Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Дегтев, Почти комбинаторно-селекторные множества,
Матем. заметки, 2000, том 68, выпуск 6, 851–853

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1007>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 12:24:50

УДК 510.5

ПОЧТИ КОМБИНАТОРНО-СЕЛЕКТОРНЫЕ МНОЖЕСТВА

А. Н. Дёгтев

Исследуются классы подмножеств натурального ряда, основанные на понятии селекторных функций типа селектора полурекурсивного множества по Джокушу.

Библиография: 4 названия.

Пусть $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $A \subseteq \mathbb{N}$ и β — n -местная булева функция (БФ). Назовем A почти β -комбинаторно-селекторным (β -КС) множеством, если найдутся элемент $\bar{a}$ из $\bar{A} = \mathbb{N} \setminus A$ и n -местная общерекурсивная функция (ОРФ) f такие, что

$$\begin{aligned} & (\forall x_1, \dots, x_n) (f(x_1, \dots, x_n) \in \{x_1, \dots, x_n, \bar{a}\}) \wedge \\ & (f(x_1, \dots, x_n) \in A \iff \beta(\chi(x_1), \dots, \chi(x_n)) = 1), \end{aligned} \quad (*)$$

где χ — характеристическая функция множества A . В этом случае мы говорим, что A является β -комбинаторно-селекторным множеством посредством ОРФ f . Цель данной работы — получить информацию о классах $K(\beta)$ всех почти β -КС множеств.

Если в (*) убрать элемент $\bar{a}$, то мы придем к понятию β -селекторных множеств [1], классы которых для БФ β таких, что $\beta(x, \dots, x) = x$ (другие БФ неинтересны), совпадают или с классом $F^{(0)}$ всех рекурсивных множеств, или с классом $F^{(1)}$ всех полурекурсивных множеств, или с классом $F^{(\infty)}$ всех подмножеств $\mathbb{N}$. С другой стороны, в заметке [2] почти xy -КС множества были названы почти полурекурсивными. Такое название навеяно тем, что класс xy -селекторных множеств равен $F^{(1)}$ и равен классу $(x \vee y)$ -селекторных множеств [3]. Ниже $\emptyset$ и $\mathbb{N}$ не считаются почти β -КС множествами и, в частности, они исключаются из $F^{(0)}$ и других классов. Далее, легко проверить, что $K(0) = F^{(\infty)}$ и если $\beta(0, \dots, 0) = 1$, то $K(\beta) = \emptyset$, откуда $K(1) = \emptyset$. Наконец, $K(x) = F^{(\infty)}$.

ЛЕММА 1. Пусть $\beta(0, \dots, 0) = 0$ и β — немонотонная БФ. Тогда $K(\beta) = F^{(0)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $A \in F^{(0)}$ и $\bar{a} \in \bar{A}$, то положим по определению

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \min\{x : x \in \{x_1, \dots, x_n\} \cap A\}, & \text{если } \beta(\chi(x_1), \dots, \chi(x_n)) = 1; \\ \bar{a}, & \text{если } \beta(\chi(x_1), \dots, \chi(x_n)) = 0. \end{cases}$$

Ясно, что A будет почти β -КС множеством посредством ОРФ f . Обратно, пусть функция $\beta = \beta(x_1, \dots, x_n)$ немонотонная по некоторому аргументу, например, x_1 . Тогда найдется набор $\theta_2, \dots, \theta_n \in \{0, 1\}$ такой, что $\beta(0, \theta_2, \dots, \theta_n) = 1$ и $\beta(1, \theta_2, \dots, \theta_n) = 0$. отождествляем с y те переменные x_i , для которых $\theta_i = 0$, и с z те переменные x_j , для которых $\theta_j = 1$. Если A есть почти β -КС множество посредством ОРФ f , то сделаем

в f аналогичное отождествление переменных, получив ОРФ $g(x_1, y, z)$. Возьмем $a \in A$, и тогда очевидно, что $A = \{x : g(x, \bar{a}, a) = \bar{a}\}$. Значит, A – рекурсивное множество.

Итак, интерес представляют лишь классы $K(\beta)$, где β – монотонные функции, отличные от констант, и $\beta \equiv x$.

ЛЕММА 2. Если БФ β' получена из β в результате отождествления некоторых из переменных или приписывания каким-то из них константы 0, то $K(\beta) \subseteq K(\beta')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – почти β -КС множество посредством ОРФ f . Если в β отождествить x_1 с x_2 или приписать переменной x_1 константу 0, получив БФ β' , то A окажется почти β' -КС множеством посредством ОРФ f' , которая получается из f отождествлением в ней x_1 с x_2 или соответственно приписыванием переменной x_1 числа $\bar{a}$.

Обозначим через $[\beta]$ наименьший замкнутый относительно суперпозиций класс БФ, содержащий β .

ЛЕММА 3. Если β – монотонная БФ, $\beta \neq 0, 1$, и $\gamma \in [\beta]$, то $K(\beta) \subseteq K(\gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\beta', \beta'' \in [\beta]$ и

$$\gamma(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_m) = \beta'(x_1, \dots, x_{n-1}, \beta''(y_1, \dots, y_m)).$$

Нетрудно проверить, что если A – почти β -КС и β'' -КС множество посредством ОРФ f' и f'' соответственно, то A будет и почти γ -КС множеством посредством ОРФ

$$f'(x_1, \dots, x_{n-1}, f''(y_1, \dots, y_m)).$$

Из описания всех замкнутых классов БФ [4] следует, что если β – монотонная БФ, $\beta \neq 0, 1, x$, то имеет место один из следующих четырех случаев:

- 1) $x \vee y \in [\beta]$;
- 2) $xy \vee xz \vee yz \in [\beta]$;
- 3) $xy \in [\beta]$;
- 4) $xy \in [\beta] \wedge \beta \notin [xy] \implies xy \vee xz \in [\beta]$.

Отождествляя в БФ $xy \vee xz$ переменную z с переменной y , по лемме 2 получаем вложение $K(xy \vee xz) \subseteq K(xy)$.

ЛЕММА 4. Если β – монотонная БФ, $\beta \neq 0, 1$, то имеет место вложение

$$K(x \vee y) \subseteq K(\beta).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если A – почти $(x \vee y)$ -КС множество посредством ОРФ f , то положим

$$g(x, y) = \begin{cases} x, & \text{если } f(x, y) \in \{x, \bar{a}\}; \\ y & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Так как g – селекторная ОРФ и

$$(\forall x)(\forall y)(x \in A \vee y \in A \iff g(x, y) \in A),$$

то A оказывается полурекурсивным множеством, т.е. $K(x \vee y) = F^{(1)}$. Но ОРФ g позволяет по монотонной функции $\beta \neq 0, 1, x$ определить ОРФ h такую, что [3] для всех $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$ выполнены следующие условия

- 1) $h(x_1, \dots, x_n) \in \{x_1, \dots, x_n\}$;
- 2) $\beta(\chi(x_1), \dots, \chi(x_n)) = 1 \iff h(x_1, \dots, x_n) \in A$.

Поэтому $K(x \vee y) \subseteq K(\beta)$.

ЛЕММА 5. *Имеет место равенство $K(x \vee y) = K(xz \vee yz)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если A – почти $(xz \vee yz)$ -КС множество посредством ОРФ f и $a \in A$, то положим

$$g(x, y) = \begin{cases} x, & \text{если } f(x, y, a) \in \{x, \bar{a}\}, \\ y & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Легко проверить, что A посредством ОРФ g является полурекурсивным множеством. Действительно, если $f(x, y, \bar{a}) = \bar{a}$, то $x, y \notin A$. Если же $f(x, y, a) = x$ (соответственно y) и $x \neq \bar{a}$ (соответственно $y \neq \bar{a}$), то невозможно, что $x \notin A$ и $y \in A$ (соответственно $x \in A$ и $y \notin A$). С другой стороны, как следует из леммы 4, $K(x \vee y) \subseteq K(xz \vee yz)$.

ЛЕММА 6. *Имеет место равенство $K(x \vee y) = K(xy \vee xz \vee yz)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя леммы 4 и 5, достаточно показать, что

$$K(xy \vee xz \vee yz) \subseteq K(xy \vee xz).$$

Пусть A – почти $(xy \vee xz \vee yz)$ -КС множество посредством ОРФ f . Положим

$$g(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & \text{если } f(x, y, z) \in \{x, \bar{a}\}; \\ f(x, y, \bar{a}), & \text{если } f(x, y, z) = y \text{ и } y \notin \{x, \bar{a}\}; \\ f(x, \bar{a}, z), & \text{если } f(x, y, z) = z \text{ и } z \notin \{x, \bar{a}\}. \end{cases}$$

Как и в доказательстве леммы 5, нетрудно показать, что A будет почти $(xy \vee xz)$ -КС множеством посредством ОРФ g .

В статье [2] показано также, что существуют почти полурекурсивные, но не полурекурсивные множества и, разумеется, множества, не являющиеся почти полурекурсивными. Отсюда и из лемм следует основная

ТЕОРЕМА. *Если БФ β такова, что $\beta(x, \dots, x) = x$, то $K(\beta)$ совпадает с одним из классов*

$$F^{(0)} \subset F^{(1)} \subset K(xy) \subset F^{(\infty)},$$

причем включения везде строгие.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дёгтев А. Н. Рекурсивно-комбинаторные свойства подмножеств натуральных чисел // Алгебра и логика. 1990. Т. 29. №3. С. 303–314.
- [2] Дёгтев А. Н. Почти полурекурсивные множества // Матем. заметки. 1999. Т. 66. №2. С. 188–193.
- [3] Jockusch C. G. Semirecursive sets and positive reducibility // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 131. P. 420–436.
- [4] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Г. Функция алгебры логики и класса Поста. М.: Наука, 1966.