Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Федоров, О. А. Стахеева, О локальном существовании решений уравнений с памятью, не разрешимых относительно производной по времени, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 3, 414–426

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10102>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 06:54:16

О локальном существовании решений уравнений с памятью, не разрешимых относительно производной по времени

В. Е. Федоров, О. А. Стахеева

В работе с использованием результатов теории вырожденных полугрупп операторов и теоремы о сжимающем отображении доказана локальная однозначная разрешимость начальных задач для одного класса линейных дифференциально-операторных уравнений первого порядка с памятью, имеющих вырожденный оператор при производной. Полученные абстрактные результаты использованы при исследовании начально-краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, не разрешимых относительно производной по времени.

Библиография: 16 названий.

DOI: 10.4213/mzm10102

1. Введение. В рамках задачи

$$u(t) = h(t), \quad t \in (-\infty, 0], \quad (1.1)$$

для интегро-дифференциального уравнения

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + \int_0^\infty \mathcal{K}(s)u(t-s) ds, \quad t \in [0, T), \quad (1.2)$$

с линейными операторами

$$L: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{V}, \quad M: \text{dom } M \rightarrow \mathfrak{V}, \quad \text{dom } M \subset \mathfrak{U}, \quad \mathcal{K}(s): \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{V}, \quad s \geq 0,$$

$\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ – банаховы пространства, можно исследовать не разрешенные относительно производной по времени уравнения и системы уравнений в частных производных, описывающие динамику некоторых процессов с эффектом памяти [1], [2]. Если в [2] значение ω^{-1} принадлежит спектру задачи Дирихле для оператора Лапласа или рассматривается квазистационарный случай [3], [4] модели Кагинаппа с памятью [5], соответствующее абстрактное уравнение (1.1) имеет оператор L с нетривиальным ядром и поэтому не разрешимо относительно производной по времени. Эволюционные уравнения с вырожденным оператором при производной вызывают интерес

Работа выполнена при поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского государственного университета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020).

многих исследователей (см. [6], [7] и библиографию там же). Именно вырожденный случай будет исследован в данной работе.

В [8], [9] исследованы вопросы существования и единственности решения задачи (1.1), (1.2) в случае, когда $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}$, $L = I$, а оператор M порождает аналитическую полугруппу операторов. В настоящей работе эти результаты распространены на случай задачи (1.1), (1.2) с таким оператором L , что $\ker L \neq \{0\}$. При этом предполагается выполнение условия сильной (L, p) -радиальности оператора M , гарантирующего существование вырожденной разрешающей сильно непрерывной полугруппы уравнения $L\dot{u}(t) = Mu(t)$ [10], [11]. С помощью принципа сжимающих отображений доказана однозначная локальная разрешимость в смысле классических решений задачи (1.1), (1.2), а также задачи с начальным условием типа Шоултера для уравнения (1.2). Полученные результаты использованы при исследовании начально-краевой задачи для уравнения эволюции свободной поверхности фильтрующей жидкости [12] с эффектом памяти, а также для линеаризованной квазистационарной интегро-дифференциальной системы уравнений фазового поля.

2. Условия на операторы. Сформулируем условия на операторы, которые будут использованы в дальнейшем, и соответствующие им утверждения, которые доказаны ранее в [10].

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ – банаховы пространства, оператор $L: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{V}$ линеен и непрерывен (для краткости обозначим $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$), а оператор $M: \operatorname{dom} M \rightarrow \mathfrak{V}$ линеен, замкнут и плотно определен в $\mathfrak{U}$ (коротко, $M \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$). Введем обозначения

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_0 &= \{0\} \cup \mathbb{N}, & \overline{\mathbb{R}}_+ &= \{0\} \cup \mathbb{R}_+, & \rho^L(M) &= \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}; \mathfrak{U})\}, \\ \sigma^L(M) &= \mathbb{C} \setminus \rho^L(M), & R_\mu^L(M) &= (\mu L - M)^{-1}L, & L_\mu^L &= L(\mu L - M)^{-1}. \end{aligned}$$

Пусть $p \in \mathbb{N}_0$. Оператор M называется *сильно (L, p) -радиальным*, если

- (i) существует $a \in \mathbb{R}$ такое, что $(a, +\infty) \subset \rho^L(M)$;
- (ii) существует $K \in \mathbb{R}_+$ такое, что для всех $\mu \in (a, +\infty)$ и для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\max\{\|(R_\mu^L(M))^{n(p+1)}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|(L_\mu^L(M))^{n(p+1)}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V})}\} \leq \frac{K}{(\mu - a)^{n(p+1)}};$$

- (iii) существует плотный в $\mathfrak{V}$ линеал $\mathring{\mathfrak{V}}$ такой, что при любом $\mu \in (a, +\infty)$

$$\begin{aligned} \|M(\mu L - M)^{-1}(L_\mu^L(M))^{p+1}f\|_{\mathfrak{V}} &\leq \frac{c(f)}{(\mu - a)^{p+2}} && \text{для всех } f \in \mathring{\mathfrak{V}}, \\ \|(R_\mu^L(M))^{p+1}(\mu L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V}; \mathfrak{U})} &\leq \frac{K}{(\mu - a)^{p+2}}. \end{aligned}$$

Здесь $c(f)$ – константа, зависящая от выбора элемента f .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Эквивалентность условий данного определения аналогичным более сложным условиям, использованным в работе [10], доказана в [13].

Положим

$$\mathfrak{U}^0 = \ker(R_\mu^L(M))^{p+1}, \quad \mathfrak{V}^0 = \ker(L_\mu^L(M))^{p+1};$$

$\mathfrak{U}^1$ – замыкание образа оператора $\operatorname{im}(R_\mu^L(M))^{p+1}$ в пространстве $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}^1$ – замыкание образа $\operatorname{im}(L_\mu^L(M))^{p+1}$ в пространстве $\mathfrak{V}$. Обозначим через L_k (соответственно M_k) сужение оператора L (соответственно M) на $\mathfrak{U}^k$ ($\operatorname{dom} M_k = \operatorname{dom} M \cap \mathfrak{U}^k$), $k = 0, 1$.

ТЕОРЕМА 1 [10]. Пусть оператор M сильно (L, p) -радиален. Тогда

- (i) $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}^0 \oplus \mathfrak{V}^1$;
- (ii) $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{V}^k)$, $M_k \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{V}^k)$, $k = 0, 1$;
- (iii) существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^0; \mathfrak{U}^0)$ и $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^1; \mathfrak{U}^1)$;
- (iv) оператор $H = M_0^{-1}L_0$ нильпотентен степени не больше p ;
- (v) существует сильно непрерывная полугруппа $\{U(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$, разрешающая уравнение $\dot{L}u(t) = Mu(t)$;
- (vi) для всех $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ выполнено $\|U(t)\| \leq Ke^{at}$.

В утверждении (vi) константы a и K те же, что и в определении сильной (L, p) -радиальности.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае $\ker L \neq \{0\}$ единицей $U(0)$ разрешающей полугруппы уравнения $\dot{L}u(t) = Mu(t)$ является нетривиальный проектор, при этом

$$\ker L \subset \ker U(0) = \mathfrak{U}^0, \quad \text{im } U(0) = \mathfrak{U}^1.$$

Обозначим $P = U(0)$, Q – проектор на подпространство $\mathfrak{V}^1$ вдоль подпространства $\mathfrak{V}^0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При доказательстве утверждения (ii) теоремы 1 существенную роль играют равенства $MPu = QMu$, $u \in \text{dom } M$, и $LP = QL$. Они в дальнейшем также потребуются в явном виде.

ТЕОРЕМА 2 [10]. Пусть оператор M сильно (L, p) -радиален, $u_0 \in \text{dom } M$, функция $g \in C^1([0, T]; \mathfrak{V})$ такова, что $(I - Q)g \in C^{p+1}([0, T]; \mathfrak{V}^0)$,

$$(I - P)u_0 = - \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1} ((I - Q)g)^{(k)}(0). \quad (2.1)$$

Тогда существует единственное решение

$$u \in C^1([0, T]; \mathfrak{U}) \cap C([0, T]; \text{dom } M)$$

задачи Коши $u(0) = u_0$ для уравнения $\dot{L}u(t) = Mu(t) + g(t)$. При этом

$$u(t) = U(t)u_0 + \int_0^t U(s)L_1^{-1}Qg(t-s)ds - \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1}((I - Q)g)^{(k)}(t). \quad (2.2)$$

ТЕОРЕМА 3 [10]. Пусть оператор M сильно (L, p) -радиален, $u_0 \in \text{dom } M_1$, функция $g \in C^1([0, T]; \mathfrak{V})$ такова, что $(I - Q)g \in C^{p+1}([0, T]; \mathfrak{V}^0)$. Тогда существует единственное решение

$$u \in C^1([0, T]; \mathfrak{U}) \cap C([0, T]; \text{dom } M)$$

задачи $Pu(0) = u_0$ для уравнения $\dot{L}u(t) = Mu(t) + g(t)$. При этом решение имеет вид (2.2).

Здесь подразумевается, что область определения $\text{dom } M$ снабжена нормой графика

$$\|\cdot\|_{\text{dom } M} = \|\cdot\|_{\mathfrak{U}} + \|M \cdot\|_{\mathfrak{V}}$$

замкнутого оператора M и поэтому является банаховым пространством.

3. Линейное уравнение соболевского типа с памятью. Пусть $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ – банаховы пространства, $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$, $M \in Cl(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$, $\mathcal{K}: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$ – заданная оператор-функция. Далее везде считаем, что $\mathcal{K}$ – не тождественный нуль. Рассмотрим задачу

$$u(t) = h(t), \quad t \in (-\infty, 0], \quad (3.1)$$

для уравнения

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + \int_0^\infty \mathcal{K}(s)u(t-s) ds, \quad t \in [0, T], \quad (3.2)$$

где

$$\int_0^\infty \mathcal{K}(s)u(t-s) ds = \int_0^t \mathcal{K}(s)u(t-s) ds + \int_0^\infty \mathcal{K}(t+s)h(-s) ds.$$

Заданная функция $h: (-\infty, 0] \rightarrow \mathfrak{U}$ описывает “историю” системы, а интегральный оператор можно назвать оператором памяти.

Решением задачи (3.1), (3.2) на интервале $(-\infty, T)$ называется удовлетворяющая уравнению (3.2) на $[0, T]$ и условию (3.1) функция $u \in C^1([0, T]; \mathfrak{U}) \cap C((-\infty, T); \mathfrak{U})$.

Обозначим через $BC((-\infty, 0]; \mathfrak{U})$ множество ограниченных и непрерывных функций, действующих из $(-\infty, 0]$ в $\mathfrak{U}$.

ЛЕММА 1. Пусть $h \in BC((-\infty, 0]; \mathfrak{U})$,

$$\mathcal{K} \in C^{p+1}([0, +\infty); \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})),$$

$$\mathcal{K}^{(n)} \in L_1(0, +\infty; \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})) \quad \text{при } n = 0, 1, \dots, p+1.$$

Тогда при любых $n = 0, 1, \dots, p$, $t \geq 0$

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty \mathcal{K}^{(n)}(t+s)h(-s) ds = \int_0^\infty \mathcal{K}^{(n+1)}(t+s)h(-s) ds.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $h \in BC((-\infty, 0]; \mathfrak{U})$ обозначим $\sup_{t \leq 0} \|h(t)\|_{\mathfrak{U}} = \|h\|_0$. Сходимость интегралов из правой части последнего равенства при $t \geq 0$ следует из неравенств

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\infty \mathcal{K}^{(n)}(t+s)h(-s) ds \right\|_{\mathfrak{V}} &\leq \int_0^\infty \|\mathcal{K}^{(n)}(t+s)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})} ds \|h\|_0 \\ &\leq \|\mathcal{K}^{(n)}(s)\|_{L_1(0, +\infty; \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V}))} \|h\|_0, \quad n = 0, 1, \dots, p+1. \end{aligned}$$

В силу принадлежности оператор-функции $\mathcal{K}^{(n)}$ пространству $L_1(0, +\infty; \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V}))$ для $n = 0, 1, \dots, p+1$, $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое $A > 0$, что при $A' > A$

$$\int_{A'}^\infty \|\mathcal{K}^{(n)}(s)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})} ds < \frac{\varepsilon}{\|h\|_0}.$$

Тогда при любом $A' > A$ и сразу при всех $t \geq 0$

$$\left\| \int_{A'}^\infty \mathcal{K}^{(n)}(t+s)h(-s) ds \right\|_{\mathfrak{V}} \leq \int_{A'+t}^\infty \|\mathcal{K}^{(n)}(s)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})} ds \|h\|_0 < \varepsilon;$$

следовательно, интеграл $\int_0^\infty \mathcal{K}^{(n)}(t+s)h(-s) ds$ сходится равномерно по параметру t на полуоси $[0, +\infty)$. Поэтому при $n = 1, \dots, p+1$ интеграл $\int_0^\infty \mathcal{K}^{(n-1)}(t+s)h(-s) ds$ дифференцируем по t на $[0, +\infty)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть оператор M сильно (L, p) -радиален, $h \in BC((-\infty, 0]; \mathfrak{U})$ и $h(0) \in \text{dom } M$,

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &\in C^{p+1}([0, +\infty); \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})), \\ \mathcal{K}^{(n)} &\in L_1(0, +\infty; \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})) \quad \text{при } n = 0, 1, \dots, p+1, \\ \mathcal{K}^{(n)}(0) &= 0 \quad \text{при } n = 0, 1, \dots, p, \end{aligned}$$

и пусть

$$(I - P)h(0) = - \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1} (I - Q) \int_0^\infty \mathcal{K}^{(k)}(s) h(-s) ds. \quad (3.3)$$

Тогда при некотором $T_0 > 0$ существует единственное решение

$$u \in C^1([0, T_0]; \mathfrak{U}) \cap C((-\infty, T_0); \mathfrak{U})$$

задачи (3.1), (3.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $t \geq 0$, $n = 0, 1, \dots, p+1$ обозначим

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\mathcal{K}^{(n)}(s)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})} ds &= K_n(t), \quad \int_0^t (t-s) \|\mathcal{K}^{(n)}(s)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})} ds = K_{n,1}(t), \\ \|L_1^{-1}Q\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V}^1; \mathfrak{U}^1)} &= C, \quad \|H^k M_0^{-1} (I - Q)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V}^0; \mathfrak{U}^0)} = h_k, \quad k = 0, 1, \dots, p, \\ \sup_{t \leq 0} \|h(t)\|_{\mathfrak{U}} &= \|h\|_0. \end{aligned}$$

Кроме того, пусть при $t \geq 0$

$$K(t) = \max\{K, Ke^{at}\} = \begin{cases} K, & a \leq 0, \\ Ke^{at}, & a > 0, \end{cases}$$

где K , a – константы из определения сильной (L, p) -радиальности оператора M . Тогда в силу теоремы 1 (vi)

$$\|U(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \leq K(T) \quad \text{при всех } t \in [0, T].$$

Рассмотрим функцию

$$F(t) = \sup \left\{ CK(t) \sum_{n=0}^{p+1} K_{n,1}(t) + h_0 \sum_{n=0}^{p+1} K_n(t), h_1 \sum_{n=0}^{p+1} K_n(t), \dots, h_p \sum_{n=0}^{p+1} K_n(t) \right\}, \quad t \geq 0.$$

Очевидны ее неотрицательность, непрерывность и монотонное неубывание, а также тот факт, что $F(0) = 0$.

Если $\mathcal{K}^{(n)}$ не тождественно нулевая оператор-функция, то существует интервал $(s_1, s_2) \in (0, +\infty)$, на котором непрерывная функция $\|\mathcal{K}^{(n)}(s)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})}$ не обращается в нуль. Следовательно, в силу неотрицательности подынтегральной функции при $t > s_2$

$$\int_0^t (t-s) \|\mathcal{K}^{(n)}(s)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})} ds \geq (t-s_2) \int_0^{s_2} \|\mathcal{K}^{(n)}(s)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})} ds \rightarrow +\infty$$

при $t \rightarrow +\infty$. Таким образом, функция F неограничена, и в силу ее непрерывности найдется наименьшее число $T_0 > 0$ такое, что $F(T_0) = 1$. Поэтому при $T \in (0, T_0)$ имеем $F(T) < 1$.

Рассмотрим уравнение

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + g(t). \quad (3.4)$$

Согласно теореме 2, если $g \in C^{p+1}([0, T]; \mathfrak{V})$ удовлетворяет условию (2.1), то решение $u \in C^1([0, T]; \mathfrak{U})$ задачи Коши

$$u(0) = u_0 \equiv h(0) \in \text{dom } M$$

для уравнения (3.4) существует, единственно и имеет вид (2.2) при $t \in [0, T]$. Определим оператор

$$\begin{aligned} [\Phi g](t) &= \int_0^\infty \mathcal{K}(s)u(t-s) ds \\ &= \int_0^t \mathcal{K}(s)U(t-s)u_0 ds + \int_0^t \mathcal{K}(s) \int_0^{t-s} U(\tau)L_1^{-1}Qg(t-s-\tau) d\tau ds \\ &\quad - \int_0^t \mathcal{K}(s) \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1}(I-Q)g^{(k)}(t-s) ds + \int_0^\infty \mathcal{K}(t+s)h(-s) ds, \end{aligned}$$

где функция u при $t \in [0, T]$ определяется функцией g по формуле (2.2), а при $t < 0$ совпадает с h . Такая функция является решением $u \in C^1([0, T]; \mathfrak{U}) \cap C((-\infty, T]; \mathfrak{U})$ задачи (3.1), (3.4).

Нетрудно убедиться, что в условиях теоремы при $t \in [0, T]$, $n = 0, 1, \dots, p+1$

$$\begin{aligned} [\Phi g]^{(n)}(t) &= \int_0^t \mathcal{K}^{(n)}(s)U(t-s)u_0 ds + \int_0^t \mathcal{K}^{(n)}(s) \int_0^{t-s} U(t-s-\tau)L_1^{-1}Qg(\tau) d\tau ds \\ &\quad - \int_0^t \mathcal{K}^{(n)}(s) \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1}(I-Q)g^{(k)}(t-s) ds + \int_0^\infty \mathcal{K}^{(n)}(t+s)h(-s) ds, \end{aligned}$$

так как $\mathcal{K}^{(n)}(0) = 0$ при всех $n = 0, 1, \dots, p$. При этом используется замена переменной s на $t-s$ до дифференцирования и обратная замена после него. Имеем очевидные равенства

$$[\Phi g]^{(n)}(0) = \int_0^\infty \mathcal{K}^{(n)}(s)h(-s) ds, \quad n = 0, 1, \dots, p+1. \quad (3.5)$$

Рассмотрим банахово пространство $C^{p+1}([0, T]; \mathfrak{V})$ с нормой

$$\|g\|_{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1} \sup_{t \in [0, T]} \|g^{(k)}(t)\|_{\mathfrak{V}}$$

и метрическое пространство

$$\mathfrak{X} = \left\{ g \in C^{p+1}([0, T]; \mathfrak{V}) : - \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1}(I-Q)g^{(k)}(0) = (I-P)h(0) \right\}$$

с метрикой $d(g, h) = \|g - h\|_{p+1}$. Нетрудно заметить, что $\mathfrak{X}$ является полным метрическим пространством. Оно не пусто, поскольку содержит постоянную функцию $g \equiv -Mh(0)$. Действительно, в силу замечания 3

$$M_0^{-1}(I - Q)Mh(0) = M_0^{-1}M(I - P)h(0) = (I - P)h(0).$$

С учетом условия (3.3) и равенств (3.5) имеем действие оператора $\Phi: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$.

Обозначим $\|g\|_0 = \sup_{t \in [0, T]} \|g(t)\|_{\mathfrak{X}}$; тогда для $g_1, g_2 \in \mathfrak{X}$

$$\begin{aligned} [\Phi g_1](t) - [\Phi g_2](t) &= \int_0^t \mathcal{K}(s) \int_0^{t-s} U(t-s-\tau) L_1^{-1} Q(g_1(\tau) - g_2(\tau)) d\tau ds \\ &\quad - \int_0^t \mathcal{K}(s) \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1}(I - Q)(g_1^{(k)}(t-s) - g_2^{(k)}(t-s)) ds, \\ \|\Phi g_1 - \Phi g_2\|_{p+1} &\leq CK(T) \sum_{n=0}^{p+1} K_{n,1}(T) \|g_1 - g_2\|_0 + \sum_{n=0}^{p+1} K_n(T) \sum_{k=0}^p h_k \|g_1^{(k)} - g_2^{(k)}\|_0 \\ &\leq F(T) \|g_1 - g_2\|_{p+1}. \end{aligned}$$

Поскольку при заданном T выполняется неравенство $F(T) < 1$, то отображение $\Phi: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ является сжимающим. Следовательно, по теореме о неподвижной точке найдется единственный элемент $g_0 \in \mathfrak{X}$ такой, что $g_0 = \Phi g_0$. В этом случае функция

$$u(t) = U(t)u_0 + \int_0^t U(t-s) L_1^{-1} Q g_0(s) ds - \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1}(I - Q) g_0^{(k)}(t)$$

является одновременно решением задач (3.1), (3.2) и (3.1), (3.4), так как

$$L\dot{u}(t) - Mu(t) = g_0(t) = [\Phi g_0](t) = \int_0^\infty \mathcal{K}(s) u(t-s) ds.$$

Так как можно взять любое $T < T_0$, то решение задачи (3.1), (3.2) существует на интервале $(-\infty, T_0)$.

Пусть $u_1, u_2 \in C^1([0, T]; \mathfrak{U}) \cap C((-\infty, T); \mathfrak{U})$ – два решения задачи (3.1), (3.2) при $T < T_0$. При $i = 1, 2$ обозначив

$$g_i(t) = \int_0^t \mathcal{K}(t-s) u_i(s) ds + \int_0^\infty \mathcal{K}(t+s) h(-s) ds,$$

получим

$$g_i^{(n)}(t) = \int_0^t \mathcal{K}^{(n)}(t-s) u_i(s) ds + \int_0^\infty \mathcal{K}^{(n)}(t+s) h(-s) ds, \quad n = 1, \dots, p+1,$$

так как $\mathcal{K}^{(n)}(0) = 0$ при $n = 0, 1, \dots, p$. Имеем $L\dot{u}_i - Mu_i = g_i$. При этом $g_i \in \mathfrak{X}$ в силу равенств (3.5) для g_i и условия (3.3), и по построению оператора Φ выполняется $\Phi g_i = g_i$, $i = 1, 2$. В силу единственности неподвижной точки отображения $\Phi: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ получаем равенство $g_1 \equiv g_2$. Обозначим $w(t) = u_1(t) - u_2(t)$, $t \in [0, T]$; тогда

$$L\dot{w}(t) - Mw(t) \equiv 0, \quad w(0) = 0.$$

В силу теоремы 2 $w \equiv 0$, поэтому решение задачи (3.1), (3.2) единственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Ограничения на T_0 определяются только операторами L , M и оператор-функцией $\mathcal{K}$ и не зависят от h .

Помимо задачи (3.1) рассмотрим аналог обобщенной задачи Шоултера [14], [15]

$$Pu(t) = h(t), \quad t \in (-\infty, 0]. \quad (3.6)$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть оператор M сильно (L, p) -радиален, $h \in BC((-\infty, 0]; \mathfrak{U}^1)$ и $h(0) \in \text{dom } M_1$,

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &\in C^{p+1}([0, +\infty); \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{Y})), \\ \mathcal{K}^{(n)} &\in L_1(0, +\infty; \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{Y})) \quad \text{при } n = 0, 1, \dots, p+1, \\ \mathcal{K}^{(n)}(0) &= 0 \quad \text{при } n = 0, 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Тогда при некотором $T_0 > 0$ существует единственное решение

$$u \in C^1([0, T_0]; \mathfrak{U}) \cap C((-\infty, T_0); \mathfrak{U})$$

задачи (3.2), (3.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО отличается от доказательства предыдущей теоремы лишь тем, что используется метрическое пространство $\mathfrak{X} = C^{p+1}([0, T]; \mathfrak{Y})$. Это обусловлено тем фактом, что в теореме 3 о разрешимости обобщенной задачи Шоултера не используется условие (2.1) согласования начального значения задачи с функцией в правой части уравнения, которое является необходимым для разрешимости задачи Коши.

4. Псевдопараболическое уравнение с памятью. В качестве примера применения теоремы 4 рассмотрим начально-краевую задачу

$$z(x, t) = z_0(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (-\infty, 0], \quad (4.1)$$

$$z(x, t) = \Delta z(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T), \quad (4.2)$$

для уравнения Дзекцера [12] с памятью

$$(\lambda - \Delta)z_t(x, t) = \Delta z(x, t) - \beta \Delta^2 z(x, t) + \int_0^\infty \int_\Omega k(x, \xi, s) z(\xi, t - s) d\xi ds, \quad (4.3)$$

$$(x, t) \in \Omega \times [0, T),$$

где ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет гладкую границу $\partial\Omega$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}_+$.

Пусть

$$H_0^2(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega) : u(x) = 0, x \in \partial\Omega\}.$$

Чтобы редуцировать задачу (4.1)–(4.3) к задаче (3.1), (3.2), введем в рассмотрение семейство интегральных операторов $\mathcal{K}(s) : H_0^2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$, $s \geq 0$, вида

$$[\mathcal{K}(s)u](\cdot) = \int_\Omega k(\cdot, \xi, s) u(\xi) d\xi.$$

В силу неравенства Гёльдера для $u \in H_0^2(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}(s)u\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \int_\Omega \left| \int_\Omega k(x, \xi, s) u(\xi) d\xi \right|^2 dx \\ &\leq \int_\Omega \int_\Omega |k(x, \xi, s)|^2 d\xi dx \int_\Omega |u(\xi)|^2 d\xi \leq \int_\Omega \int_\Omega |k(x, \xi, s)|^2 d\xi dx \|u\|_{H^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

и

$$\|\mathcal{K}(s)\|_{\mathcal{L}(H_0^2(\Omega); L_2(\Omega))} \leq \|k(\cdot, \cdot, s)\|_{L_2(\Omega \times \Omega)}, \quad s \geq 0. \quad (4.4)$$

Обозначим через λ_m , $m \in \mathbb{N}$, собственные значения оператора Лапласа, определенного на $H_0^2(\Omega)$ и действующего в $L_2(\Omega)$, занумерованные по невозрастанию с учетом их кратности. Кроме того, пусть $\{\varphi_m : m \in \mathbb{N}\}$ – ортонормированная система соответствующих собственных функций этого оператора. Пусть $\lambda_m = \lambda$ при некоторых m , т.е. уравнение (4.3) не разрешимо относительно z_t .

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \beta^{-1}$, $z_0 \in BC((-\infty, 0]; H_0^2(\Omega))$, $z_0(\cdot, 0) \in H^4(\Omega)$, $z_0(x, 0) = 0$ и $\Delta z_0(x, 0) = 0$ при н.в. $x \in \partial\Omega$, $k \in C^1([0, +\infty); L_2(\Omega \times \Omega))$, $k(x, \xi, 0) \equiv 0$,

$$\int_0^\infty \left(\int_\Omega \int_\Omega |k(x, \xi, s)|^2 d\xi dx \right)^{1/2} ds < \infty, \quad \int_0^\infty \left(\int_\Omega \int_\Omega |k_s(x, \xi, s)|^2 d\xi dx \right)^{1/2} ds < \infty, \quad (4.5)$$

$$\langle z_0(\cdot, 0), \varphi_m \rangle = -\frac{1}{\lambda - \beta\lambda^2} \left\langle \int_0^\infty \int_\Omega k(\cdot, \xi, s) z_0(\xi, -s) d\xi ds, \varphi_m \right\rangle \quad (4.6)$$

при $m \in \mathbb{N}$, для которых $\lambda_m = \lambda$. Тогда при некотором $T_0 > 0$ существует единственное решение

$$u \in C^1([0, T_0]; H_0^2(\Omega)) \cap C((-\infty, T_0); H_0^2(\Omega))$$

задачи (4.1)–(4.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем пространства $\mathfrak{U} = H_0^2(\Omega)$, $\mathfrak{V} = L_2(\Omega)$, операторы $L = \lambda - \Delta$, $M = \Delta - \beta\Delta^2$ с областью определения

$$\text{dom } M = \{u \in H^4(\Omega) : u(x) = \Delta u(x) = 0, x \in \partial\Omega\}.$$

В [15] доказано (теорема 5.1), что в случае $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \beta^{-1}$ такой оператор M является сильно $(L, 0)$ -радиальным. Кроме того, очевидно, что функция $z_0(\cdot, t)$ соответствует $h(t)$ из условия (3.1) при $t \in (-\infty, 0]$.

Используя неравенство (4.4) и соображения, аналогичные тем, с помощью которых оно получено, нетрудно показать, что

$$\mathcal{K} \in C^1([0, +\infty); \mathcal{L}(H_0^2(\Omega); L_2(\Omega))),$$

условие (4.5) означает, что

$$\mathcal{K}, \mathcal{K}^{(1)} \in L_1(0, +\infty; \mathcal{L}(H_0^2(\Omega); L_2(\Omega))).$$

Наконец, условие (4.6) в точности представляет собой условие (3.3), поскольку в данном случае

$$I - P = \sum_{\lambda_m = \lambda} \langle \cdot, \varphi_m \rangle \varphi_m, \quad I - Q = \sum_{\lambda_m = \lambda} \langle \cdot, \varphi_m \rangle \varphi_m$$

(см. [15]). Для завершения доказательства осталось применить теорему 4.

Рассмотрим теперь задачу (4.1), (4.2) для уравнения

$$(\lambda - \Delta)z_t(x, t) = \Delta z(x, t) - \beta \Delta^2 z(x, t) + \int_0^\infty k(s)z(x, t-s) ds, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T), \quad (4.7)$$

в такой же области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Операторы $\mathcal{K}(s): H_0^2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$, $s \geq 0$, имеют вид

$$[\mathcal{K}(s)u](\cdot) = k(s)u(\cdot), \quad \|\mathcal{K}(s)\|_{\mathcal{L}(H_0^2(\Omega); L_2(\Omega))} \leq |k(s)|.$$

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \beta^{-1}$, $z_0 \in BC((-\infty, 0]; H_0^2(\Omega))$, $z_0(\cdot, 0) \in H^4(\Omega)$, $z_0(x, 0) = 0$ и $\Delta z_0(x, 0) = 0$ при п.в. $x \in \partial\Omega$, $k \in C^1([0, +\infty); \mathbb{R})$, $k, k' \in L_1(0, +\infty; \mathbb{R})$, $k(0) = 0$,

$$\langle z_0(\cdot, 0), \varphi_m \rangle = -\frac{1}{\lambda - \beta\lambda^2} \left\langle \int_0^\infty k(s)z_0(\cdot, s) ds, \varphi_m \right\rangle$$

при $m \in \mathbb{N}$, для которых $\lambda_m = \lambda$. Тогда при некотором $T_0 > 0$ существует единственное решение

$$u \in C^1([0, T_0); H_0^2(\Omega)) \cap C((-\infty, T_0); H_0^2(\Omega))$$

задачи (4.1), (4.2), (4.7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве предыдущей теоремы, достаточно проверить выполнение условий теоремы 4.

Оценим величину T_0 для задачи (4.1), (4.2), (4.7) согласно теореме 4, выбрав

$$n = 1, \quad \Omega = (0, \pi), \quad \lambda = -1, \quad \beta = 2$$

и используя результаты работы [15]. Тогда $\lambda_m = -m^2$, $\varphi_m = \sin mx$ при $m \in \mathbb{N}$,

$$L_1^{-1}Q = \sum_{m=2}^\infty \frac{\langle \cdot, \sin mx \rangle \sin mx}{m^2 - 1},$$

поэтому для $v \in L_2(\Omega)$

$$\|L_1^{-1}Qv\|_{H^2(\Omega)}^2 = \sum_{m=2}^\infty \frac{(1 + m^4)|\langle v, \sin mx \rangle|^2}{(m^2 - 1)^2},$$

и

$$C = \|L_1^{-1}Q\|_{\mathcal{L}(L_2(\Omega); H^2(\Omega))} = \sup_{m=2,3,\dots} \frac{\sqrt{1 + m^4}}{m^2 - 1} = \frac{\sqrt{17}}{3}.$$

Аналогично,

$$M_0^{-1}(I - Q) = \frac{\langle \cdot, \sin x \rangle \sin x}{\lambda_1 - 2\lambda_1^2} = -\frac{1}{3} \langle \cdot, \sin x \rangle \sin x,$$

$$h_0 = \|M_0^{-1}(I - Q)\|_{\mathcal{L}(L_2(\Omega); H_0^2(\Omega))} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$a = \sup_{m=2,3,\dots} \frac{-m^2 - 2m^4}{m^2 - 1} = -12, \quad K(t) = K = \sup \left\{ 1, \frac{\sqrt{17}}{3} \right\} = \frac{\sqrt{17}}{3}.$$

В силу теоремы 4 имеем $T_0 = \min\{T > 0 : F(T) = 1\}$, где

$$F(T) = \frac{17}{9} \int_0^T (T-s)(|k(s)| + |k'(s)|) ds + \frac{\sqrt{2}}{3} \int_0^T (|k(s)| + |k'(s)|) ds.$$

5. Вырожденная система уравнений в частных производных с памятью. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ , $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $k_{ij}: \Omega \times \Omega \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2$. Рассмотрим задачу

$$y(x, t) = y_0(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (-\infty, 0], \quad (5.1)$$

$$\gamma \frac{\partial y}{\partial n}(x, t) + (1 - \gamma)y(x, t) = \gamma \frac{\partial z}{\partial n}(x, t) + (1 - \gamma)z(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T), \quad (5.2)$$

для системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) &= \Delta y(x, t) - \Delta z(x, t) \\ &+ \int_0^\infty \int_\Omega (k_{11}(x, \xi, s)y(\xi, t-s) + k_{12}(x, \xi, s)z(\xi, t-s)) d\xi ds, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \Delta z(x, t) &+ \beta z(x, t) + \alpha y(x, t) \\ &+ \int_0^\infty \int_\Omega (k_{21}(x, \xi, s)y(\xi, t-s) + k_{22}(x, \xi, s)z(\xi, t-s)) d\xi ds = 0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

в цилиндре $(x, t) \in \Omega \times [0, T)$. Искомыми в задаче являются функции $y(x, t)$, $z(x, t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Система уравнений (5.3), (5.4) при $k_{ij} \equiv 0$, $i, j = 1, 2$, эквивалентна линеаризованной системе уравнений фазового поля, описывающей фазовые переходы первого рода при условии нулевого времени релаксации [3], [4].

Положим $\mathfrak{U} = \mathfrak{V} = (L_2(\Omega))^2$,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}), \quad M = \begin{pmatrix} \Delta & -\Delta \\ \alpha & \beta + \Delta \end{pmatrix} \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}),$$

$$H_\gamma^2(\Omega) = \left\{ w \in H^2(\Omega) : \left(\gamma \frac{\partial}{\partial n} + 1 - \gamma \right) w(x) = 0, x \in \partial\Omega \right\},$$

$\text{dom } M = (H_\gamma^2(\Omega))^2$, при $s \geq 0$, $(\zeta_1, \zeta_2) \in \mathfrak{U}$

$$\mathcal{K}(s)(\zeta_1, \zeta_2) = \begin{pmatrix} \int_\Omega (k_{11}(x, \xi, s)\zeta_1(\xi) + k_{12}(x, \xi, s)\zeta_2(\xi)) d\xi \\ \int_\Omega (k_{21}(x, \xi, s)\zeta_1(\xi) + k_{22}(x, \xi, s)\zeta_2(\xi)) d\xi \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}(s)(\zeta_1, \zeta_2)\|_{\mathfrak{V}}^2 &\leq \sum_{i=1}^2 \int_\Omega \left(\int_\Omega |k_{i1}(x, \xi, s)\zeta_1(\xi)| d\xi + \int_\Omega |k_{i2}(x, \xi, s)\zeta_2(\xi)| d\xi \right)^2 dx \leq \\ &\leq 2 \sum_{i,j=1}^2 \int_\Omega \left(\int_\Omega |k_{ij}(x, \xi, s)\zeta_j(\xi)| d\xi \right)^2 dx \\ &\leq 2 \|(\zeta_1, \zeta_2)\|_{\mathfrak{U}}^2 \sum_{i,j=1}^2 \int_\Omega \int_\Omega |k_{ij}(x, \xi, s)|^2 d\xi dx. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\mathcal{K}(s)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \leq \sqrt{2 \sum_{i,j=1}^2 \int_\Omega \int_\Omega |k_{ij}(x, \xi, s)|^2 d\xi dx}.$$

Обозначим

$$Aw = \Delta w, \quad \text{dom } A = H_\gamma^2(\Omega) \subset L_2(\Omega).$$

Через $\{\varphi_m : m \in \mathbb{N}\}$ обозначим ортонормированные в смысле скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в $L_2(\Omega)$ собственные функции оператора A , занумерованные по невозрастаанию собственных значений $\{\lambda_m : m \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

В работе [16] показано, что при условии $-\beta \notin \sigma(A)$ оператор M сильно $(L, 0)$ -радиален. При этом

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\alpha(\beta + A)^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & A(\beta + A)^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathfrak{U}^1 = \text{im } P = \{(v, -\alpha(\beta + A)^{-1}v) \in (L_2(\Omega))^2 : v \in L_2(\Omega)\},$$

$$\mathfrak{U}^0 = \ker P = \{0\} \times L_2(\Omega),$$

$$\mathfrak{V}^1 = \text{im } Q = \{(v + A(\beta + A)^{-1}w, 0) \in (L_2(\Omega))^2 : v, w \in (L_2(\Omega))^2\} = L_2(\Omega) \times \{0\},$$

$$\mathfrak{V}^0 = \ker Q = \{(v, w) \in (L_2(\Omega))^2 : v + A(\beta + A)^{-1}w = 0\}.$$

Таким образом, условие (5.1) равносильно обобщенному условию Шоултера и из теоремы 5 сразу получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $-\beta \notin \sigma(A)$, $y_0 \in BC((-\infty, 0]; L_2(\Omega))$, $y_0(0) \in H_\gamma^2(\Omega)$, $k_{ij} \in C^1([0, +\infty); L_2(\Omega \times \Omega))$, $k_{ij}(x, \xi, 0) \equiv 0$,

$$\int_0^\infty \left(\sum_{i,j=1}^2 \int_\Omega \int_\Omega |k_{ij}(x, \xi, s)|^2 d\xi dx \right)^{1/2} ds < \infty,$$

$$\int_0^\infty \left(\sum_{i,j=1}^2 \int_\Omega \int_\Omega \left| \frac{\partial k_{ij}}{\partial s}(x, \xi, s) \right|^2 d\xi dx \right)^{1/2} ds < \infty.$$

Тогда при некотором $T_0 > 0$ существует единственное решение

$$y, z \in C^1([0, T_0]; L_2(\Omega)) \cap C((-\infty, T_0); L_2(\Omega))$$

задачи (5.1)–(5.4).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Grasselli, V. Pata, “Uniform attractors of nonautonomous dynamical systems with memory”, *Evolution Equations, Semigroups and Functional Analysis*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **50**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2002, 155–178.
- [2] M. Grasselli, M. Squassina, “Exponential stability and singular limit for a linear thermoelectric plate with memory effects”, *Adv. Math. Sci. Appl.*, **16**:1 (2006), 15–31.
- [3] П. И. Плотников, В. Н. Старовойтов, “Задача Стефана с поверхностным натяжением как предел модели фазового поля”, *Дифференц. уравнения*, **29**:3 (1993), 461–471.
- [4] П. И. Плотников, А. В. Клепачева, “Уравнения фазового поля и градиентные потоки маргинальных функций”, *Сиб. матем. журн.*, **42**:3 (2001), 651–669.
- [5] S. Gatti, M. Grasselli, V. Pata, M. Squassina, “Robust exponential attractors for a family of nonconserved phase-field systems with memory”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **12**:5 (2005), 1019–1029.

- [6] А. Г. Руткас, “Задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$ ”, *Дифференц. уравнения*, **11:11** (1975), 1996–2010.
- [7] Л. А. Власенко, *Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями*, Системные технологии, Днепропетровск, 2006.
- [8] В. Е. Федоров, О. А. Стахеева, “О локальной разрешимости линейных эволюционных уравнений с памятью”, *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*, **2:27** (2008), 104–109.
- [9] О. А. Стахеева, “Локальная разрешимость одного класса линейных уравнений с памятью”, *Вестн. Челябинск. гос. ун-та. Сер. Матем. Мех. Информ.*, **11:20** (2009), 70–76.
- [10] В. Е. Федоров, “Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов”, *Алгебра и анализ*, **12:3** (2000), 173–200.
- [11] В. Е. Федоров, “Обобщение теоремы Хилле–Иосиды на случай вырожденных полугрупп в локально выпуклых пространствах”, *Сиб. матем. журн.*, **46:2** (2005), 426–448.
- [12] Е. С. Дзекцер, “Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью”, *Докл. АН СССР*, **202:5** (1972), 1031–1033.
- [13] В. Е. Федоров, “Свойства псевдорезольвент и условия существования вырожденных полугрупп операторов”, *Вестн. Челябинск. гос. ун-та. Сер. Матем. Мех. Информ.*, **11:20** (2009), 12–19.
- [14] R. Showalter, “Partial differential equations of Sobolev–Galperin type”, *Pacific J. Math.*, **31:3** (1969), 787–793.
- [15] В. Е. Федоров, О. А. Рузакова, “О разрешимости возмущённых уравнений соболевского типа”, *Алгебра и анализ*, **20:4** (2008), 189–217.
- [16] В. Е. Федоров, А. В. Уразаева, “Обратная задача для одного класса сингулярных линейных операторно-дифференциальных уравнений”, *Тр. Воронежск. зимн. матем. школы*, ВГУ, Воронеж, 2004, 161–172.

В. Е. Федоров

Челябинский государственный университет

E-mail: kar@csu.ru

Поступило

16.08.2012

О. А. Стахеева

Челябинский государственный университет

E-mail: alda_87@mail.ru