Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Л. Кулинич, Ю. В. Бернацкая, О фазовом портрете гармонического осциллятора с трением, возмущенного случайным процессом типа белого шума, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 6, 862–869

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1009>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 18:04:02

УДК 519.21

О ФАЗОВОМ ПОРТРЕТЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С ТРЕНИЕМ, ВОЗМУЩЕННОГО СЛУЧАЙНЫМ ПРОЦЕССОМ ТИПА БЕЛОГО ШУМА

Г. Л. Кулинич, Ю. В. Бернацкая

Исследуется фазовый портрет гармонического осциллятора с трением в случае, когда под определенным углом к вектору фазовой скорости осциллятора действуют случайные возмущения типа белого шума в форме Ито.

Библиография: 10 названий.

Гармоническим осциллятором с трением называют систему, движение которой описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{u}(t) + 2h\dot{u}(t) + k^2u(t) = 0, \quad u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0, \quad (1)$$

где $u_0, \dot{u}_0$ – начальные положение и скорость осциллятора, $u_0^2 + \dot{u}_0^2 > 0$; постоянные $k > 0, h$ – параметры осциллятора ($2h$ – коэффициент трения); $u(t), \dot{u}(t)$ – положение и скорость осциллятора в момент времени $t > 0$.

Уравнение (1) эквивалентно системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x}(t) = Bx(t), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & -2h \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $x_1(t) = u(t), x_2(t) = \dot{u}(t)$.

В прямоугольной декартовой системе координат X_1OX_2 состояние гармонического осциллятора изображается точкой M с координатами $(x_1(t), x_2(t))$, которая движется по фазовой траектории, а фазовая скорость изображается вектором $(x_2(t), -k^2x_1(t) - 2hx_2(t))$, который направлен по касательной к фазовой траектории в точке M .

Портрет возможных движений точки M на фазовой плоскости X_1OX_2 зависит от знака величины $(h^2 - k^2)$ (при $0 < h^2 < k^2$ – семейство спиралей, при $h^2 > k^2$ – семейство “парабол”, при $h^2 = k^2$ – семейство кривых параболического типа) [1].

В данной заметке исследуется поведение изображающей точки M на фазовой плоскости X_1OX_2 системы (2), возмущенной флуктуациями типа белого шума в форме Ито, которые действуют на систему под определенным углом к вектору фазовой скорости, т. е. для классов

$$K_1 : |h| < k; \quad K_2 : |h| > k; \quad K_3 : |h| = k$$

исследуется система стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$dx(t) = d\zeta(t)x(t), \quad x_1(0) = u_0, \quad x_2(0) = \dot{u}_0, \quad (3)$$

где

$$\zeta(t) = \int_0^t B_{q(s)} ds + \int_0^t B_{g(s)} dw(s),$$

B_q, B_g – матрицы вида:

1) для K_1

$$B_f = \begin{pmatrix} f_1 + \frac{h}{\mu} f_2 & \frac{f_2}{\mu} \\ -\frac{k^2}{\mu} f_2 & f_1 - \frac{h}{\mu} f_2 \end{pmatrix}, \quad \mu = \sqrt{k^2 - h^2};$$

2) для K_2

$$B_f = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} [\lambda_2 f_1 - \lambda_1 f_2] & \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} [f_2 - f_1] \\ -\lambda_2 f_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} [\lambda_2 f_1 - \lambda_1 f_2] & f_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} [f_2 - f_1] \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1 = -h + \sqrt{h^2 - k^2}, \quad \lambda_2 = -h - \sqrt{h^2 - k^2};$$

3) для K_3

$$B_f = \begin{pmatrix} f_1 + h f_2 & f_2 \\ -h^2 f_2 & f_1 - h f_2 \end{pmatrix}$$

при $f_i = q_i(t)$, $f_i = g_i(t)$ соответственно; $(w(t), \mathcal{F}_t)$ – одномерный винеровский процесс, $\mathcal{F}_t$ – неубывающий поток σ -алгебр на фиксированном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$; $q_i(t)$, $g_i(t)$ – случайные локально ограниченные функции, при каждом $t \geq 0$ измеримые относительно $\mathcal{F}_t$. Для уравнения (3) выписан явный вид решения (теорема 1); получены необходимые и достаточные условия, при которых изображающая точка M с вероятностью 1 “диффундирует” по определенным гладким кривым (теорема 2). Для класса K_1 приведены достаточные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости положения равновесия системы (3), при этом исследуется поведение угловой характеристики решения (теорема 3).

Исследование поведения изображающей точки M системы (3) и поведения корреляционной функции решения при $q_1 \equiv 0$, $g_1 \equiv 0$ (возмущение системы (2) вдоль вектора фазовой скорости) проведено при $h \neq 0$ в работе [2], а при $h = 0$ – в работе [3], при этом в работе [3] рассматривается белый шум в форме Ито и в форме Стратоновича. В работе [4] для линейных систем вида (3) в $\mathbb{R}^n$ с переменными неслучайными коэффициентами выписана формула для нахождения фундаментальной матрицы уравнения, а с постоянными коэффициентами – исследуются условия устойчивости и неустойчивости решений, при этом необходимые и достаточные условия устойчивости выражаются через эргодическую меру для процесса $x(t)|x(t)|^{-1}$. Модели гармонического осциллятора при случайных возмущениях лишь второй компоненты фазовой скорости исследовались в целом ряде работ (например [5]–[8]).

Перейдем к изложению результатов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $x(t)$ – решение уравнения (3). Тогда с вероятностью 1 при всех $t \geq 0$ имеют место равенства:

1) для K_1 ($x_1(0) \neq 0$)

$$x_1(t) = A_1(t) \cos \varphi_1(t), \quad x_2(t) = k A_1(t) \sin(\varphi_1(t) + \gamma_1),$$

∂e

$$\begin{aligned}
A_1(t) &= \left[x_1^2(0) + \left(\frac{hx_1(0) + x_2(0)}{\mu} \right)^2 \right]^{1/2} \exp \left\{ \int_0^t \left(q_1(s) + \frac{1}{2} [g_2^2(s) - g_1^2(s)] \right) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t g_1(s) dw(s) \right\}, \\
\varphi_1(t) &= \varphi_1(0) + \int_0^t [g_1(s)g_2(s) - q_2(s)] ds - \int_0^t g_2(s) dw(s), \\
\operatorname{tg} \varphi_1(0) &= \frac{hx_1(0) + x_2(0)}{\mu x_1(0)}, \quad \operatorname{tg} \gamma_1 = -\frac{h}{\mu};
\end{aligned}$$

2) для K_2 ($-\lambda_2 x_1(0) + x_2(0) \neq 0$)

$$x_1(t) = A_2(t) \sqrt{2} \cos \varphi_2(t), \quad x_2(t) = A_2(t) (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{1/2} \sin(\varphi_2(t) + \gamma_2),$$

 ∂e

$$\begin{aligned}
A_2(t) &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} [y_1^2(t) + y_2^2(t)]^{1/2}, \\
y_i(t) &= y_i(0) \exp \left\{ \int_0^t \left[q_i(s) - \frac{1}{2} g_i^2(s) \right] ds + \int_0^t g_i(s) dw(s) \right\}, \quad i = 1, 2, \\
y_1(0) &= -\lambda_2 x_1(0) + x_2(0), \quad y_2(0) = -\lambda_1 x_1(0) + x_2(0), \\
\operatorname{tg} \varphi_2(t) &= \frac{y_2(t)}{y_1(t)}, \quad \operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{-\lambda_1}{\lambda_2};
\end{aligned}$$

3) для K_3 ($hx_1(0) + x_2(0) \neq 0$)

$$x_1(t) = A_3(t) \sin \varphi_3(t), \quad x_2(t) = A_3(t) \sqrt{1 + h^2} \cos(\varphi_3(t) + \gamma_3),$$

 ∂e

$$\begin{aligned}
A_3(t) &= \exp \left\{ \int_0^t \left[q_1(s) - \frac{1}{2} g_1^2(s) \right] ds + \int_0^t g_1(s) dw(s) \right\} \left\{ (hx_1(0) + x_2(0))^2 \right. \\
&\quad \left. + \left[x_1(0) + (hx_1(0) + x_2(0)) \left(\int_0^t [q_2(s) - g_1(s)g_2(s)] ds + \int_0^t g_2(s) dw(s) \right) \right]^2 \right\}^{1/2}, \\
\operatorname{tg} \varphi_3(t) &= \frac{x_1(0)}{hx_1(0) + x_2(0)} + \int_0^t [q_2(s) - g_1(s)g_2(s)] ds + \int_0^t g_2(s) dw(s), \\
\operatorname{tg} \gamma_3 &= h.
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы для K_1 . Рассмотрим линейное преобразование процесса $x(t)$, при котором матрица B_f в уравнении (3) примет жордановую форму, т. е. процесс $y(t) = Tx(t)$, где

$$T = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix} \quad \left(TB_f T^{-1} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ -f_2 & f_1 \end{pmatrix} \right).$$

Согласно уравнению (3) для процесса $y(t)$ имеем стохастическое дифференциальное уравнение

$$dy(t) = T d\zeta(t) T^{-1} y(t). \quad (4)$$

Введем новые процессы $r(t)$, $\varphi(t)$ через соотношения

$$y_1(t) = r(t) \cos \varphi(t), \quad y_2(t) = r(t) \sin \varphi(t).$$

Тогда [3]

$$\begin{cases} dr(t) = r(t) \left([q_1(t) + \frac{1}{2} g_2^2(t)] dt + g_1(t) dw(t) \right), \\ d\varphi(t) = (-q_2(t) + g_1(t) g_2(t)) dt - g_2(t) dw(t) \end{cases}$$

с вероятностью 1 для всех $t \geq 0$.

Поэтому [9]

$$\begin{cases} r(t) = r(0) \exp \left\{ \int_0^t \left(q_1(s) + \frac{1}{2} [g_2^2(s) - g_1^2(s)] \right) ds + \int_0^t g_1(s) dw(s) \right\}, \\ \varphi(t) = \varphi(0) - \int_0^t (q_2(s) - g_1(s) - g_2(s)) ds - \int_0^t g_2(s) dw(s). \end{cases} \quad (5)$$

Поскольку $x(t) = T^{-1}y(t)$, где T^{-1} – матрица, обратная к T , то, учитывая явный вид процесса $y(t)$, получим доказательство теоремы для класса K_1 .

Доказательство теоремы для K_2 , K_3 аналогично доказательству для K_1 с тем лишь отличием, что здесь используются матрицы

$$T = \begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \quad \left(TB_f T^{-1} = \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix} \right)$$

для K_2 ,

$$T = \begin{pmatrix} h & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \left(TB_f T^{-1} = \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ f_2 & f_1 \end{pmatrix} \right)$$

для K_3 и находится явный вид решений уравнения (4). Для K_2 решение находится непосредственно [9]:

$$\begin{aligned} y_i(t) &= y_i(0) \exp \left\{ \int_0^t \left[q_i(s) - \frac{1}{2} g_i^2(s) \right] ds + \int_0^t g_i(s) dw(s) \right\}, \\ y_1(0) &= -\lambda_2 x_1(0) + x_2(0), \quad y_2(0) = -\lambda_1 x_1(0) + x_2(0). \end{aligned}$$

Для K_3 решение находится методом, предложенным в работе [10]:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_1(0) \exp \left\{ \int_0^t \left[q_1(s) - \frac{1}{2} g_1^2(s) \right] ds + \int_0^t g_1(s) dw(s) \right\}, \\ y_2(t) &= \left[y_2(0) y_1^{-1}(0) + \int_0^t [q_2(s) - g_1(s) g_2(s)] ds + \int_0^t g_2(s) dw(s) \right] y_1(t), \\ y_1(0) &= h x_1(0) + x_2(0), \quad y_2(0) = x_1(0). \end{aligned}$$

Из явного вида решения уравнения (3) вытекает, что $x(t) \in D_i$ с вероятностью 1 для всех $t > 0$ при условии, что $x(0) \in D_i$, где $D_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ для K_1 , $D_2 = \{x : -\lambda_1 x_1 + x_2 > 0, -\lambda_2 x_1 + x_2 > 0\}$ для K_2 , $D_3 = \{x : h x_1 + x_2 > 0\}$ для K_3 . Поэтому исследование поведения решения уравнения (3) на фазовой плоскости $X_1 O X_2$ достаточно провести соответственно в областях D_i . Для этого в областях D_i рассмотрим кривые $G_i(x) = C$:

$$G_1(x) = r e^{-\alpha \varphi},$$

где (r, φ) – полярные координаты, при этом

$$\begin{aligned} x_1 &= r \mu^{-1} \cos \varphi, \quad x_2 = r(\sin \varphi - h \mu^{-1} \cos \varphi); \\ G_2(x) &= (-\lambda_1 x_1 + x_2)(-\lambda_2 x_1 + x_2)^{-\alpha}, \\ G_3(x) &= x_1(h x_1 + x_2)^{-1} - \alpha \ln(h x_1 + x_2), \end{aligned}$$

и будем считать, что $x(0) \in D_i$. Тогда с вероятностью 1 для всех $t \geq 0$ соответственно имеют место равенства

$$\begin{aligned} G_i(x(t)) &= G_i(x(0)) \exp\{I_i(t) + J_i(t)\}, \quad i = 1, 2, \\ G_3(x(t)) &= G_3(x(0)) + I_3(t) + J_3(t), \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \int_0^t \left(q_1(s) + \alpha q_2(s) + \frac{1}{2} [g_2^2(s) - g_1^2(s)] - \alpha g_1(s) g_2(s) \right) ds, \\ J_1(t) &= \int_0^t (g_1(s) + \alpha g_2(s)) dw(s) \quad (\text{для } K_1), \\ I_2(t) &= \int_0^t \left(q_2(s) - \alpha q_1(s) - \frac{1}{2} [g_2^2(s) - \alpha g_1^2(s)] \right) ds, \\ J_2(t) &= \int_0^t (g_2(s) - \alpha g_1(s)) dw(s) \quad (\text{для } K_2), \\ I_3(t) &= \int_0^t \left(q_2(s) - \alpha q_1(s) - g_1(s) g_2(s) + \frac{\alpha}{2} g_1^2(s) \right) ds, \\ J_3(t) &= \int_0^t (g_2(s) - \alpha g_1(s)) dw(s) \quad (\text{для } K_3). \end{aligned}$$

Исходя из этих равенств, имеем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы $G_i(x(t)) = G_i(x(0))$ с вероятностью 1 для всех $t \geq 0$ соответственно для K_i , необходимо и достаточно, чтобы с вероятностью 1 почти для всех $t \geq 0$ имели место равенства

1) для K_1

$$g_1(t) + \alpha g_2(t) = 0, \quad q_1(t) + \alpha q_2(t) + \left(\frac{1 + \alpha^2}{2}\right) g_2^2(t) = 0;$$

2) для K_2

$$g_2(t) - \alpha g_1(t) = 0, \quad q_2(t) - \alpha q_1(t) + \frac{\alpha(1 - \alpha)}{2} g_1^2(t) = 0;$$

3) для K_3

$$g_2(t) - \alpha g_1(t) = 0, \quad q_2(t) - \alpha q_1(t) - \frac{\alpha}{2} g_1^2(t) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исходя из соотношений (6), для равенства $G_1(x(t)) = G_1(x(0))$ необходимо и достаточно, чтобы с вероятностью 1 для всех $t \geq 0$ выполнялось равенство

$$I_1(t) + J_1(t) = 0. \quad (7)$$

Поскольку $I_1(t)$ с вероятностью 1 абсолютно непрерывная функция, а $J_1(t)$ — непрерывный с вероятностью 1 мартингал, то равенство (7) имеет место тогда и только тогда, когда $I_1(t) = 0$, $J_1(t) = 0$ с вероятностью 1 для всех $t \geq 0$. Поэтому для равенства (7) необходимо и достаточно, чтобы

$$g_1(t) + \alpha g_2(t) = 0, \\ q_1(t) + \alpha q_2(t) - \alpha g_1(t)g_2(t) + \frac{1}{2}[g_2^2(t) - g_1^2(t)] = 0$$

с вероятностью 1 почти для всех $t \geq 0$. Из этих равенств вытекает утверждение теоремы для K_1 . Аналогично получаем утверждение теоремы для K_2 , K_3 .

СЛЕДСТВИЕ 1. Для того чтобы фазовые траектории уравнения (2) соответственно для K_i в областях D_i были инвариантными кривыми уравнения (3), необходимо и достаточно выполнение условия теоремы 2 при $\alpha = h\mu^{-1}$ для K_1 , при $\alpha = \lambda_1\lambda_2^{-1}$ для K_2 , при $\alpha = h^{-1}$ для K_3 .

Действительно, при указанных значениях α кривые $G_i(x) = C$ являются фазовыми траекториями уравнения (2) соответственно для K_i в областях D_i [1].

СЛЕДСТВИЕ 2. Для того чтобы эллипсы $(\mu x_1)^2 + (hx_1 + x_2)^2 = C$ в случае K_1 были инвариантными кривыми уравнения (3), необходимо и достаточно, чтобы $g_1(t) = 0$, $q_1(t) = -g_2^2(t)/2$ с вероятностью 1 почти для всех $t \geq 0$ (т. е. в отличие от детерминированного случая при наличии трения $h \neq 0$ изображающая точка M системы (3) с вероятностью 1 “диффундирует” по эллипсу).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если выполняются достаточные условия 1) теоремы 2 соответственно для K_i , то с вероятностью 1 для всех $t \geq 0$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} G_i(x(t)) &= G_i(x(0)) \exp\{I_i(t)\}, \quad i = 1, 2, \\ G_3(x(t)) &= G_3(x(0)) + I_3(t), \end{aligned}$$

где $I_i(t)$ определены в (6).

Поскольку в этих равенствах отсутствует стохастический интеграл Ито, то они удобны для управления с помощью функции $q_i(t)$ поведением $x(t)$ на фазовой плоскости. Например, для K_1 с вероятностью 1 для всех $t \geq 0$ имеют место оценки

$$G_1(x(0))e^m \leq G_1(x(t)) \leq G_1(x(0))e^M,$$

где $m = \inf_{t \geq 0} I_1(t)$, $M = \sup_{t \geq 0} I_1(t)$ и т. п.

Отметим, что система уравнений (3) совпадает с детерминированной системой (2) при $g_i(t) \equiv 0$, $i = 1, 2$, и условиях:

- 1) $q_1(t) \equiv -h$, $q_2(t) \equiv \sqrt{k^2 - h^2}$ для K_1 ;
- 2) $q_1(t) \equiv \lambda_1$, $q_2(t) \equiv \lambda_2$ для K_2 ;
- 3) $q_1(t) \equiv -h$, $q_2(t) \equiv 1$ для K_3 .

Кроме того, при $h > 0$ детерминированная система (2) является абсолютно устойчивой, т. е. амплитуды колебаний $A_i(t)$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$ для K_i , $i = 1, 2, 3$, при любых начальных отклонениях $u_0, \dot{u}_0$. При этом при $t \rightarrow \infty$ фазы колебаний в соответственных областях D_i ведут себя следующим образом: $\varphi_1(t) \rightarrow -\infty$ (накручивание спирали на точку $(0, 0)$ происходит по часовой стрелке), $\varphi_2(t) \rightarrow 0$, $\varphi_3(t) \rightarrow \pi/2$.

При исследовании асимптотического поведения при $t \rightarrow \infty$ функций $A_i(t)$, $\varphi_i(t)$ для уравнения (3) мы рассмотрим лишь случай K_1 (случаи K_2, K_3 исследуются аналогично [2]). Из явного вида решения уравнения (3) вытекает, что асимптотическое поведение $A_1(t)$, $\varphi_1(t)$ зависит от асимптотического поведения величин

$$\begin{aligned} \beta_i(t) &= \int_0^t g_i^2(s) ds, \quad i = 1, 2, \quad \alpha_1(t) = \int_0^t \left(q_1(s) + \frac{1}{2}[g_2^2(s) - g_1^2(s)] \right) ds, \\ \alpha_2(t) &= \int_0^t [g_1(s)g_2(s) - q_2(s)] ds. \end{aligned}$$

Так, например, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.

1. Пусть $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_1(t) = \infty$. Если при этом

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \alpha_1(t) (2\beta_1(t) \ln \ln \beta_1(t))^{-1/2} < -1,$$

то $\lim_{t \rightarrow \infty} A_1(t) = 0$; если

$$\underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \alpha_1(t) (2\beta_1(t) \ln \ln \beta_1(t))^{-1/2} > 1,$$

то $\lim_{t \rightarrow \infty} A_1(t) = \infty$.

2. Пусть $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_2(t) = \infty$. Если при этом

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \alpha_2(t) (2\beta_2(t) \ln \ln \beta_2(t))^{-1/2} < -1,$$

то $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_1(t) = -\infty$; если

$$\underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \alpha_2(t) (2\beta_2(t) \ln \ln \beta_2(t))^{-1/2} > 1,$$

то $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_1(t) = \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку [9] имеет место представление

$$\int_0^t g_i(s) dw(s) = \tilde{w}_i(\beta_i(t)),$$

где $\tilde{w}_i(t)$ винеровские процессы, то, учитывая явный вид $A_1(t)$, $\varphi_1(t)$, можем записать

$$A_1(t) = A_1(0) \exp \left\{ \hat{\beta}_1(t) \left[\frac{\alpha_1(t)}{\hat{\beta}_1(t)} + \frac{\tilde{w}_1(\beta_1(t))}{\hat{\beta}_1(t)} \right] \right\},$$

$$\varphi_1(t) = \hat{\beta}_2(t) \left[\frac{\varphi_1(0)}{\hat{\beta}_2(t)} + \frac{\alpha_2(t)}{\hat{\beta}_2(t)} - \frac{\tilde{w}_2(\beta_2(t))}{\hat{\beta}_2(t)} \right],$$

где

$$\hat{\beta}_i(t) = (2\beta_i(t) \ln \ln \beta_i(t))^{1/2}.$$

Из этих представлений в силу “закона повторного логарифма”, т. е.

$$P \left\{ \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{|\tilde{w}_i(\beta_i(t))|}{\hat{\beta}_i(t)} = 1 \right\} = 1, \quad i = 1, 2,$$

получаем доказательство теоремы 3.

Заметим, что исходя из явного вида решения $x(t)$ уравнения (3), также удобно находить явный вид корреляционных функций $x(t)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Андронов А. А., Вит А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981.
- [2] Кулінич Г. Л. Якісний аналіз впливу на гармонічний осцилятор з тертям випадкових збурень типу “білого шуму” вздовж вектора фазової швидкості // Укр. матем. ж. 1997. Т. 49. № 1. С. 36–47.
- [3] Kulinich G. L. Qualitative analysis of the influence of random perturbations on the phase velocity of the harmonic oscillator // Random Oper. and Stoch. Equation. 1995. V. 3. № 2. P. 141–152.
- [4] Скороход А. В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. Киев: Наукова думка, 1987.
- [5] Гихман И. И., Скороход А. И. Теория случайных процессов. III. М.: Наука, 1975.
- [6] Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969.
- [7] Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Советское радио, 1961.
- [8] Kulinich G. L. On the limiting behaviour of a harmonic oscillator with random external disturbance // J. Amer. Math. Soc. 1995. V. 8. № 3. P. 265–274.
- [9] Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968.
- [10] Бабчук В. Г., Кулинич Г. Л. Решение одного класса линейной системы стохастических дифференциальных уравнений Ито второго порядка с одним винеровским процессом // Теория вероятн. и ее примен. 1978. Т. 23. № 2. С. 457–458.