Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Пекарский, Наилучшие равномерные рациональные приближения функций посредством ортопроекций, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 2, 216–225

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm101>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 12:14:55

УДК 517.53

НАИЛУЧШИЕ РАВНОМЕРНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ПОСРЕДСТВОМ ОРТОПРОЕКЦИЙ

А. А. Пекарский

Пусть $C[-1, 1]$ – банахово пространство непрерывных комплексных функций f на отрезке $[-1, 1]$, наделенных стандартной максимум-нормой $\|f\|$; $\omega(\cdot) = \omega(\cdot, f)$ – модуль непрерывности f ; $R_n = R_n(f)$ – наилучшее равномерное приближение f посредством рациональных функций (р.ф.) степени не выше $n = 1, 2, \dots$. Пространство $C[-1, 1]$ рассматривается так же, как предгильбертово относительно скалярного произведения $(f, g) = (1/\pi) \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} (1 - x^2)^{-1/2} dx$. Пусть $\mathbf{z}_n = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ – набор точек, лежащих вне отрезка $[-1, 1]$. Через $\mathcal{F}(\cdot, f, \mathbf{z}_n)$ обозначим ортопроектор, действующий из предгильбертова пространства $C[-1, 1]$ в его $(n+1)$ -мерное подпространство, состоящее из р.ф., полюсами которых (с учетом кратности) могут быть лишь точки набора $\mathbf{z}_n$. В работе показано, что если f не является р.ф. степени $\leq n$, то можно указать набор точек $\mathbf{z}_n = \mathbf{z}_n(f)$ такой, что

$$\|f(\cdot) - \mathcal{F}(\cdot, f, \mathbf{z}_n)\| \leq 12R_n \ln \frac{3}{\omega^{-1}(R_n/3)}.$$

Библиография: 11 названий.

1. Постановка задачи. Основной результат и следствия. Пусть X – одно из следующих банаховых пространств: $C[-1, 1]$ – пространство комплексных непрерывных функций на отрезке $[-1, 1]$; $C(T)$ – пространство комплексных непрерывных функций на окружности $T = \{z : |z| = 1\}$; C_A – пространство функций, аналитических в круге $D = \{z : |z| < 1\}$ и непрерывных в его замыкании $\overline{D} = D \cup T$. Пространство X наделается стандартной максимум-нормой $\|\cdot\| = \|\cdot\|_X$.

Каждое из пространств X будем рассматривать как предгильбертово. При этом в $C(T)$ и C_A скалярное произведение (f, g) функций f и g определяется следующим образом:

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_T f(z) \overline{g(z)} |dz|.$$

В пространстве $C[-1, 1]$ скалярное произведение определяется так:

$$(f, g) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f, g \in C[-1, 1].$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российско-Белорусского фонда фундаментальных исследований, грант № Ф02Р-057.

Через $\mathcal{R}_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, будем обозначать множество всех рациональных функций (р.ф.) r степени не выше n ($\deg r \leq n$). Пусть $\mathbf{z}_n = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ – некоторый набор точек из расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Через $\mathcal{R}(\mathbf{z}_n)$ обозначим $(n+1)$ -мерное линейное пространство р.ф., полюсами которых с учетом кратности могут быть лишь точки множества $\mathbf{z}_n$.

Пусть $\mathcal{R}(\mathbf{z}_n) \subset X$. Через $\mathcal{F}(\cdot, \cdot, \mathbf{z}_n, X)$ будем обозначать ортопроектор, действующий из предгильбертова пространства X в его $(n+1)$ -мерное подпространство $\mathcal{R}(\mathbf{z}_n)$. Именно, если $f \in X$, то $\mathcal{F}(\cdot, f, \mathbf{z}_n, X) \in \mathcal{R}(\mathbf{z}_n)$ и $f(\cdot) - \mathcal{F}(\cdot, f, \mathbf{z}_n, X) \perp \mathcal{R}(\mathbf{z}_n)$.

Рассмотрим следующие примеры. Если $X = C_A$ и $z_k = \infty$ при $k = 1, \dots, n$, то $\mathcal{F}(z, f, \mathbf{z}_n, C_A)$ совпадает с n -й частичной суммой ряда Маклорена функции f . Если $X = C(T)$, $z_k = 0$ при $k = 1, \dots, m$ и $z_k = \infty$ при $k = m+1, \dots, 2m$, то $\mathcal{F}(z, f, \mathbf{z}_{2m}, C(T))$ есть m -я частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции f . Если $X = C[-1, 1]$ и $z_k = \infty$ при $k = 1, \dots, n$, то $\mathcal{F}(x, f, \mathbf{z}_n, C[-1, 1])$ совпадает с n -й частичной суммой ряда Фурье функции f по многочленам Чебышева первого рода.

В общем случае для каждого из пространств X и каждого набора $\mathbf{z}_n$, $\mathcal{R}(\mathbf{z}_n) \subset X$, построены соответствующие ортогональные системы р.ф. Именно, для $C(T)$ и C_A это сделали Такенака и Мальмквист [1], а для $C[-1, 1]$ – Джрбашян и Китбалян [2].

В данной работе мы изучаем порядок равномерных приближений функций из X посредством их ортопроекции на $\mathcal{R}(\mathbf{z}_n)$. При этом полюсы $\mathbf{z}_n$ выбираются в зависимости от f .

Для $f \in X$ введем $R_n = R_n(f, X)$ – наилучшее равномерное приближение посредством множества $\mathcal{R}_n$, т.е.

$$R_n = R_n(f, X) = \inf \{ \|f - r\| : r \in \mathcal{R}_n \cap X \}.$$

Пусть f принадлежит $C[-1, 1]$ или C_A , а K – это отрезок $[-1, 1]$ или круг $\overline{D}$ соответственно. В этом случае *модулем непрерывности* функции f называется функция

$$\omega(\delta) = \omega(\delta, f) = \max \{ |f(z_1) - f(z_2)| : z_1, z_2 \in K; |z_1 - z_2| \leq \delta \}, \quad 0 \leq \delta \leq 2.$$

Если же $f \in C(T)$, то ее модуль непрерывности определяется так:

$$\omega(\delta) = \omega(\delta, f) = \max \{ |f(e^{it_1}) - f(e^{it_2})| : t_1, t_2 \in \mathbb{R}; |t_1 - t_2| \leq \delta \}, \quad \delta \geq 0.$$

В последнем случае, очевидно, $\omega(\delta) = \omega(\pi)$ при $\delta \geq \pi$.

Как известно (см., например, [3]), функция $\omega(\delta)$ удовлетворяет следующим условиям: $\omega(0) = 0$, ω непрерывна и не убывает на области определения. Пусть $f \neq \text{const}$. Тогда $\omega(\delta) > 0$ при $\delta > 0$, и мы можем ввести обратную функцию

$$\omega^{-1}(y) = \min \{ \delta \geq 0 : \omega(\delta) = y \}.$$

Здесь y берется из области значений функции $\delta \mapsto \omega(\delta)$.

Основным результатом данной статьи является следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in X \setminus \mathcal{R}_n$, $n \geq 1$, $\omega(\delta) = \omega(\delta, f)$ и $R_n = R_n(f, X)$. Тогда существует набор точек $\mathbf{z}_n = \mathbf{z}_n(f)$ такой, что

$$\|f(\cdot) - \mathcal{F}(\cdot, f, \mathbf{z}_n, X)\| \leq 12R_n \ln \frac{3}{\omega^{-1}(R_n/3)}. \quad (1)$$

Легко заметить, что правая часть неравенства (1) является бесконечно малой при $n \rightarrow \infty$ лишь в случае, когда выполнено условие Дини, т.е.

$$\omega(\delta) = o\left(\left(\ln \frac{1}{\delta}\right)^{-1}\right) \quad \text{при } \delta \rightarrow 0.$$

Используя теорему 1 и известные верхние оценки $R_n(f, X)$ для различных классов функций, можно получить как новые результаты, так и результаты Русака [4], [5] и некоторые результаты автора и Ровбы [6] о порядке наилучших рациональных приближений функций посредством ортопроекции. Ограничимся формулировкой четырех следствий. Необходимые оценки $R_n(f, X)$ имеются в [7], [8].

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть функция $f \in C_A$ имеет ограниченную вариацию на T и существует $\alpha \in (0, 1)$ такое, что $\omega(\delta, f) = O(\delta^\alpha)$ при $\delta \rightarrow 0$. Тогда можно указать последовательность $\mathbf{z}_n = \mathbf{z}_n(f)$, $n = 1, 2, \dots$, для которой

$$\|f(\cdot) - \mathcal{F}(\cdot, f, \mathbf{z}_n, C_A)\| = o\left(\frac{\ln n}{n}\right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть функция $f \in C_A$ имеет ограниченную вариацию на T и существует $\gamma > 1$ такое, что $\omega(\delta, f) = O[(\ln(1/\delta))^{-\gamma}]$ при $\delta \rightarrow 0$. Тогда можно указать последовательность $\mathbf{z}_n = \mathbf{z}_n(f)$, $n = 1, 2, \dots$, для которой

$$\|f(\cdot) - \mathcal{F}(\cdot, f, \mathbf{z}_n, C_A)\| = o(n^{-(\gamma-1)/\gamma}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть функция $f \in C[-1, 1]$ имеет ограниченную вариацию на $[-1, 1]$ и существует $\alpha \in (0, 1)$ такое, что $\omega(\delta, f) = O(\delta^\alpha)$ при $\delta \rightarrow 0$. Тогда можно указать последовательность $\mathbf{z}_n = \mathbf{z}_n(f)$, $n = 1, 2, \dots$, для которой

$$\|f(\cdot) - \mathcal{F}(\cdot, f, \mathbf{z}_n, C[-1, 1])\| = O\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть функция $f \in C[-1, 1]$ имеет ограниченную вариацию на $[-1, 1]$ и существует $\gamma > 1$ такое, что $\omega(\delta, f) = O[(\ln(1/\delta))^{-\gamma}]$ при $\delta \rightarrow 0$. Тогда можно указать последовательность $\mathbf{z}_n = \mathbf{z}_n(f)$, $n = 1, 2, \dots$, для которой

$$\|f(\cdot) - \mathcal{F}(\cdot, f, \mathbf{z}_n, C[-1, 1])\| = O(n^{-(\gamma-1)/(\gamma+1)}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Рациональная аппроксимация посредством ортопроекции класса функций из следствия 1 рассматривалась Русаком [4], [5]. Им получена оценка вида $O((\ln^2 n)/n)$.

Нам неизвестно, в каких случаях, оценка (1) будет точной в смысле порядка, а также являются ли точными оценки из следствий 1–4. В конце п. 2 приводится оценка для пространства C_A , которая в некоторых случаях является более точной, чем (1) для $X = C_A$. Отметим также, что в [6] выделен класс функций, для которых рациональная аппроксимация посредством ортопроекции дает приближение порядка наилучшего.

2. Схема доказательства теоремы 1. Ортопроекция в пространстве C_A .

Через $L(\mathbf{z}_n, X)$ обозначим норму оператора $\mathcal{F}(\cdot, \cdot, \mathbf{z}_n, X)$, действующего из банахова пространства X на его $(n+1)$ -мерное подпространство $\mathcal{R}(\mathbf{z}_n)$. Иначе говоря, $L(\mathbf{z}_n, X)$ — это константа Лебега для соответствующей ортогональной системы. Если $f \in X$, то справедливо неравенство Лебега

$$\|f(\cdot) - \mathcal{F}(\cdot, f, \mathbf{z}_n, X)\| \leq E(f, \mathbf{z}_n, X)(1 + L(\mathbf{z}_n, X)), \quad (2)$$

где

$$E(f, \mathbf{z}_n, X) = \inf \{\|f - r\| : r \in \mathcal{R}(\mathbf{z}_n)\}$$

— наилучшее равномерное приближение посредством множества $\mathcal{R}(\mathbf{z}_n)$.

Неравенство (2) играет основную роль при доказательстве теоремы 1. Идея состоит в выборе полюсов $\mathbf{z}_n = \mathbf{z}_n(f)$ таким образом, чтобы правая часть (2) была как можно меньше. Ясно, что $E(f, \mathbf{z}_n, X)$ будет минимальным, если в качестве $\mathbf{z}_n$ возьмем полюсы дроби наилучшего приближения, т.е. дроби $r^* \in \mathcal{R}_n$ такой, что $\|f - r^*\| = R_n$ (существование r^* доказано, например, в [1]). Однако при таком выборе $\mathbf{z}_n$ константа Лебега $L(\mathbf{z}_n, X)$ может оказаться очень большой. Поэтому мы выбираем полюсы $\mathbf{z}_n = \mathbf{z}_n(f)$ так, чтобы $E(f, \mathbf{z}_n, X) \leq 2R_n$ и $L(\mathbf{z}_n, X)$ при этом была не слишком большой. Реализация этой идеи наиболее проста в случае пространства C_A .

Пусть $X = C_A$ или $C(T)$ и набор точек $\mathbf{z}_n = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ таков, что $\mathcal{R}(\mathbf{z}_n) \subset X$. В этом случае справедлива [9] следующая оценка константы Лебега:

$$L(\mathbf{z}_n, X) \leq 2 \ln \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{|z_k| + 1}{||z_k| - 1|} \right). \quad (3)$$

Здесь при $z_k = \infty$ соответствующее слагаемое считается равным единице.

Нам понадобятся следующие варианты теоремы Джексона (см., например, [3, п. 5.5.4]). Если $f \in C(T)$, то для любого $n = 0, 1, \dots$ существует тригонометрический многочлен u_n степени не выше n , т.е. рациональная функция вида

$$u_n(z) = \sum_{k=-n}^n c_k z^k, \quad c_k = c_k(f),$$

для которого

$$\|f - u_n\|_{C(T)} \leq 3\omega\left(\frac{1}{n+1}, f\right). \quad (4)$$

Если же $f \in C_A$, то, как показывает анализ доказательства из [3], можем считать $c_k = c_k(f) = 0$ при $k = -1, -2, \dots, -n$. Поэтому, если $f \in C_A$, то для любого $n = 0, 1, 2, \dots$ существует алгебраический многочлен p_n степени не выше n , удовлетворяющий неравенству

$$\|f - p_n\|_{C_A} \leq 3\omega\left(\frac{1}{n+1}, f\right). \quad (5)$$

В неравенствах (4) и (5) берутся соответствующие модули непрерывности, введенные в п. 1.

ЛЕММА 1. Пусть $f \in C_A$, причем $f \neq \text{const}$, $\omega(\delta) = \omega(\delta, f)$, $0 < \varepsilon \leq \omega(2)$, $r - p.f.$ такая, что $\|f - r\|_{C_A} \leq \varepsilon$. Тогда существует $p.f. r_\varepsilon$, все полюсы которой лежат в области $|z| > 1 + \omega^{-1}(\varepsilon)$, $\deg r_\varepsilon = \deg r$ и

$$\|f - r_\varepsilon\|_{C_A} \leq 2\varepsilon. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\rho = \rho(\varepsilon) = 1/(1 + \omega^{-1}(\varepsilon))$, $f_\varepsilon(z) = f(\rho z)$ и $r_\varepsilon(z) = r(\rho z)$. Очевидно, $r_\varepsilon - p.f.$, все полюсы которой лежат в области $|z| > 1 + \omega^{-1}(\varepsilon)$ и $\deg r_\varepsilon = \deg r$. Покажем, что (6) также выполнено. Действительно,

$$\|f - f_\varepsilon\| = \max_{z \in \overline{D}} |f(z) - f(\rho z)| \leq \omega(1 - \rho) \leq \varepsilon,$$

$$\|f_\varepsilon - r_\varepsilon\| = \max_{z \in \overline{D}} |f(\rho z) - r(\rho z)| \leq \max_{z \in \overline{D}} |f(z) - r(z)| = \|f - r\| \leq \varepsilon.$$

Следовательно, $\|f - r_\varepsilon\| \leq \|f - f_\varepsilon\| + \|f_\varepsilon - r_\varepsilon\| \leq 2\varepsilon$. Лемма 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 для $X = C_A$. Пусть $r^* \in \mathcal{R}_n \cap C_A$ — дробь наилучшего равномерного приближения функции f , т.е. $\|f - r^*\| = R_n$. Если $\deg r^* = n$, то в качестве $\mathbf{z}_n = \mathbf{z}_n(f)$ возьмем полюсы $p.f. r_\varepsilon^*$, построенной согласно лемме 1, при $r = r^*$ и $\varepsilon = R_n$. Если же $\deg r^* = m < n$, то недостающие $n - m$ полюсов будем считать равными ∞ . Положим $\delta_n = \omega^{-1}(R_n/3)$ и заметим, что $\delta_n \leq \omega^{-1}(R_n)$. С учетом этого из леммы 1 и неравенств (2) и (3) получим

$$\|f(\cdot) - \mathcal{F}(\cdot, f, \mathbf{z}_n, C_A)\| \leq 2R_n \left[1 + 2 \ln \left(1 + \frac{n(2 + \delta_n)}{\delta_n} \right) \right]. \quad (7)$$

Согласно (5) $R_n \leq 3\omega(1/(n+1))$ и, следовательно, $\delta_n \leq 1/(n+1)$. Поэтому выражение в квадратных скобках (7) не превышает

$$1 + 2 \ln \frac{2n+1}{\delta_n} \leq 2 \ln \frac{2\sqrt{e}(n+1)}{\delta_n} \leq 2 \ln \frac{2\sqrt{e}}{\delta_n^2} \leq 4 \ln \frac{2}{\delta_n}.$$

Из (7) с учетом последнего неравенства получим (1) для пространства C_A с несколькими константами: 8 и 2 вместо 12 и 3. Теорема 1 для $X = C_A$ доказана.

В случае пространства C_A наряду с (3) имеет место следующая универсальная оценка (см. [10, теоремы 4.1 и 4.4]) константы Лебега: $L(\mathbf{z}_n, C_A) \leq 2n + 1$. С учетом (2) находим, что если $f \in C_A$, то для любого $n \geq 1$ существует набор точек $\mathbf{z}_n = \mathbf{z}_n(f)$, для которого

$$\|f(\cdot) - \mathcal{F}(\cdot, f, \mathbf{z}_n, C_A)\| \leq 2(n+1)R_n(f, C_A).$$

Это неравенство иногда дает лучший результат, чем неравенство (1).

3. Ортопроекция в пространстве $C(T)$. Для $f \in C(T)$ через F обозначим ее гармоническое продолжение в круг $\overline{D}$, т.е. F гармонична в D , непрерывна в $\overline{D}$ и $F(z) = f(z)$ при $z \in T$. Как известно, F в открытом круге D представима с помощью интеграла Пуассона:

$$F(\rho e^{i\tau}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i(\tau+t)}) P_{\rho}(t) dt,$$

где $0 \leq \rho < 1$, $\tau \in [-\pi, \pi]$ и

$$P_{\rho}(t) = \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos t + \rho^2} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt \quad (8)$$

— ядро Пуассона.

Во многих работах (см., например, [11]) рассматривалась задача приближения 2π -периодических функций с помощью ее интеграла Пуассона. Оценка, полученная ниже в лемме 2, является менее точной, чем в [11]. Эта оценка приводится с доказательством ради полноты изложения, а также из-за того, что применение оценки (9) для доказательства теоремы 1 значительно проще, чем применение соответствующей оценки из [11].

ЛЕММА 2. Пусть $f \in C(T)$ и $\omega(\delta) = \omega(\delta, f)$. Тогда при любых $\rho \in [0, 1)$ и $\tau \in [-\pi, \pi]$ имеет место неравенство

$$|f(e^{i\tau}) - F(\rho e^{i\tau})| \leq 3\omega(\sqrt{2(1-\rho)}). \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $P_{\rho}(t) > 0$ и

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{\rho}(t) dt = 1,$$

то

$$|f(e^{i\tau}) - F(\rho e^{i\tau})| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\tau}) - f(e^{i(\tau+t)})| P_{\rho}(t) dt.$$

Сейчас воспользуемся четностью ядра $P_{\rho}(t)$ относительно t и неравенством

$$|f(e^{i\tau}) - f(e^{i(\tau+t)})| \leq \omega(|t|).$$

В результате получим

$$|f(e^{i\tau}) - F(\rho e^{i\tau})| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \omega(t) P_{\rho}(t) dt.$$

Согласно одному из свойств модуля непрерывности (см., например, [3]) имеет место неравенство

$$\omega(t) \leq \omega(\sqrt{2(1-\rho)}) \left(1 + \frac{t}{\sqrt{2(1-\rho)}}\right).$$

Поэтому

$$|f(e^{i\tau}) - F(\rho e^{i\tau})| \leq \frac{\omega(\sqrt{2(1-\rho)})}{\pi} \int_0^{\pi} P_{\rho}(t) dt + \frac{\omega(\sqrt{2(1-\rho)})}{\pi \sqrt{2(1-\rho)}} \int_0^{\pi} t P_{\rho}(t) dt. \quad (10)$$

Первый из интегралов в (10) равен π . Для второго интеграла найдем подходящую оценку. С этой целью заметим, что согласно правой части (8) имеет место равенство

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \frac{t}{2} P_\rho(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (1 - \cos t) P_\rho(t) dt = \frac{1 - \rho}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi t^2 P_\rho(t) dt \leq \pi \int_0^\pi \sin^2 \frac{t}{2} P_\rho(t) dt = \frac{\pi^2}{2} (1 - \rho).$$

Используя это и неравенство Буняковского–Коши, получим требуемую оценку второго интеграла из (10):

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi t P_\rho(t) dt \leq \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi P_\rho(t) dt \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi t^2 P_\rho(t) dt \right)^{1/2} \leq \frac{\pi}{2} \sqrt{2(1 - \rho)}.$$

Остается подставить в (10) найденные оценки интегралов. Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $f \in C(T)$, $f \neq \text{const}$, $\omega(\delta) = \omega(\delta, f)$, $0 < \varepsilon \leq \omega(\pi)$ и $p.f.$ r такая, что $\|f - r\|_{C(T)} \leq \varepsilon$. Тогда существует $p.f.$ r_ε , удовлетворяющая условиям: $\deg r_\varepsilon = \deg r$, r_ε не имеет полюсов в кольце $\rho \leq |w| \leq 1/\rho$, где $\rho = \rho(\varepsilon) = 1/(1 + (\omega^{-1}(\varepsilon/3))^2/2)$ и

$$|f(w) - r_\varepsilon(w)| \leq 2\varepsilon \quad \text{при } w \in T. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F и R – гармоническое продолжение функций f и r соответственно с окружности T в круг $\overline{D}$. Тогда функция $|F(z) - R(z)|$ субгармонична в открытом круге D и непрерывна в его замыкании. Поскольку $|f(z) - r(z)| \leq \varepsilon$ при $z \in T$, то из принципа максимума субгармонической функции получим, что $|F(z) - R(z)| \leq \varepsilon$ при $z \in \overline{D}$. В частности, при указанном $\rho = \rho(\varepsilon)$ имеем

$$|F(\rho w) - R(\rho w)| \leq \varepsilon, \quad w \in T. \quad (12)$$

Функция $r(z)$ единственным образом представима в виде суммы $r(z) = r_+(z) + r_-(z)$, где r_+ и r_- – $p.f.$, причем r_+ не имеет полюсов в D , а r_- – в $\overline{D} \setminus D$ и $r_-(\infty) = 0$. Через $R_+(z)$ и $R_-(z)$ обозначим соответственно гармоническое продолжение r_+ и r_- с T в $\overline{D}$. Поскольку r_+ аналитична в $\overline{D}$, то $R_+(z) = r_+(z)$ при $z \in \overline{D}$.

Рассмотрим функцию $R_-(z)$ при $z \in \overline{D}$. Пусть, например, $r_-(z) = (z - z_0)^{-k}$, где $|z_0| < 1$ и $k \in \mathbb{N}$. Легко убедиться, что в этом случае

$$R_-(z) = \frac{|z|^{2k}}{(z - |z|^2 z_0)^k} \quad \text{при } z \in \overline{D}.$$

В общем случае для выяснения структуры $R_-(z)$, $z \in \overline{D}$, нужно $r_-(z)$ разложить в сумму простых дробей и построить гармоническое продолжение для каждой из простых дробей, составляющих $r_-(z)$.

Из равенства $R(z) = R_+(z) + R_-(z)$, $z \in \overline{D}$, и структуры функций $R_+(z)$ и $R_-(z)$ для $z \in \overline{D}$ заключаем, что функция $w \rightarrow R(\rho w)$, рассматриваемая лишь на T , совпадает с некоторой р.ф. $r_\varepsilon(w)$ такой, что $\deg r_\varepsilon = \deg r$ и r_ε не имеет полюсов в кольце $\rho \leq |w| \leq 1/\rho$.

Покажем, что условие (11) также выполнено. Действительно, из условия $\|f - r\| \leq \varepsilon$ и неравенств (9), (12) получаем, что при $w \in T$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} |f(w) - r_\varepsilon(w)| &= |f(w) - R(\rho w)| \leq |f(w) - F(\rho w)| + |F(\rho w) - R(\rho w)| \\ &\leq 3\omega(\sqrt{2(1-\rho)}) + \varepsilon \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 для $X = C(T)$. Пусть $r^* \in \mathcal{R}_n \cap C(T)$ — дробь наилучшего равномерного приближения функции $f \in C(T) \setminus \mathcal{R}_n$. Тогда $R_n = \|f - r^*\| > 0$. Если $\deg r^* = n$, то в качестве $\mathbf{z}_n = \mathbf{z}_n(f)$ возьмем полюсы р.ф. r_ε^* , построенной согласно лемме 3 при $r = r^*$ и $\varepsilon = R_n$. В случае $\deg r^* = m < n$ недостающие $n - m$ полюсов будем считать равными ∞ . Ради краткости положим $\delta_n = \omega^{-1}(R_n/3)$. Из леммы 3 и неравенств (2), (3) находим, что при указанном выборе $\mathbf{z}_n$ выполняется соотношение

$$\|f(\cdot) - F(\cdot, f, \mathbf{z}_n, C(T))\| \leq 2R_n \left[1 + 2 \ln \left(1 + \frac{n(4 + \delta_n^2)}{\delta_n^2} \right) \right]. \quad (13)$$

Упростим это оценку. Пусть m — целая часть числа $n/2$. Согласно (4) имеем

$$R_n \leq 3\omega\left(\frac{1}{m+1}\right) \leq 3\omega\left(\frac{2}{n+1}\right).$$

Следовательно, $\delta_n \leq 2/(n+1)$. С учетом этого выражение в квадратных скобках (13) не превышает

$$1 + 2 \ln \frac{4n + (n+1)\delta_n^2}{\delta_n^2} \leq 1 + 2 \ln \frac{4(n+1)}{\delta_n^2} \leq 2 \ln \frac{8\sqrt{e}}{\delta_n^3} \leq 6 \ln \frac{3}{\delta_n}.$$

Этим теорема 1 для пространства $C(T)$ доказана.

4. Ортопроекция в пространстве $C[-1, 1]$. Введем функцию Жуковского

$$z = \varphi(w) = \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right)$$

и ее обратную функцию

$$w = \psi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}.$$

Ветвь корня квадратного выбрана так, чтобы $|\psi(z)| > 1$ при $z \notin [-1, 1]$. При таком выборе ветви мы имеем взаимно конформные отображения областей $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$ и $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$. Если границу области $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$ считать состоящей из двух экземпляров отрезков $[-1, 1]$ (верхнего и нижнего), то будем иметь также гомеоморфное соответствие замыканий указанных областей.

ЛЕММА 4. Пусть $f \in C[-1, 1]$, причем $f \neq \text{const}$, $\omega(\delta) = \omega(\delta, f)$, $0 < \varepsilon \leq \omega(2)$, r – р.ф. такая, что $\|f - r\|_{C[-1, 1]} \leq \varepsilon$. Тогда существует р.ф. r_ε , удовлетворяющая условиям: $\deg r_\varepsilon = \deg r$, все полюсы r_ε лежат вне эллипса $|\psi(z)| \leq 1 + (\omega^{-1}(\varepsilon/3))^2/2$ и

$$\|f - r_\varepsilon\|_{C[-1, 1]} \leq 2\varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $g(w) = f[\varphi(w)]$, $w \in T$, и $u(w) = r[\varphi(w)]$, $w \in \mathbb{C}$, и применим к этим функциям лемму 3. В результате получим, что существует р.ф. u_ε , удовлетворяющая условиям: $\deg u_\varepsilon = \deg u$, u_ε не имеет полюсов в кольце $\rho \leq |\omega| \leq 1/\rho$, где $\rho = \rho(\varepsilon) = 1/(1 + (\omega^{-1}(\varepsilon/3))^2/2)$ и

$$|g(w) - u_\varepsilon(w)| \leq 2\varepsilon \quad \text{при } w \in T. \quad (14)$$

Здесь ω^{-1} – функция, обратная к функции $\omega(\delta) = \omega(\delta, f)$. Замена $\omega^{-1}(\delta, g)$ на $\omega^{-1}(\delta, f)$ при применении леммы 3 законна ввиду неравенства $\omega(\delta, g) \leq \omega(\delta, f)$, $\delta \in [0, 2]$.

Сделаем в (14) обратную замену $w = \psi(x)$, $x \in [-1, 1]$. В результате получим, что

$$|f(x) - u_\varepsilon[\psi(x)]| \leq 2\varepsilon \quad \text{при } x \in [-1, 1].$$

Таким образом, нам остается показать, что функция $r_\varepsilon(x) = u_\varepsilon[\psi(x)]$ является р.ф. степени $\deg r$ и не имеет полюсов в области $|\psi(z)| \leq 1/\rho$.

Пусть все полюсы р.ф. r простые и не равны ∞ . Общий случай можно получить отсюда с помощью предельного перехода. Очевидно, что оператор перехода от r к r_ε линейен и переводит константы в константы. Поэтому нам достаточно показать, что если $r(x) = 1/(x - z_0)$, $z_0 \in \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$, то $r_\varepsilon(x)$ является р.ф. первой степени с полюсом в области $|\psi(z)| > 1/\rho$.

Положим $w_0 = \psi(z_0)$. Ввиду соглашения о выборе ветви функции ψ имеем $|w_0| > 1$. Несложные вычисления показывают, что

$$u(w) = r[\varphi(w)] = \frac{1}{\varphi(w) - \varphi(w_0)} = \frac{2w_0^2}{w_0^2 - 1} \left(\frac{w_0}{w - w_0} - \frac{1}{ww_0 - 1} \right).$$

Следовательно, гармоническое продолжение $U(w)$ функции $u(w)$ с T в $\overline{D}$ будет равно

$$U(w) = \frac{2w_0^2}{w_0^2 - 1} \left(\frac{w_0}{w - w_0} - \frac{|w|^2}{ww_0 - |w|^2} \right), \quad w \in \overline{D}.$$

Заменим здесь w на ρw и будем считать $w \in T$. После несложных преобразований находим

$$U(\rho w) = \frac{w_0^2 - \rho^2}{\rho(w_0^2 - 1)} \cdot \frac{1}{\varphi(w) - \varphi(w_0/\rho)}, \quad w \in T.$$

Следовательно,

$$r_\varepsilon(x) = \frac{w_0^2 - \rho^2}{\rho(w_0^2 - 1)} \cdot \frac{1}{x - \varphi(w_0/\rho)}, \quad x \in [-1, 1].$$

Лемма 4 доказана.

Пусть набор точек $\mathbf{z}_n = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ такой, что $\mathcal{R}(\mathbf{z}_n) \in C[-1, 1]$. В этом случае аналог неравенства (3) выглядит так [2]:

$$L(\mathbf{z}_n, C[-1, 1]) \leq 2 \ln \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{|\psi(z_k)| + 1}{|\psi(z_k)| - 1} \right). \quad (15)$$

Напомним также неравенство Джексона для пространства $C[-1, 1]$. Если $f \in C[-1, 1]$ и $n = 0, 1, 2, \dots$, то существует алгебраический многочлен p_n , $\deg p_n \leq n$, для которого

$$\|f - p_n\|_{C[-1, 1]} \leq 3\omega\left(\frac{1}{n+1}, f\right). \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 для $X = C[-1, 1]$ проводится по той же схеме, что и для $X = C_A$ и $C(T)$. Нужный результат следует из леммы 4, неравенств (2), (15) и (16). Теорема 1 доказана полностью.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Уолш Дж. Л. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: ИЛ, 1961.
- [2] Джрбашян М. М., Китбальян А. А. Об одном обобщении полиномов Чебышева // Докл. АН Арм. ССР. 1964. Т. 37. № 5. С. 263–270.
- [3] Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: ГИФМЛ, 1960.
- [4] Русак В. Н. О скорости приближения некоторых классов функций рациональными операторами. Теория приближения функций // Труды Международной конференции по теории приближения функций. Киев, 31 мая–5 июня, 1983. М., 1987. С. 382–386.
- [5] Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. Киев: 1987.
- [6] Пекарский А. А., Ровба Е. А. Равномерные приближения функций Стильтеса посредством ортопроекции на множество рациональных функций // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 3. С. 362–368.
- [7] Пекарский А. А. Чебышевские рациональные приближения в круге на окружности и на отрезке // Матем. сб. 1987. Т. 133. № 1. С. 86–102.
- [8] Lorentz G. G., Golitschek M. V., Makovoz Y. Constructive Approximation. Advanced Problems. Berlin: Springer, 1996.
- [9] Джрбашян М. М. К теории рядов Фурье по рациональным функциям // Изв. АН Арм. ССР. Сер. матем. 1956. Т. 9. № 7. С. 3–28.
- [10] Пекарский А. А. Оценки производной интеграла типа Коши с мероморфной плотностью и их приложения // Матем. заметки. 1982. Т. 31. № 3. С. 389–402.
- [11] Ульянов П. Л. О приближении функций // Сиб. матем. ж. 1964. Т. 5. № 2. С. 418–437.

Белорусский государственный технологический университет
E-mail: pekarski@bstu.unibel.by

Поступило
06.05.2002