Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. З. Маршан, О перестановках в L^p системы Хаара, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 6, 870–873

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1010>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 04:17:04

УДК 517.512

О ПЕРЕСТАНОВКАХ В L^p СИСТЕМЫ ХААРА

Д.З. Маршан

В работе изучаются операторы, осуществляющие перестановку системы Хаара в каждой пачке. Доказано, что норма всякой отличной от тождественной перестановки допускает нетривиальную оценку снизу в пространстве L^p , $p \neq 2$.

Библиография: 3 названия.

Пусть $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$,

$$A_0 = \{[k \cdot 2^{-n}, (k+1) \cdot 2^{-n}) : 0 \leq k < 2^n, k, n \in \mathbb{N}\},$$

$A = A_0 \cup \{\emptyset\}$ и $\chi = \{h_I, I \in A\}$ – система Хаара, занумерованная элементами множества A следующим образом: $h_\emptyset(t) = 1, t \in [0, 1)$, а для $I = [k \cdot 2^{-n}, (k+1) \cdot 2^{-n}) \in A_0$

$$h_I(t) = \begin{cases} 2^{n/2} & \text{при } t \in [k \cdot 2^{-n}, (2k+1) \cdot 2^{-n-1}), \\ -2^{n/2} & \text{при } t \in [(2k+1) \cdot 2^{-n-1}, (k+1) \cdot 2^{-n}), \\ 0 & \text{при } t \in [0, 1) \setminus I. \end{cases}$$

Пусть $(B, \|\cdot\|)$ – банахово пространство, в котором линейная оболочка системы Хаара $\mathcal{L}$ плотна.

Каждая биекция $\pi: A \rightarrow A$ порождает на $\mathcal{L}$ оператор

$$R_\pi f = \sum_{I \in A} \widehat{f}_I h_{\pi(I)}, \quad \widehat{f}_I = \int_0^1 f(t) h_I(t) dt, \quad I \in A.$$

Если оператор R_π ограничен на $\mathcal{L}$, то его можно продолжить до ограниченного оператора на B .

Определим “норму” биекции $\pi: A \rightarrow A$ следующим образом:

$$\|\pi\| = \sup_{I \in A_0} \left(\frac{|\bigcup_{J \subseteq I} \pi(J)|}{|I|} \right)^{1/2}.$$

Биекция $\pi: A \rightarrow A$ называется *сохраняющей меру*, если для каждого $I \in A$ имеем $|\pi(I)| = |I|$, где $|I|$ – мера множества I .

Вопросы ограниченности величин

$$\|R_\pi\|_{L^p} = \|R_\pi\|_{L^p \rightarrow L^p}, \quad p \in (1, 2) \cup (2, \infty),$$

в случае сохраняющих меру биекций $\pi: A \rightarrow A$ изучались в моей статье [1], а также [2] и [3].

В настоящей статье доказано (теорема 3), что эти величины в случае сохраняющих меру биекций $\pi: A \rightarrow A$, отличных от тождественной, допускают нетривиальную числовую оценку снизу.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\pi: A \rightarrow A$ – нетождественная сохраняющая меру биекция и $\|\pi\| = 1$. Тогда имеет место оценка

$$\|R_\pi\|_{L^p} \geq \begin{cases} \left(\frac{3^{p/(p-1)} + 1}{2(2^{p/(p-1)} + 1)} \right)^{(p-1)/p} & (1 < p < 2), \\ \left(\frac{3^p + 1}{2(2^p + 1)} \right)^{1/p} & (2 < p < \infty). \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно убедиться в существовании такого элемента $I_0 \in A_0$, что $\pi(I) = I$, если $|I_0| \leq |I| < 1$, $I \in A_0$, и $\pi(I_0^+) = I_0^-$, $\pi(I_0^-) = I_0^+$, где I_0^+ (I_0^-) – левая (правая) половины элемента I_0 .

Определим функцию

$$g = \varphi_{I_0} + |I_0|^{1/2} h_{I_0} + |I_0^-|^{1/2} h_{I_0^-},$$

где

$$\varphi_{I_0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in I_0, \\ 0 & \text{при } t \in [0, 1) \setminus I_0. \end{cases}$$

Имеем

$$\|g\|_{L^p} = \left(\frac{2^p + 1}{2} |I_0| \right)^{1/p}, \quad \|R_\pi g\|_{L^p} = \left(\frac{3^p + 1}{4} |I_0| \right)^{1/p}.$$

Поэтому

$$\|R_\pi\|_{L^p} \geq \frac{\|R_\pi g\|_{L^p}}{\|g\|_{L^p}} = \left(\frac{3^p + 1}{2(2^p + 1)} \right)^{1/p} \quad (2 < p < \infty).$$

Итак, требуемая оценка в случае $(2 < p < \infty)$ установлена.

Аналогично

$$\|R_{\pi^{-1}}\|_{L^p} \geq \frac{\|R_{\pi^{-1}} g\|_{L^p}}{\|g\|_{L^p}} = \left(\frac{3^p + 1}{2(2^p + 1)} \right)^{1/p} \quad (2 < p < \infty).$$

Из этой оценки в силу соображений двойственности следует требуемая оценка в случае $1 < p < 2$.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\pi: A \rightarrow A$ – сохраняющая меру биекция и $\|\pi\| \neq 1$. Тогда имеет место оценка

$$\|R_\pi\|_{L^p} \geq \begin{cases} \left(\frac{2^{1/(p-1)} + 1}{3} \right)^{(p-1)/p} & (1 < p < 2), \\ \left(\frac{2^{p-1} + 1}{3} \right)^{1/p} & (2 < p < \infty). \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $\varepsilon > 0$ такое, что $\|\pi\| - \varepsilon > 1$, и найдем такой элемент $I_0 \in A_0$, что

$$\frac{|\bigcup_{J \subseteq I_0} \pi(J)|}{|I_0|} > (\|\pi\| - \varepsilon)^2 > 1.$$

Пусть $S_\pi(I_0)$ – множество, полученное удалением из $\{\pi(J) : J \subseteq I_0\}$ всякого элемента, входящего в другой из того же множества.

Представим это множество в виде последовательности

$$S_\pi(I_0) = \{\pi(I_k)\}_{k=0}^\infty.$$

В этой последовательности существуют по крайней мере два элемента $\pi(I_0)$ и $\pi(I_1)$. Возьмем такой элемент $I_2 \in A_0$, что $I_2 \supset I_1$ и $|I_2| = 2|I_1|$. Замечаем, что

$$\pi(I_1) \cap \pi(I_2) = \emptyset.$$

Возьмем такой элемент $I_3 \in A_0$, что

$$I_3 \supset \pi(I_1) \quad \text{и} \quad |I_3| = 2|I_1|.$$

Замечаем, что

$$\pi^{-1}(I_3) \cap I_1 = \emptyset.$$

Пусть $|I_1| = 2^{-n}$, n – некоторое натуральное число. Определим функцию

$$\xi = |I_1|^{1/2} h_{\pi(I_1)} + |I_2|^{1/2} h_{\pi(I_2)}.$$

Имеем

$$\|\xi\|_{L^p} = \left(\frac{3}{2^n}\right)^{1/p}, \quad \|R_{\pi^{-1}}\xi\|_{L^p} = \left(\frac{2^{p-1} + 1}{2^n}\right)^{1/p}.$$

Поэтому

$$\|R_{\pi^{-1}}\|_{L^p} \geq \frac{\|R_{\pi^{-1}}\xi\|_{L^p}}{\|\xi\|_{L^p}} = \left(\frac{2^{p-1} + 1}{3}\right)^{1/p} \quad (2 < p < \infty).$$

Из этого неравенства и соотношений двойственности следует требуемая оценка в случае $(1 < p < 2)$.

Определим функцию

$$\Psi = |I_1|^{1/2} h_{I_1} + |I_3|^{1/2} h_{\pi^{-1}(I_3)}.$$

Имеем

$$\|\Psi\|_{L^p} = \left(\frac{3}{2^n}\right)^{1/p}, \quad \|R_\pi\Psi\|_{L^p} = \left(\frac{2^{p-1} + 1}{2^n}\right)^{1/p}.$$

Поэтому

$$\|R_\pi\|_{L^p} \geq \frac{\|R_\pi\Psi\|_{L^p}}{\|\Psi\|_{L^p}} = \left(\frac{2^{p-1} + 1}{3}\right)^{1/p} \quad (2 < p < \infty).$$

Требуемая оценка в случае $2 < p < \infty$ установлена.

Теорема доказана.

Сравнивая оценки теорем 1 и 2, убеждаемся, что справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\pi: A \rightarrow A$ нетождественная сохраняющая меру биекция. Тогда имеет место оценка

$$\|R_\pi\|_{L^p} \geq \begin{cases} \left(\frac{3^{p/(p-1)} + 1}{2(2^{p/(p-1)} + 1)} \right)^{(p-1)/p} & (1 < p < 2), \\ \left(\frac{3^p + 1}{2(2^p + 1)} \right)^{1/p} & (2 < p < \infty). \end{cases}$$

Эта теорема уточняет теорему 4 из моей статьи [1].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Отырба Д. З. О перестановках в пространствах L^p // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1994. №5. С. 67–69.
- [2] Schipp F. On equivalence of rearrangements of the Haar system in dyadic Hardy and BMO spaces // Ann. of Math. 1990. V. 16. №2. P. 135–141.
- [3] Семенов Е. М., Штекерт Б. Перестановки системы Хаара в пространствах L^p // Analysis Mathematica. 1981. Т. 7. №4. С. 277–295.

Абхазский государственный университет, г. Сухуми

Поступило

20.11.1995

Исправленный вариант

26.06.1999