Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Кужель, Об определении свободной эволюции в схеме рассеяния Лакса–Филлипса для дифференциально-операторных уравнений второго порядка, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 6, 854–861

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1008>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 16:05:09

УДК 517.432

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СВОБОДНОЙ ЭВОЛЮЦИИ В СХЕМЕ РАССЕЯНИЯ ЛАКСА–ФИЛЛИПСА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

С. А. Кужель

В работе определены необходимые и достаточные условия на абстрактный положительный самосопряженный оператор L , при которых дифференциально-операторное уравнение $u_{tt} = -Lu$ определяет свободную эволюцию в схеме рассеяния Лакса–Филлипса.

Библиография: 8 названий.

Известно [1], что использование схемы рассеяния Лакса–Филлипса для изучения возмущений в ограниченной области классического волнового уравнения позволяет получить важные результаты о связи между сингулярностями матрицы рассеяния и характером возмущения. В связи с этим является актуальной задача применения схемы Лакса–Филлипса для изучения эволюционной системы, что задается абстрактным дифференциально-операторным уравнением

$$u_{tt} = -Lu, \quad (1)$$

где L – положительный самосопряженный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Понятно, что одним из принципиальных моментов для решения такой задачи является естественное определение условий на абстрактный оператор L , при которых уравнение (1) задает свободную эволюцию в схеме рассеяния Лакса–Филлипса. Целью настоящей заметки является решение этого вопроса.

1. Вспомогательные определения и утверждения. Пусть L – произвольный положительный самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Пополнение его области определения $D(L)$ по норме $\|u\|_L^2 := (Lu, u)$ обозначим через $\mathfrak{H}_L$.

Гильбертово пространство $H_L = \mathfrak{H}_L \oplus \mathfrak{H}$ будем называть *энергетическим пространством*. Элементы этого пространства удобно обозначать в виде матриц-столбцов $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, где $u \in \mathfrak{H}_L$ и $v \in \mathfrak{H}$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке CRDF, грант № UM1-2090.

Положим $v = u_t$ и перепишем уравнение (1) в виде

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Оператор

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -L & 0 \end{pmatrix}, \quad D(Q) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mid \{u, v\} \subset D(L) \right\} \quad (2)$$

кососамосопряжен в существенном в пространстве H_L . Его замыкание $Q_L = \overline{Q}$ является генератором унитарной в H_L группы решений $W_L(t) = e^{Q_L t}$ задачи Коши для уравнения (1).

В энергетическом пространстве H_L определим оператор *обращения времени* [2, с. 63]

$$J \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}. \quad (3)$$

В силу (2) и (3) операторы Q_L и J антикоммутируют и, следовательно, $JW_L(t) = W_L(-t)J$.

Напомним [1], что в теории рассеяния Лакса–Филлипса уравнение (1) задает свободную эволюцию, если группа $W_L(t)$ решений задачи Коши этого уравнения имеет в энергетическом пространстве H_L подпространства D_- и D_+ со свойствами¹:

- (i) $W_L(-t)D_- \subset D_-$, $W_L(t)D_+ \subset D_+$ ($t \geq 0$);
- (ii) $\bigcap_{t \geq 0} W_L(-t)D_- = \bigcap_{t \geq 0} W_L(t)D_+ = \{0\}$,
- (iii) $D_- \oplus D_+ = H_L$.

Полагая в (1) $L = -\Delta$, $D(L) = W_2^2(\mathbb{R}^n)$ (n – нечетное), мы получаем классическое волновое уравнение в пространстве нечетной размерности. В [1] показано, что это уравнение определяет свободную эволюцию в схеме рассеяния Лакса–Филлипса и подпространства D_+ и D_- со свойствами (i)–(iii) совпадают с замыканием в $H_{-\Delta}$ множеств начальных данных

$$\left\{ \begin{pmatrix} u(x, 0) \\ u_t(x, 0) \end{pmatrix} \right\} \quad (4)$$

решений $u(x, t)$ волнового уравнения $u_{tt}(x, t) = \Delta u(x, t)$, которые обращаются в нуль в переднем $|x| < t$ и заднем $|x| < -t$ конусах соответственно. Отметим, что эти подпространства связаны соотношением

$$(iv) \quad JD_- = D_+,$$

где J – оператор обращения времени в энергетическом пространстве $H_{-\Delta}$.

Понятно, что существование для классического волнового уравнения подпространств вида (4) со свойствами (i)–(iv) обусловлено некоторыми свойствами самосопряженного в $L_2(\mathbb{R}^n)$ оператора Лапласа $L = -\Delta$, $D(L) = W_2^2(\mathbb{R}^n)$. Задача определения таких свойств для общего случая абстрактного дифференциально-операторного уравнения (1) была рассмотрена в [3], [4]. В частности, в этих работах показано, что достаточным

¹В [1] на подпространства $D_{\pm}$ налагается дополнительное условие $\overline{\bigcup W_L(t)D_-} = \overline{\bigcup W_L(t)D_+} = H_L$, которое является прямым следствием условий (i)–(iii).

условием существования для группы решений задачи Коши $W_L(t)$ уравнения (1) подпространств $D_{\pm}$ со свойствами (i)–(iv) является следующее свойство самосопряженного оператора L : в пространстве $\mathfrak{H}$ можно выбрать такой простой² максимальный симметрический оператор B , что

$$L \supset B^2 \quad \text{и} \quad (Lu, u) = \|B^*u\|^2 \quad (\forall u \in D(L)). \quad (5)$$

При выполнении этого условия подпространства D_+ и D_- совпадают с замыканием в H_L множеств

$$\left\{ \begin{pmatrix} u \\ iB^*u \end{pmatrix} \mid \forall u \in D(L) \right\} \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{pmatrix} u \\ -iB^*u \end{pmatrix} \mid \forall u \in D(L) \right\} \quad (6)$$

соответственно.

В случае оператора Лапласа Δ простой максимальный симметрический оператор B в $L_2(\mathbb{R}^n)$ (n – нечетное) можно определить следующим образом:

$$B = F^{-1}i \frac{d}{ds} F, \quad D(B) = F^{-1} \dot{W}_2^1(\mathbb{R}_+, N) \quad (7)$$

($\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, $N = L_2(S^{n-1})$ – гильбертово пространство квадратично интегрируемых на единичной сфере S^{n-1} в $\mathbb{R}^n$ функций). В формуле (7) оператор F изометрически отображает пространство $L_2(\mathbb{R}^n)$ на пространство $L_2(\mathbb{R}_+, N)$, и на быстро убывающих гладких функциях $u(x) \in S(\mathbb{R}^n)$ задается равенством

$$(Fu)(s, w) = (\partial_s^m Ru)(s, w) \quad \left(m = \frac{n-1}{2}, \quad s \geq 0, \quad w \in S^{n-1} \right),$$

где R – преобразование Радона [5]. При таком выборе оператора B равенства (4) и (6) определяют одни и те же подпространства для волнового уравнения.

Любой самосопряженный оператор L , удовлетворяющий при фиксированном операторе B условиям (5), будем называть *невозмущенным оператором*.

Таким образом, если оператор L в правой части уравнения (1) является невозмущенным, то это уравнение определяет свободную эволюцию в схеме рассеяния Лакса–Филлипса. В следующем пункте мы докажем обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Если для группы решений $W_L(t)$ задачи Коши для уравнения (1) существуют в энергетическом пространстве H_L подпространства $D_{\pm}$ со свойствами (i)–(iv), то оператор L в правой части уравнения (1) является невозмущенным.*

²Симметрический оператор называется *простым*, если он не индуцирует самосопряженный оператор в любом нетривиальном инвариантном подпространстве.

2. Доказательство теоремы 1. Пусть $D_{\pm}$ – подпространства со свойствами (i)–(iv) для группы решений $W_L(t)$. В силу теоремы о трансляционном представлении [1] существует такое изометрическое отображение T энергетического пространства H_L на $L_2(\mathbb{R}, N)$ (N – вспомогательное гильбертово пространство), что

$$TQ_L = -\frac{d}{ds}T, \quad TD(Q_L) = W_2^1(\mathbb{R}, N), \quad (8)$$

$$TD_- = L_2(\mathbb{R}_-, N), \quad TD_+ = L_2(\mathbb{R}_+, N). \quad (9)$$

Через $\tilde{J} = TJT^{-1}$ обозначим образ оператора обращения времени J в трансляционном представлении. Поскольку оператор J антикоммутирует с Q_L , то

$$\frac{d}{ds}\tilde{J} = -\tilde{J}\frac{d}{ds}, \quad \tilde{J}: W_2^1(\mathbb{R}, N) \rightarrow W_2^1(\mathbb{R}, N). \quad (10)$$

В пространстве $L_2(\mathbb{R}, N)$ рассмотрим унитарный оператор

$$\Psi f(s) = f(-s) \quad \forall f(s) \in L_2(\mathbb{R}, N). \quad (11)$$

Понятно, что

$$\frac{d}{ds}\Psi = -\Psi\frac{d}{ds}, \quad \Psi: W_2^1(\mathbb{R}, N) \rightarrow W_2^1(\mathbb{R}, N). \quad (12)$$

В силу (10) и (12) унитарный в $L_2(\mathbb{R}, N)$ оператор $\Psi\tilde{J}$ коммутирует с d/ds . Следовательно, этот оператор коммутирует с оператором сдвига в $L_2(\mathbb{R}, N)$. При этом из свойства (iv) и равенств (9), (10) получаем, что

$$\Psi\tilde{J}: L_2(\mathbb{R}_-, N) \rightarrow L_2(\mathbb{R}_-, N), \quad \Psi\tilde{J}: L_2(\mathbb{R}_+, N) \rightarrow L_2(\mathbb{R}_+, N).$$

Такие свойства оператора $\Psi\tilde{J}$ означают (см. [1]), что в спектральном представлении этот оператор может быть записан как оператор умножения на целую сжимающую операторнозначную функцию $E(z)$, значениями которой на действительной оси являются унитарные операторы в N . В силу теоремы Лиувилля это возможно лишь в случае, когда $E(z) = E$ для всех $z \in \mathbb{C}$, где E – унитарный в N оператор. Возвращаясь к трансляционному представлению, получаем, что $\Psi\tilde{J}f(s) = Ef(s)$ при всех $f(s) \in L_2(\mathbb{R}, N)$. Отсюда с учетом (11) получаем

$$\tilde{J}f(s) = Ef(-s). \quad (13)$$

Положим

$$f(s) = T \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} \quad \forall u \in \mathfrak{H}. \quad (14)$$

На основании (3) и (13) легко видеть, что

$$2f(s) = T(I - J) \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} = (I - \tilde{J})f(s) = f(s) - Ef(-s).$$

Следовательно, выполняется соотношение

$$f(s) = -Ef(-s). \quad (15)$$

Используя (14) и (15), непосредственно проверяется, что оператор

$$T_+u = \frac{1}{\sqrt{2}}P_{\mathbb{R}_+}T \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} \quad (\forall u \in \mathfrak{H}),$$

где $P_{\mathbb{R}_+}$ – ортопроектор из $L_2(\mathbb{R}, N)$ на $L_2(\mathbb{R}_+, N)$, изометрически отображающий пространство $\mathfrak{H}$ на $L_2(\mathbb{R}_+, N)$. С помощью этого оператора определим в $\mathfrak{H}$ простой максимальный симметрический оператор

$$B = T_+^{-1}i \frac{d}{ds}T_+, \quad D(B) = T_+^{-1}\dot{W}_2^1(\mathbb{R}_+, N). \quad (16)$$

Покажем, что при таком выборе оператора B оператор L будет невозмущенным. Действительно, из (16) следует, что

$$D(B^{*2}) = T_+^{-1}W_2^2(\mathbb{R}_+, N) \quad \text{и} \quad T_+B^{*2} = -\frac{d^2}{ds^2}T_+. \quad (17)$$

Предположим, что в равенстве (14) элемент u принадлежит $D(L)$. Тогда из равенств (2) и (8) следует, что

$$f(s) \in TD(Q_L^2) = W_2^2(\mathbb{R}, N). \quad (18)$$

Из (17) и (18) получаем, что $D(L) \subset D(B^{*2})$. Учитывая это соотношение, определение оператора T_+ и равенства (8), приходим к выводу, что

$$T_+Lu = -\frac{1}{\sqrt{2}}P_{\mathbb{R}_+}TQ_L^2 \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}P_{\mathbb{R}_+}\frac{d^2}{ds^2}f(s) = -\frac{d^2}{ds^2}T_+u = T_+B^{*2}u. \quad (19)$$

Следовательно, $L \subset B^{*2}$. Поскольку оператор L самосопряжен, то $L \supset B^2$.

Для завершения доказательства осталось проверить справедливость равенства в (5). В силу (15) и (18)

$$f(0) = -Ef(0) \quad \text{и} \quad f_s(0) = Ef_s(0). \quad (20)$$

Отметим, что оператор $\tilde{J}$ является самосопряженным в $L_2(\mathbb{R}, N)$. С учетом (13) это означает, что оператор E является самосопряженным в N . Принимая этот факт во внимание, из (20) заключаем, что

$$(f_s(0), f(0))_N = 0. \quad (21)$$

На основании (19) и (21) получаем

$$(Lu, u) = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{d^2}{ds^2}f(s), f(s) \right)_N ds = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left\| \frac{d}{ds}f(s) \right\|_N^2 ds = \|B^*u\|^2.$$

Итак, оператор L является невозмущенным. Теорема 1 доказана.

Таким образом, свойство невозмущенности оператора L в правой части уравнения (1) является необходимым и достаточным для того, чтобы это уравнение определяло свободную эволюцию в теории рассеяния Лакса–Филлипса. Выбирая оператор B в различных функциональных пространствах, мы получаем [4] конкретные реализации свободных эволюций в схеме Лакса–Филлипса.

3. Свойства невозмущенных операторов. Множество всех невозмущенных операторов при фиксированном операторе B обозначим через $\mathfrak{M}_B$. Это множество содержит по крайней мере два элемента: расширение Фридрихса $L_\mu = B^*B$ и расширение Крейна $L_M = BB^*$ оператора B^2 . Следующая теорема [4] показывает, что множество $\mathfrak{M}_B$ однозначно определяется операторами подобного типа.

ТЕОРЕМА 2. *Оператор L принадлежит множеству $\mathfrak{M}_B$ тогда и только тогда, когда существуют взаимно ортогональные, инвариантные относительно оператора B подпространства $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ пространства $\mathfrak{H}$ такие, что:*

а) справедливо равенство

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2; \quad (22)$$

в) оператор $B_i = B|_{D(B) \cap \mathfrak{H}_i}$ ($i = 1, 2$) – простой максимальный симметрический оператор в $\mathfrak{H}_i$;

с) оператор L относительно разложения (22) имеет вид

$$L = L_{1\mu} \oplus L_{2M}, \quad (23)$$

где $L_{1\mu} = B_1^*B_1$ – расширение Фридрихса оператора B_1^2 в пространстве $\mathfrak{H}_1$, а $L_{2M} = B_2B_2^*$ – расширение Крейна оператора B_2^2 в пространстве $\mathfrak{H}_2$.

В частности, для оператора Лапласа $-\Delta$, который является невозмущенным при выборе оператора B в виде (7), разложение (22) принимает вид

$$L_2(\mathbb{R}^n) = L_2^{(1)}(\mathbb{R}^n) \oplus L_2^{(2)}(\mathbb{R}^n),$$

где $L_2^{(i)}(\mathbb{R}^n) = \{u(x) \in L_2(\mathbb{R}^n) \mid u(x) = (-1)^{m+i}u(-x)\}$.

Положим для определенности $n = 3$. Тогда $m = 1$ и оператор

$$B_1^*B_1 = -\Delta|_{W_2^{2(\text{ev})}(\mathbb{R}^3)},$$

где $W_2^{2(\text{ev})}(\mathbb{R}^3)$ – множество четных функций из $W_2^2(\mathbb{R}^3)$, является расширением Фридрихса симметрического оператора

$$B_1^2 = -\Delta|_{D(B_1^2)}, \quad D(B_1^2) = \left\{ u(x) \in W_2^{2(\text{ev})}(\mathbb{R}^3) \mid u(0) = 0, \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u(x)}{|x|^3} Y_k\left(\frac{x}{|x|}\right) dx = 0 \right\},$$

где $Y_k(\cdot)$ пробегает множество сферических гармоник четного порядка $k \geq 2$ и интеграл понимается в смысле главного значения.

Аналогично, оператор

$$B_2B_2^* = -\Delta|_{W_2^{2(\text{od})}(\mathbb{R}^3)}$$

($W_2^{2(\text{od})}(\mathbb{R}^3)$ – множество нечетных функций из $W_2^2(\mathbb{R}^3)$) является расширением Крейна симметрического оператора

$$B_2^2 = -\Delta|_{D(B_2^2)}, \quad D(B_2^2) = \left\{ u(x) \in W_2^{2(\text{od})}(\mathbb{R}^3) \mid \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u(x)}{|x|^2} Y_k\left(\frac{x}{|x|}\right) dx = 0 \right\},$$

где $Y_k(\cdot)$ – произвольная сферическая гармоника нечетного порядка.

Определение невозмущенного оператора предполагает проверку условия (5), что не всегда удобно. Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия “невозмущенности” оператора L в терминах его спектральных свойств.

ТЕОРЕМА 3. Положительный самосопряженный оператор L в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ будет невозмущенным при некотором выборе простого максимального симметрического оператора B тогда и только тогда, когда спектр оператора L является лебеговым на $[0, \infty)$. При этом кратность спектра оператора L совпадает с ненулевым дефектным числом оператора B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть оператор L является невозмущенным при некотором выборе оператора B . Не ограничивая общности, предположим, что дефектное число t оператора B отлично от нуля в верхней полуплоскости. Тогда (см. [6]) простой максимальный симметрический оператор B унитарно эквивалентен ортогональной сумме из t простых максимальных симметрических операторов id/ds , $D(d/ds) = \dot{W}_2^1(\mathbb{R}_+)$, действующих в $L_2(\mathbb{R}_+)$. С учетом разложения (23) это означает, что оператор L унитарно эквивалентен ортогональной сумме из t элементов

$$\hat{L} = L_\mu \oplus L_\mu \oplus \cdots \oplus L_M \oplus L_M \quad (24)$$

в пространстве

$$\hat{\mathfrak{H}} = L_2(\mathbb{R}_+) \oplus L_2(\mathbb{R}_+) \oplus \cdots \oplus L_2(\mathbb{R}_+) \oplus L_2(\mathbb{R}_+), \quad (25)$$

где операторы L_μ (L_M) определяются формулами

$$L_\mu(L_M) = -\frac{d^2}{ds^2}, \quad D(L_\mu(L_M)) = \{u \in W_2^2(\mathbb{R}_+) \mid u(0) = 0 \ (u_s(0) = 0)\}.$$

Поскольку спектр операторов L_μ (L_M) является лебеговым на $\mathbb{R}_+$ с кратностью 1, то на основании (24) получаем, что спектр невозмущенного оператора L является лебеговым на $[0, \infty)$ и имеет кратность t .

Обратно, пусть спектр положительного самосопряженного оператора L находится на $[0, \infty)$ и является лебеговым с кратностью t . Это означает, что оператор L унитарно эквивалентен оператору умножения на λ в ортогональной сумме (25) из t членов. Отсюда, используя, например, синус-преобразование Фурье, получаем, что оператор L унитарно эквивалентен ортогональной сумме

$$\hat{L}' = L_\mu \oplus L_\mu \oplus \cdots \oplus L_\mu \oplus L_\mu$$

в $\hat{\mathfrak{H}}$. Таким образом,

$$L = V\hat{L}'V^{-1}, \quad (26)$$

где оператор V изометрически отображает пространство $\hat{\mathfrak{H}}$ на $\mathfrak{H}$.

Поскольку оператор $\hat{L}'$ принадлежит $\mathfrak{M}_{\hat{B}}$, где простой максимальный симметрический оператор $\hat{B}$ задается формулой

$$\hat{B} = i\frac{d}{ds}, \quad D(\hat{B}) = \dot{W}_2^1(\mathbb{R}_+) \oplus \dot{W}_2^1(\mathbb{R}_+) \oplus \cdots \oplus \dot{W}_2^1(\mathbb{R}_+),$$

то из (26) следует, что оператор L принадлежит $\mathfrak{M}_B$, где простой максимальный симметрический оператор B имеет вид $B = V\hat{B}V^{-1}$. Понятно, что ненулевое дефектное число оператора B совпадает с t . Теорема 3 доказана.

Отметим, что при четном n оператор Лапласа $-\Delta$, $D(\Delta) = W_2^2(\mathbb{R}^n)$, имеет лебегов спектр на $[0, \infty)$. В силу теоремы 3 оператор $-\Delta$ является невозмущенным. Соответствующий данному случаю простой максимальный симметрический оператор B построен в [7]. Таким образом, классическое волновое уравнение определяет свободную эволюцию в схеме Лакса–Филлипса и в случае пространств четной размерности. Для группы решений этого уравнения равенством (6) можно определить подпространства $D_{\pm}$ со свойствами (i)–(iv). Однако эти подпространства уже не будут совпадать с “классическими” подпространствами для волнового уравнения, которые традиционно [8] определяются равенством (4). Детальное изучение этого вопроса можно найти в [7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Лакс П., Филлипс Р. Теория рассеяния. М.: Мир, 1971.
- [2] Лакс П., Филлипс Р. Теория рассеяния для автоморфных функций. М.: Мир, 1979.
- [3] Kuzhel S. On some properties of abstract wave equation // Methods of Functional Analysis and Topology. 1997. V. 3. № 1. P. 82–87.
- [4] Kuzhel A. V., Kuzhel S. A. Regular extensions of Hermitian operators. Utrecht: VSP, 1998.
- [5] Хелгасон С. Преобразование Радона. М.: Мир, 1980.
- [6] Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.
- [7] Кушель С. А. Про вигляд вхідного та вихідного підпросторів для хвильового рівняння в $\mathbb{R}^n$ // Укр. матем. ж. 1999. Т. 52. № 5. С. 711–715.
- [8] Lax P., Phillips R. Scattering theory for the acoustic equation in an even number of space dimensions // Indiana Univ. Math. J. 1972. V. 22. № 2. P. 101–134.

Институт математики НАН Украины, г. Киев
E-mail: kuzhel@imath.kiev.ua

Поступило
12.07.1999