Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Д. Барабошкин, Приближение непрерывных функций ломаными с ограничениями на углы между соседними звеньями, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 6, 806–818

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10101>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 17:30:52

Приближение непрерывных функций ломаными с ограничениями на углы между соседними звеньями

Н. Д. Барабошкин

Рассматривается задача наилучшего равномерного приближения непрерывной на отрезке функции кусочно-линейными непрерывными функциями с фиксированными узлами и ограничением на угол между соседними звеньями.

Библиография: 3 названия.

DOI: 10.4213/mzm10101

1. Введение

Рассматривается задача наилучшего равномерного приближения непрерывной на отрезке функции кусочно-линейными непрерывными функциями с фиксированными узлами и ограничением на угол между соседними звеньями.

Такая аппроксимация может применяться, например, при построении оптимальной траектории в задаче навигации (подобные задачи рассматриваются в [1]), так как описываемый класс приближающих функций удобен для использования в системах автоматического управления движением, а ограничение на угол между соседними звеньями соответствует ограничению снизу на радиус поворота летательного аппарата.

Близкой задачей приближения непрерывной функции функциями с ограниченной производной произвольного порядка занимался Мироненко. В его работе [2] приведен критерий альтернансного типа для элемента наилучшего приближения.

2. Постановка задачи

Зафиксируем набор точек $\{x_i\}_{i=0}^n$, $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_i < x_{i+1}$. Рассмотрим непрерывные, линейные на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ функции l с узлами x_i , и пусть

$$l(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n,$$

где $y_i \in \mathbb{R}$.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований Президиума РАН "Динамические системы и теория управления" при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1022) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00445).

Такие функции l будем называть *ломаными* с узлами $\{z_i\}_{i=0}^n$, $z_i = (x_i, y_i)$. Звеном u_i ломаной будем называть отрезок, соединяющий точки z_i и z_{i+1} , $i = 0, \dots, n-1$.

Угол α_i между соседними звеньями u_{i-1} и u_i есть угол между векторами $r_{i-1} = z_i - z_{i-1}$, $r_i = z_{i+1} - z_i$. Причем будем считать угол положительным, если поворот от r_i к r_{i-1} по наименьшему углу происходит против часовой стрелки, иначе будем считать угол отрицательным. Кроме того, положим α_0 равным углу, образуемому звеном u_0 с осью абсцисс.

Зададимся числом $\alpha^* \in (0, \pi)$ и введем класс $\mathcal{L}$ ломаных l с ограниченными углами между соседними звеньями:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\alpha^*; x_0, \dots, x_n) = \{l = l(x) \mid |\alpha_i| \leq \alpha^*, i = 1, \dots, n-1\}.$$

Пусть функция f принадлежит пространству непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с нормой

$$\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Рассмотрим задачу о наилучшем приближении функции f классом $\mathcal{L}$

$$\min_{l \in \mathcal{L}} \|f - l\|. \quad (1)$$

Элементом наилучшего приближения в задаче (1) назовем такую ломаную $l^* \in \mathcal{L}$, что для любой $l \in \mathcal{L}$ имеем $\|f - l\| \geq \|f - l^*\|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Сумма двух ломаных из $\mathcal{L}$ и их выпуклая комбинация не обязательно принадлежат $\mathcal{L}$, т.е. приближающий класс не выпуклый и не является линейным подпространством.

В работе найдено необходимое и достаточное условие элемента наилучшего приближения.

Пусть ломаная $l \in \mathcal{L}$ на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ задается следующим образом:

$$l(x) = a_i x + b_i.$$

Запишем с учетом этих обозначений выражение угла α_i между звеньями u_{i-1} , u_i :

$$\alpha_i = \arctg \frac{a_i - a_{i-1}}{1 + a_i a_{i-1}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Заметим, что для любого фиксированного i ломаная $l \in \mathcal{L}$ однозначно определяется параметрами $a_i, b_i, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$, однако не всякий такой набор параметров дает ломаную из $\mathcal{L}$.

Пусть $l \in \mathcal{L}$. Обозначим $\|f - l\|_{C[a, b]} = \delta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Жестким участком ломаной l для функции f называется отрезок $[x_{i_0}, x_{i_\nu}] \subset [a, b]$, который представим в виде объединения отрезков вида $[x_{i_k}, x_{i_{k+1}}]$, $k = 0, \dots, \nu-1$, $\nu \leq n$, $i_k \in [0, n]$, $i_k < i_{k+1}$, на каждом из которых функция l выпукла либо вверх, либо вниз, направление выпуклости на соседних промежутках противоположно (при этом линейный участок можно считать как выпуклым вверх, так и выпуклым вниз), а также имеют место следующие свойства:

- 1) если $i_k + 1 < i_{k+1}$, то для всяких $k = 0, \dots, \nu$ и $j \in [i_k + 1, i_{k+1})$ выполнено равенство $\alpha_j = (-1)^k \gamma \alpha^*$, где $\gamma = \pm 1$ фиксировано;

- 2) существуют точки $\{t_k\}_{k=0}^{\nu+1}$: $t_0 \in [x_{i_0}, x_{i_1}]$, $t_k \in [x_{i_{k-1}}, x_{i_k}]$, $k = 1, \dots, \nu$, $t_{\nu+1} \in [x_{i_{\nu-1}}, x_{i_\nu}]$, $t_0 < t_1$, $t_\nu < t_{\nu+1}$, такие, что

$$(f - l)(t_k) = (-1)^k \gamma \delta, \quad k = 0, \dots, \nu + 1.$$

Итак, жесткий участок – это отрезок $[x_{i_0}, x_{i_\nu}] \subset [a, b]$, который допускает разбиение на ν промежутков выпуклости/вогнутости ломаной l , на каждом из которых имеется не менее одной точки максимального уклонения требуемого знака и по одной дополнительной точке на крайних промежутках ($[x_{i_0}, x_{i_1}]$ и $[x_{i_{\nu-1}}, x_{i_\nu}]$). Отметим, что такое разбиение может быть неоднозначным. Параметр γ обозначает характер выпуклости l на промежутке $[x_{i_0}, x_{i_1}]$: $\gamma = 1$ в случае выпуклости вниз, $\gamma = -1$ в случае выпуклости вверх.

Точки t_j будем называть также *плюс- или минус-точками* в зависимости от знака разности $f(t_j) - l(t_j)$. Вместо набора точек максимального уклонения удобно также рассматривать отрезки максимального уклонения (отрезки альтернанса), которые получаются заменой подряд идущих точек максимального уклонения одного знака их выпуклой оболочкой. Далее мы будем рассуждать именно в терминах таких отрезков.

Совокупность точек t_k , $k = 0, \dots, n + 1$, аналогична понятию чебышевского альтернанса (см., например, [3]).

Основным результатом работы является следующая

ТЕОРЕМА. Пусть $f \in C[a, b]$. Ломаная $l \in \mathcal{L}$ является элементом наилучшего приближения для функции f в том и только том случае, когда l содержит жесткий участок.

3. Вспомогательные определения и утверждения

3.1. Способ разбиения ломаной. Укажем алгоритм разбиения ломаной на промежутки выпуклости. Рассуждение будет вестись в терминах последовательности i_k из определения жесткого участка.

АЛГОРИТМ. Шаг 1. Зафиксируем $\gamma \in \{-1, 1\}$ следующим образом: положим $\gamma = (-1)^s \operatorname{sign} \alpha_s$, где s – наименьшее натуральное число, для которого выполняется $|\alpha_s| = \alpha^*$. В случае, если такого s не найдется, то выберем γ произвольно.

Шаг 2. Положим $k = 1$, $j = 0$.

Шаг 3. Положим $x_{i_0} = x_0$.

Шаг 4. Пока $k < n$, выполняем следующие действия:

(а) Если $\alpha_k = (-1)^j \gamma \alpha^*$, $\alpha_{k+1} = (-1)^{j+1} \gamma \alpha^*$, то граница участка выпуклости определяется неоднозначно и может быть установлена либо в точке x_k , либо в точке x_{k+1} , а звено $[x_k, x_{k+1}]$ называется *спорным*. Иными словами, мы полагаем $x_{i_{j+1}} = x_k$, либо $x_{i_{j+1}} = x_{k+1}$, увеличиваем j и k на единицу и переходим к шагу 4.

(б) Если $|\alpha_k| < \alpha^*$, то граница определяется однозначно и устанавливается в точке x_k , т.е. $x_{i_{j+1}} = x_k$. Увеличиваем j и k на единицу и переходим к шагу 4.

(с) Если при $k \neq 1$ имеем $\alpha_k = \alpha_{k-1} = (-1)^j \gamma \alpha^*$, либо при $k = 1$ имеем $\alpha_k = (-1)^j \gamma \alpha^*$, то звено $[x_{k-1}, x_k]$ присоединяется к текущему участку выпуклости. Увеличиваем k на единицу.

3.2. Преобразование поворота. При доказательстве необходимости в теореме мы будем использовать следующее преобразование $R_{\tilde{x},\psi}l$ поворота ломаной l на угол ψ вокруг точки $\tilde{z} = (\tilde{x}, l(\tilde{x}))$, $\tilde{x} \in [x_k, x_{k+1}]$. Назовем $\tilde{z}$ *центром поворота*. На угол ψ введем ограничение, обеспечивающее конечность угловых коэффициентов в преобразованной ломаной:

$$\max \left\{ \left| \operatorname{arctg} a_k + \sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i + (n-k-1)\psi \right|, \left| \operatorname{arctg} a_k - \sum_{i=1}^k \alpha_i - (k-1)\psi \right| \right\} < \frac{\pi}{2}.$$

Преобразование ломаной $\bar{l}(x) = R_{z,\psi}(x)$ выполняется следующим образом.

- Пусть $x \in [x_k, x_{k+1}]$. Перепишем выражение для $l(x)$ в виде:

$$l(x) = a_k x + b_k = a_k(x - \tilde{x}) + a_k \tilde{x} + b_k.$$

Теперь положим

$$\bar{l}(x) = \bar{a}_k x + \bar{b}_k, \quad \text{где} \quad \bar{a}_k = \frac{\operatorname{tg} \psi + a_k}{1 - a_k \operatorname{tg} \psi}, \quad \bar{b}_k = \tilde{x}(\bar{a}_k + a_k) + b_k.$$

Обозначим

$$h_k = \bar{l}(x_k) - l(x_k), \quad h_{k+1} = \bar{l}(x_{k+1} - 0) - l(x_{k+1} - 0).$$

- Для $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \leq k$, имеем

$$\begin{aligned} l(x) &= a_{i-1}x + b_{i-1} = a_{i-1}(x - x_i) + a_{i-1}x_i + b_{i-1}, \\ \bar{l}(x) &= \bar{a}_{i-1}(x - x_i) + a_{i-1}x_i + b_{i-1} + h_i. \end{aligned}$$

- Для $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i \geq k+1$, имеем

$$\begin{aligned} l(x) &= a_i x + b_i = a_i(x - x_i) + a_i x_i + b_i, \\ \bar{l}(x) &= \bar{a}_i(x - x_i) + a_i x_i + b_i + h_i. \end{aligned}$$

Иными словами, учитывая замечание 2, мы можем рассматривать l как точку с координатами $(a_k, b_k, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ в $(n+1)$ -мерном линейном пространстве над полем $\mathbb{R}$. При этом преобразование R действует на эту точку следующим образом:

$$(a_k, b_k, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \xrightarrow{R} (\bar{a}_k, \bar{b}_k, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}).$$

ЛЕММА 1. Пусть даны точки $\underline{x}, \bar{x} \in [a, b]$, $\underline{x} < \bar{x}$, и ломаные $l, l^\circ \in \mathcal{L}$ такие, что

$$l^\circ(\underline{x}) < l(\underline{x}), \quad l^\circ(\bar{x}) > l(\bar{x}).$$

Если точка $x^* \in [\underline{x}, \bar{x}]$, $x^* \in [x_k, x_{k+1}]$, такова, что $l^\circ(x^*) = l(x^*)$ и для некоторого $j \geq 1$ все углы ломаной l° удовлетворяют равенству $\alpha_s^\circ = \alpha^*$, $k+1 \leq s \leq k+j$, то для всех $x \in (x^*, x_{k+j}]$ будет справедливо соотношение $l^\circ(x) > l(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий леммы следует, что

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \quad l^\circ(x^* - \varepsilon) \leq l(x^* - \varepsilon), \quad l^\circ(x^* + \varepsilon) > l(x^* + \varepsilon). \quad (2)$$

Тогда $a_i^\circ > a_i$ в силу (2), а в силу предположения на углы α_s , $k+1 \leq s \leq k+j$, получаем требуемое.

Пусть $f \in C[a, b]$. Зафиксируем ломаную $l \in \mathcal{L}$ и обозначим $\|f - l\| = \delta$. Разобьем ломаную l на промежутки выпуклости и рассмотрим произвольный из них, обозначив его через $[x_{i_k}, x_{i_{k+1}}]$. Если l на данном промежутке выпукла вниз, положим $sc_k = 1$, если имеет место выпуклость вверх, положим $sc_k = -1$.

Пусть l не содержит жесткого участка для f . В этом случае будем исправлять l с целью уменьшения величины $\|f - l\|_{C[x_{i_0}, x_{i_l}]}$. Для всякого возможного расположения отрезков максимального уклонения на $[x_{i_k}, x_{i_{k+1}}]$ укажем способы уменьшения величины $\|f - l\|_{C[x_{i_k}, x_{i_{k+1}}]}$ (*способы исправления*). Для каждого способа будем использовать обозначение, зависящее от того, как он действует на концевые точки промежутка и на углы, образованные вертикалью и соответствующим звеном промежутка (угол отсчитывается от вертикали против часовой стрелки для левого конца, и по часовой стрелке – для правого). При этом рассматриваются только такие способы исправления, для которых величины сдвига по вертикали концевых точек $\Delta h(i_0)$, $\Delta h(i_1)$ и изменения углов $\Delta \alpha(i_0)$, $\Delta \alpha(i_1)$ удовлетворяют соотношению

$$\Delta h(i_0)\Delta \alpha(i_0) \leq 0, \quad \Delta h(i_1)\Delta \alpha(i_1) \leq 0, \quad \Delta h(i_0)\Delta h(i_1) \neq 0.$$

То есть, при сдвиге концевой точки вверх (вниз) соответствующий ей угол уменьшается (увеличивается). Потребуем также, чтобы $\Delta \alpha(i_0)$ и $\Delta \alpha(i_1)$ обращались в нуль одновременно.

Сдвиг левой концевой точки с номером i_k вдоль вертикальной оси в результате применения конкретного способа в случае $\Delta h(i_k)sc_k > 0$, $\Delta \alpha(i_k) \neq 0$ будем обозначать символом P , в случае $\Delta h(i_k)sc_k < 0$, $\Delta \alpha(i_k) \neq 0$ обозначим сдвиг символом M , а сдвиг концевой точки при неизменном угле ($\Delta \alpha(i_k) = 0$) будем обозначать символом P_0 в случае $\Delta h(i_k)sc_k > 0$ и символом M_0 – в случае $\Delta h(i_k)sc_k < 0$. Аналогично выражается изменение на правом конце промежутка. Получим, например, такие обозначения: P_0P_0 , PM , MP , M_0M_0 . Здесь левый символ мы будем называть *входным знаком изменения высоты*, правый символ – *выходным знаком изменения высоты*. Знаки изменения соответствующих углов называются *входным* и *выходным знаками изменения угла*.

Также мы введем обозначения, характеризующие количество и расположение отрезков максимального уклонения на промежутке выпуклости $[x_{i_k}, x_{i_{k+1}}]$. Отрезки, знак уклонения l от f на которых совпадает со знаком sc_k , будем обозначать символом p , в случае, если знак уклонения противоположен знаку sc_k , – символом m , отсутствие точек максимального уклонения – знаком $\emptyset$. Так как отрезки альтернанса упорядочены, будем в обозначениях соблюдать тот же порядок. Кроме этого положим $\bar{p} = m$, $\bar{m} = p$. Остальное поясним на примерах:

- случай (m) : на промежутке выпуклости $[x_{i_k}, x_{i_{k+1}}]$ имеется в точности один отрезок максимального уклонения, лежащий строго внутри промежутка, причем знак уклонения на нем противоположен знаку sc_k ;
- случай $[m)$: аналогично предыдущему, отрезок максимального уклонения касается левой границы промежутка выпуклости;
- случай $[mp)$: имеются в точности два альтернансных отрезка, отрезок со знаком уклонения m касается левого конца промежутка, отрезок со знаком уклонения p лежит внутри промежутка;

- случай $[ptp]$: имеются в точности три альтернансных отрезка, отрезок со знаком уклонения p касается левого конца промежутка, отрезок со знаком m лежит внутри промежутка, отрезок со знаком p касается правого конца промежутка; таким образом, имеем жесткий участок.

Перейдем к перечислению возможных способов уменьшения $\|f - l\|_{C[x_{i_k}, x_{i_{k+1}}]}$ для каждой конфигурации отрезков. Мы ограничимся рассмотрением лишь некоторого подмножества всех возможных способов исправления. Для ясности предположим сейчас, что l на $[x_{i_k}, x_{i_{k+1}}]$ выпукла вниз (для всех перечисленных способов приведены рисунки), хотя перечисленные способы верны с соответствующими исправлениями и для выпуклости вверх.

1) В случае (m) , когда имеется один минус-отрезок $[t_0, T_0]$, можно уменьшить уклонение тремя способами:

- способ M_0M_0 : параллельный сдвиг на малую величину $h < 0$ вдоль вертикальной оси;
- способ MP : применение преобразования $R_{\bar{x}, \psi_0}$ с малым $\psi_0 > 0$, где $\bar{x} > T_0$;
- способ PM : применение преобразования $R_{\bar{x}, \psi_0}$ с малым $\psi_0 < 0$, где $\bar{x} < t_0$.

2) В случае (p) по аналогии с предыдущим пунктом имеем три способа: P_0P_0 , MP , PM .

3) В случае $[mp]$, когда имеются два отрезка $[t_0, T_0]$, $[t_1, T_1]$, $T_0 < t_1$, предлагается способ MP : применить преобразование $R_{\bar{x}, \psi_0}$ с малым $\psi_0 > 0$, где $t_1 > \bar{x} > T_0$.

4) Аналогично предыдущему пункту, для конфигурации $[pm]$ имеем способ PM .

5) В случае $[mpm]$, когда отрезков максимального уклонения на промежутке выпуклости $[x_{i_k}, x_{i_{k+1}}]$ три, причем они не лежат вместе на одном отрезке $[x_{s-1}, x_s]$, можно указать один способ уменьшения уклонения – MM . Опишем его. Обозначим отрезки максимального уклонения, как и прежде: $[t_0, T_0]$, $[t_1, T_1]$, $[t_2, T_2]$, при этом $t_0 < T_0 < t_1 < T_1 < t_2 < T_2$. Тогда для точек максимального уклонения $x \in [t_j, T_j]$, $j = 0, 1, 2$, имеет место равенство

$$f(x) - l(x) = (-1)^{j+1} \delta.$$

Пусть $T_1 \in [x_a, x_{a+1}]$. Сначала применим к l преобразование $R_{\bar{x}, \psi}$ на отрезке $[x_{i_0}, x_a]$, выбирая центр поворота $T_0 < \bar{x} < t_1$, затем на промежутке $(x_a, x_{i_1}]$, выбирая центр поворота на интервале (x_a, t_2) с малыми углами $\psi_0 > 0$, $\psi_1 < 0$ соответственно. Малые углы ψ_i всегда можно подобрать так, чтобы после преобразований ломаная осталась непрерывной в точке x_a .

6) Для случая $[\emptyset]$ доступны четыре способа улучшения: P_0P_0 , M_0M_0 (сдвиги), PM , MP (преобразование R).

Жесткий участок, состоящий из $\nu \geq 3$ промежутков выпуклости, в этих обозначениях представляется (с точностью до вида скобок) следующим образом: (pm) , (m) , $\dots$, (m) , (tp) . Для $\nu = 2$ имеем (pm) , (tp) , при $\nu = 1$ получим (ptp) . Выпишем возможные конфигурации в таблицу 1.

Из таблицы видно, что любой промежуток выпуклости, содержащий более четырех альтернансных отрезков, содержит и набор отрезков вида (ptp) , а значит, является жестким участком.

Рис. 1. Некоторые конфигурации точек максимального уклонения на участке выпуклости

Таблица 1. Всевозможные конфигурации отрезков максимального уклонения на одном промежутке выпуклости

$[m]$ M_0M_0	(m) PM MP M_0M_0	$[m]$ MP M_0M_0	(m) PM M_0M_0	$[p]$ P_0P_0	(p) PM MP P_0P_0	$[p]$ PM P_0P_0	(p) MP P_0P_0
$[mp]$ MP	(mp) MP	$[mp]$ MP	(mp) MP	$[pm]$ PM	(pm) PM	$[pm]$ PM	(pm) PM
$[ptp]$ ж. у.	(ptp) ж. у.	$[ptp]$ ж. у.	(ptp) ж. у.	$[mpm]$ MM	(mpm) MM	$[mpm]$ MM	(mpm) MM

Иногда мы будем пользоваться следующими обозначениями для сокращенной записи способов исправления:

$$S_0 = S_0(q) = \begin{cases} P_0, & q = p, \\ M_0, & q = m, \end{cases}$$
$$S = S(q) = \begin{cases} P, & q = p, \\ M, & q = m, \end{cases} \quad \overline{S} = \overline{S}(q) = \begin{cases} M, & q = p, \\ P, & q = m. \end{cases}$$

Например, случаю (q) , $q \in \{p, m\}$, поставим в соответствие способы S_0S_0 , $\overline{S}\overline{S}$, $\overline{S}S$. Если мы придадим конкретное значение параметру $q = m$, то набор соответствующих этой конфигурации способов примет вид M_0M_0 , MP , PM .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Иногда мы будем говорить о способе исправления как об отображении $C(\psi_0, \psi_1, h): \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$, где параметры ψ_0 , ψ_1 , h представляют собой малые углы и сдвиги, используемые при описании какого-либо способа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем *совместимыми* два таких способа улучшения соседних участков выпуклости $[x_{i_k}, x_{i_{k+1}}]$, $[x_{i_{k+1}}, x_{i_{k+2}}]$ ломаной l , которые можно совместно выполнить так, чтобы l осталась непрерывной в точке x_{k+1} .

3.3. Построение графа. Построим по ломаной $l \in \mathcal{L}$ и функции $f \in C[a, b]$ граф G следующим образом:

- разобьем l на участки выпуклости (если возможных разбиений несколько, получим свой граф для каждого), найдем точки максимального уклонения от функции f ;
- участку выпуклости $[x_{i_j}, x_{i_{j+1}}]$ сопоставим набор вершин в количестве, равном числу способов его улучшения; вершины обозначим так же, как и соответствующие способы улучшения и окрасим в цвет $j + 1$;
- соединим ребрами вершины, соответствующие соседним промежуткам выпуклости, способы улучшения которых совместимы между собой.

Итак, наша задача свелась к поиску в построенном ν -долном графе пути из доли с номером (цветом) 1 в долю с номером ν (будем называть его $1-\nu$ -путь). По найденному пути будет возможно построить поправку к l , уменьшающую ее уклонение от функции f . Это построение будет дано в доказательстве основного результата, пока же приведем еще несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 2. Пусть ломаная l на каждом промежутке выпуклости, кроме одного крайнего, содержит не более одного отрезка максимального уклонения, а на одном из крайних – два или три отрезка альтернанса. Тогда l может быть улучшена по крайней мере одним способом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{l_k\}_{k=1}^\nu$ – промежутки выпуклости, составляющие l , и на l_1 лежит два или три отрезка альтернанса. Всевозможные конфигурации отрезков максимального уклонения на соседних промежутках выпуклости l_{k-1} , l_k , $k = 2, \dots, \nu$, приведены в таблице 2. Указаны конфигурации совместимых промежутков и соответствующие им способы исправления. На параметры q , $r \in \{p, m\}$ ограничения не накладываются.

Из таблицы 2 видно, что для любых двух соседних промежутков между соответствующими им долями графа существует хотя бы один путь. А значит, $2-\nu$ -путь в графе, соответствующем l , существует.

Теперь установим существование $1-\nu$ -пути. Для этого опишем возможные конфигурации отрезков на промежутке l_1 в виде таблицы 3, аналогичной предыдущей. Отметим, что из таблицы исключены конфигурации, приводящие к появлению жесткого участка.

Для каждой возможной конфигурации l_1 существует путь из доли, соответствующей l_1 , в долю, соответствующую l_2 , а значит, в дополненной ломаной существует не менее чем один $1-\nu$ -путь.

Теперь мы можем сформулировать основную теорему.

4. Основной результат

ТЕОРЕМА. Пусть $f \in C[a, b]$. Ломаная $l \in \mathcal{L}$ является элементом наилучшего приближения для функции f в том и только том случае, когда l содержит жесткий участок.

ТАБЛИЦА 2. Совместимые конфигурации промежутков на l

l_{k-1}	$\begin{array}{c} [q] \\ S_0(q)S_0(q) \\ S(q)\overline{S(q)} \end{array}$	$\begin{array}{c} [q] \\ S_0(q)S_0(q) \\ S(q)\overline{S(q)} \end{array}$	$\begin{array}{c} [q] \\ S_0(q)S_0(q) \\ \overline{S(q)}S(q) \end{array}$	$\begin{array}{c} [q] \\ S_0(q)S_0(q) \\ \overline{S(q)}S(q) \end{array}$
l_k	$\begin{array}{c} (r) \\ S_0(r)S_0(r) \\ \overline{S(r)}S(r) \end{array}$	$\begin{array}{c} (r) \\ S_0(r)S_0(r) \\ S(r)\overline{S(r)} \\ \overline{S(r)}S(r) \end{array}$	$\begin{array}{c} [\overline{q}] \\ \overline{S_0(q)S_0(q)} \\ \overline{S(q)}S(q) \end{array}$	$\begin{array}{c} [\overline{q}] \\ \overline{S_0(q)S_0(q)} \end{array}$
l_{k-1}	$\begin{array}{c} (q) \\ S_0(q)S_0(q) \\ S(q)\overline{S(q)} \\ \overline{S(q)}S(q) \end{array}$	$\begin{array}{c} (q) \\ S_0(q)S_0(q) \\ S(q)\overline{S(q)} \\ \overline{S(q)}S(q) \end{array}$	$\begin{array}{c} [q] \\ S_0(q)S_0(q) \end{array}$	$\begin{array}{c} [q] \\ S_0(q)S_0(q) \end{array}$
l_k	$\begin{array}{c} (r) \\ S_0(r)S_0(r) \\ \overline{S(r)}S(r) \end{array}$	$\begin{array}{c} (r) \\ S_0(r)S_0(r) \\ S(r)\overline{S(r)} \\ \overline{S(r)}S(r) \end{array}$	$\begin{array}{c} [\overline{q}] \\ \overline{S_0(q)S_0(q)} \\ \overline{S(q)}S(q) \end{array}$	$\begin{array}{c} [\overline{q}] \\ \overline{S_0(q)S_0(q)} \end{array}$

ТАБЛИЦА 3. Варианты добавляемого промежутка

l_1	$\begin{array}{c} [q\overline{q}], (q\overline{q}) \\ S(q)\overline{S(q)} \end{array}$	$\begin{array}{c} [q\overline{q}] \\ S(q)\overline{S(q)} \end{array}$	$\begin{array}{c} [mpm], (mpm) \\ MM \end{array}$	$\begin{array}{c} [mpm] \\ MM \end{array}$
l_2	$\begin{array}{c} (r), (r) \\ \dots \end{array}$	$\begin{array}{c} [\overline{q}] \\ \dots \end{array}$	$\begin{array}{c} (r), (r) \\ \dots \end{array}$	$\begin{array}{c} [p] \\ \dots \end{array}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем необходимость условий теоремы.

Будем рассуждать от противного: пусть жесткого участка не существует. Это значит, что нельзя найти последовательность $\{x_{i_j}\}$ и соответствующий ей набор точек t_j , удовлетворяющий условиям из определения жесткого участка. Однако мы всегда можем провести разбиение (возможно, неоднозначное) ломаной на участки выпуклости способом, указанным в определении. Следовательно, наше предположение в рассуждении от противного затрагивает лишь свойства набора точек максимального уклонения для любого возможного разбиения.

Рассмотрим сначала случай, когда ломаную l можно однозначным образом разбить на ν участков выпуклости (см. способ разбиения). Отсюда следует, что для всякого j имеем $|\alpha_{i_j}| < \alpha^*$, а значит, совместимыми являются два способа улучшения, для которых выходной знак изменения высоты “левого” промежутка противоположен входному знаку изменения высоты “правого”.

Сконструируем граф G по ломаной l и функции f методом, указанным ранее; по найденному пути мы построим улучшенную ломаную l' , для которой $\|f - l'\| < \|f - l\|$.

Разобьем l по границам промежутков выпуклости на возможно пересекающиеся упорядоченные по номеру начального промежутка выпуклости под-ломанные $\{\tilde{l}_k\}_{k=1}^q$ так, чтобы по краям каждой под-ломаной находились промежутки выпуклости, содержащие не менее чем два отрезка максимального уклонения, а на внутрен-

них промежутках выпуклости было не более чем по одному отрезку максимального уклонения, кроме $\tilde{l}_1$ и $\tilde{l}_q$, для которых разрешим наличие на l_{i_1} и l_{i_ν} только одного отрезка максимального уклонения. Если такого разбиения не найдется, положим $\tilde{l}_1 = l$, $q = 1$. Отметим, что $\tilde{l}_k$ может включать в себя несколько промежутков выпуклости.

Рассмотрим произвольную под-ломаную $\tilde{l}_k$. По предположению на l не существует жесткого участка, значит, выполнено:

- 1) $\tilde{l}_k$ не является жестким участком;
- 2) первый промежуток выпуклости $\tilde{l}_k$ не является жестким участком;
- 3) последний промежуток выпуклости $\tilde{l}_k$ не является жестким участком.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Два последних пункта означают, что на первом и последнем промежутках выпуклости $\tilde{l}_k$ не может быть комбинаций вида $[ptp]$, (ptp) и подобных с точностью до вида скобок. Далее мы будем постоянно пользоваться этим утверждением, исключая из рассмотрения соответствующие случаи.

Таблица 4. Конфигурации отрезков альтернанса для жесткого участка

Промежуток	1		2s	2s + 1	...		
Конфигурации	(pt) $[pt]$	(mpt) $[mpt]$	(m)	(m)	...	(mp) $(mp]$	(mpt) $(mpt]$
Способы	PM	MM	PM MP M_0M_0	PM MP M_0M_0	...	MP	MM

Приведем очевидное (см. таблицу 4)

УТВЕРЖДЕНИЕ. Для ν -дольного графа G , соответствующего жесткому участку, имеет место свойство: существует единственный $2-(\nu - 1)$ -путь, для которого входной и выходной знаки изменения высоты совпадают с M .

Так как $\tilde{l}_k$ не является жестким участком, то выполняется, по крайней мере, одно из трех следующих условий:

- 1) первый промежуток выпуклости, входящий в $\tilde{l}_k$, не подпадает под один из случаев (pt) , $[pt)$, (mpt) , $[mpt)$;
- 2) последний промежуток выпуклости, входящий в $\tilde{l}_k$, не подпадает под один из случаев (mp) , $(mp]$, (mpt) , $(mpt]$;
- 3) конфигурации внутренних промежутков $\tilde{l}_k$ отличны от (m) .

Рассмотрим подробно случаи 1) и 3), случай 2) рассматривается аналогично. В таблице 4 указаны наборы способов исправления, соответствующих различным конфигурациям промежутков, составляющих жесткий участок.

Пусть имеет место условие 1). Если на первом отрезке выпуклости лежит один отрезок альтернанса, то имеем существование пути из леммы 2. Из таблиц 4, 1 и утверждения видно, что в каждом из оставшихся случаев для участков а) и б) (см. рис. 1) найдутся совместимые способы исправления.

В случае 3) могут иметь место только конфигурации (p) , либо $[\emptyset]$, которые, очевидно, обеспечивают существование $1-\nu$ -пути.

Теперь допустим, что разбиение l на промежутки выпуклости может быть неоднозначным.

В этом случае изменяется определение совместимых способов исправления ломаной: теперь мы потребуем не только совпадения знаков изменения высоты, но и выполнения дополнительного условия о том, чтобы применяемый способ не выводил за допустимые ограничения углы при концевых точках промежутка выпуклости. А именно, для двух соседних промежутков $[x_{i_{k-1}}, x_{i_k}]$, $[x_{i_k}, x_{i_{k+1}}]$ выбираются такие способы, для которых “внутренние” (выходные левого промежутка и входные правого) знаки изменения углов противоположны знаку угла α_k .

Рассмотрим для начала случай, когда на спорном звене нет точек максимального уклонения. Тогда при любом разбиении будем иметь одинаковые конфигурации промежутков, а значит, и одинаковый набор способов улучшения для каждого из промежутков выпуклости (некоторые из них могут быть неприменимы из-за ограничений на углы).

Отсюда следует, что без учета знаков углов, для каждого возможного разбиения путь существует в силу предыдущего случая. А так как набор способов исправления не зависит от выбора разбиения, и в силу того, что для всех перечисленных способов исправления знаки изменения углов противоположны знакам изменения высоты (либо равны нулю), то для каждого пути, построенного без учета знаков изменения углов, можно выбрать такое разбиение ломаной l на участки выпуклости, которое позволит совместно применить все способы исправления уже с учетом знаков углов.

Рассмотрим теперь случай, когда на спорном звене имеются точки максимального уклонения.

Покажем, что хотя бы одно из возможных разбиений обеспечит существование пути в графе. Рассмотрим два промежутка выпуклости, и пусть левая концевая точка первого промежутка обозначена через $x_{i_{k-1}}$, правая концевая второго – через $x_{i_{k+1}}$, а спорное звено лежит на отрезке $[x_j, x_{j+1}]$.

Пусть на спорном звене имеется один отрезок альтернанса со знаком уклонения m (по отношению к левому промежутку), а на первом (левом) промежутке выпуклости, к которому отнесено спорное звено, находится дополнительно два отрезка альтернанса, т.е. имеет место набор конфигураций со знаками уклонения (mpt) (с точностью до вида скобок). Тогда на втором промежутке выпуклости может находиться только один отрезок альтернанса, при отнесении спорного звена к которому получается конфигурация со знаками уклонения (pm) (при этом обозначение точки, лежащей на концевом звене, меняется – см. таблицу 5). Хотя бы в одном из вариантов разбиения путь в графе существует.

Таблица 5. К существованию пути для неоднозначного разбиения

Вариант 1		Вариант 2	
(mpt)	(m)	(mp)	(pm)
MM	M_0M_0	MP	PM
	PM		
	MP		

Аналогично рассматривается ситуация с противоположным знаком уклонения на спорном звене.

В случае, когда на спорном звене имеется два отрезка альтернанса, на каждом из двух промежутков может быть дополнительно не более чем по одному отрезку альтернанса, причем таких, чтобы при отнесении спорного звена к данному промежутку выпуклости мы получали конфигурации вида (tpm) , (ptm) , (ppm) , (mtp) , (mpp) . Однако в силу определения отрезка максимального уклонения, последние четыре конфигурации равносильны (pm) и (mp) . Следовательно, на каждом из двух промежутков может иметь место одна из трех ситуаций: (tpm) , (pt) , (mp) . Кроме этого, исключены наборы конфигураций вида

- а) (tpm) , (mp) ;
- б) (pm) , (mp) ;
- в) (pm) , (tpm) .

В остальных случаях существование пути дается таблицей 1.

Таким образом, если 1- ν -путь будет найден, мы сможем применить к l поправки, которые уменьшат уклонение в каждой точке альтернанса; тем самым, мы получим противоречие оптимальности l и докажем необходимость.

Построение можно провести, например, следующим образом. Обозначим промежутки выпуклости через l_j , $j = 1, \dots, \nu$, где

$$l_j(x) = l(x), \quad x \in [x_{i_{j-1}}, x_{i_j}].$$

Рассмотрим l_j . В соответствии с замечанием 3 обозначим через u_j , v_j изменения высоты, полученные в результате применения выбранного способа исправления $C_j = C_j(\psi_{j,0}, \psi_{j,1}, h_j)$ на левом и правом концах l_j соответственно:

$$\begin{aligned} u_j &= u_j(\psi_{j,0}, \psi_{j,1}, h_j) = (C_j l_j)(x_{i_{j-1}} + 0) - l_j(x_{i_{j-1}} + 0), \\ v_j &= v_j(\psi_{j,0}, \psi_{j,1}, h_j) = (C_j l_j)(x_{i_j} - 0) - l_j(x_{i_j} - 0). \end{aligned}$$

Аналогично введем знаки изменения углов: β_j , τ_j . Рассмотрим углы $\alpha_{i_{j-1}}$, α_{i_j} при концевых точках l_j и введем обозначение

$$\begin{aligned} \varphi_j = \min \left\{ |\beta_j \alpha^* - \alpha_{i_{j-1}}|, \left| (\text{sign } a_{i_{j-1}}) \frac{\pi}{2} - \arctg a_{i_{j-1}} \right|, \right. \\ \left. |\tau_j \alpha^* - \alpha_{i_j}|, \left| (\text{sign } a_{i_j}) \frac{\pi}{2} - \arctg a_{i_j} \right| \right\}. \end{aligned}$$

Повторив процедуру для всех участков выпуклости, положим

$$\varphi = \min_j \varphi_j.$$

Будем выбирать малые параметры $\psi_{j,0}$, $\psi_{j,1}$, h_j в способах исправления промежутка l_j так, чтобы в результате их применения изменение углов было по модулю меньше, чем $\varphi/2$. Обозначим множество таких троек $(\psi_{j,0}, \psi_{j,1}, h_j)$ через Q_j , также введя

$$Q_0 = \bigcap_{k=1}^{\nu} Q_k.$$

Рассмотрим теперь промежутки l_k и l_{k+1} и найдем

$$w_k = \min \left\{ \max_{p \in Q_0} |v_k(p)|, \max_{p \in Q_0} |u_{k+1}(p)| \right\}.$$

Теперь найдем

$$w = \min_{k=0, \dots, m-2} w_k.$$

Выберем такие $(\psi_{j,0}, \psi_{j,1}, h_j) \in Q_0$, чтобы изменения высоты в концевых точках были по модулю не более, чем $w/2$. В таких условиях можно выбрать параметры способа исправления так, чтобы сохранить непрерывность в концевых точках промежутков l_k .

Необходимость доказана.

Покажем достаточность условий теоремы. Предположим, что ломаная l не является наилучшей, тогда существует ломаная l^* , обеспечивающая лучшее приближение. Для нее, в частности, выполняется (в обозначениях из определения жесткого участка) неравенство

$$|f(t_i) - l^*(t_i)| < |f(t_i) - l(t_i)| = \delta, \quad i = 0, 1.$$

Рассмотрим отрезок $[x_{i_0}, x_{i_1}]$ (для определенности примем $\gamma = 1$). На нем в силу леммы 1 существует точка $\bar{x}$, для которой $l^*(\bar{x}) = l(\bar{x})$, и, кроме этого,

$$\begin{aligned} l^*(x) &> l(x), & x \in [x_{i_0}, \bar{x}), \\ l^*(x) &< l(x), & x \in (\bar{x}, x_{i_1}]. \end{aligned} \quad (3)$$

Далее, учитывая (3) и неравенство $f(t_2) - l^*(t_2) < f(t_2) - l(t_2)$, из леммы получим, что

$$l^*(x) > l(x), \quad x \in [t_2, x_{i_2}].$$

Аналогичные рассуждения проведем для всех промежутков выпуклости. Получим противоречие, рассматривая промежуток выпуклости $[x_{i_{\nu-1}}, x_{i_{\nu}}]$ (предположим для определенности что ν нечетно). Действительно, существует точка $\bar{x} \in [x_{i_{\nu-1}}, x_{i_{\nu}}]$ такая, что $l^*(\bar{x}) = l(\bar{x})$ и для любого $x \in (\bar{x}, x_{i_{\nu}}]$ имеем $l^*(x) < l(x)$, в том числе и для $x = t_{\nu+1}$, что противоречит выбору l^* .

Представленный результат может быть расширен на некоторые классы разрывных функций, например, на ограниченные кусочно-непрерывные функции без разрывов второго рода.

Автор выражает благодарность В. И. Бердышеву и А. В. Мироненко за ценные замечания и плодотворные обсуждения в ходе подготовки и оформления работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Бердышев, В. Б. Костоусов, *Экстремальные задачи и модели навигации по геофизическим полям*, УрО РАН, Екатеринбург, 2007.
- [2] А. В. Мироненко, "Равномерное приближение классом функций с ограниченной производной", *Матем. заметки*, **74:5** (2003), 696–712.
- [3] И. П. Натансон, *Конструктивная теория функций*, ГИТТЛ, М.–Л., 1949.

Н. Д. Барабошкин

Институт математики и механики УрО РАН,
г. Екатеринбург

E-mail: starteleport@yandex.ru

Поступило

10.09.2012