А. Об оценке L_1 -нормы одной экспоненциальной суммы // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 3. С. 465–468.
- [3] Конягин С. В. Об оценке L_1 -нормы одной экспоненциальной суммы // Теория приближений функций и операторов. Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения С.Б. Стечкина. Екатеринбург, 2000. С. 88–89.