Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Пастухова, Приближения резольвенты для несамосопряженного оператора диффузии с быстро осциллирующими коэффициентами, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 1, 130–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10105>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 16:26:37

Приближения резольвенты для несамосопряженного оператора диффузии с быстро осциллирующими коэффициентами

С. Е. Пастухова

Изучается сильно неоднородный оператор диффузии со сносом в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$, зависящий от малого параметра ε . Сильная неоднородность заключается в том, что коэффициенты оператора ε -периодические и, кроме того, вектор сноса имеет порядок ε^{-1} . При $\varepsilon \rightarrow 0$ для резольвенты оператора построены приближения в операторной L^2 -норме порядка ε и ε^2 . Для каждого из указанных порядков приближения найден свой усредненный оператор диффузии. Использован спектральный метод, основанный на блоховском представлении оператора с периодическими коэффициентами.

Библиография: 20 названий.

DOI: 10.4213/mzm10105

1. Постановка задачи. Нулевое приближение

1.1. Рассмотрим задачу диффузии во всем пространстве $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\in H^1(\mathbb{R}^n), & A_\varepsilon u_\varepsilon + u_\varepsilon &= f \in L^2(\mathbb{R}^n), \\ A_\varepsilon &= -\operatorname{div}(a_\varepsilon(x)\nabla) + \varepsilon^{-1}b_\varepsilon(x) \cdot \nabla, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где матрица диффузии и вектор сноса сильно неоднородны при $\varepsilon \rightarrow 0$. А именно,

$$a_\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad b_\varepsilon(x) = b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

при этом $a(y) = \{a_{ij}(y)\}$ – гладкая симметрическая матрица, заданная в $\mathbb{R}^n$, 1-периодическая по всем переменным $y_1, \dots, y_n$ ($\square = [-1/2, 1/2]^n$ – ячейка периодичности), подчиненная неравенству

$$\nu|\xi|^2 \leq a(y)\xi \cdot \xi \leq \nu^{-1}|\xi|^2 \quad \text{для всех } \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \nu > 0; \quad (1.2)$$

$b(y)$ – гладкий вектор, 1-периодический по переменным $y_1, \dots, y_n$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00331) и Министерства образования и науки РФ (грант-субсидия № 14.B37.21.0362).

Дифференциальное выражение в (1.1) определяет оператор A_ε в $L^2(\mathbb{R}^n)$, его область определения – соболевское пространство $H^2(\mathbb{R}^n)$.

Если $b \equiv 0$, получаем самосопряженный неотрицательный оператор. В общем случае A_ε несамосопряжен; формально имеем

$$A_\varepsilon^* = -\operatorname{div}(a_\varepsilon \nabla + \varepsilon^{-1} b_\varepsilon).$$

Эллиптическая теория гарантирует существование резольвенты $(A_\varepsilon + s)^{-1}$, если $s > 0$ достаточно велико. В нашем случае оператор A_ε обладает свойством аккретивности в подходящем весовом лебеговом пространстве $L^2(\mathbb{R}^n, p(x) dx)$ с невырожденным весом $p(x)$, т.е.

$$\operatorname{Re}(A_\varepsilon u, u)_{L^2(\mathbb{R}^n, p(x) dx)} \geq 0.$$

Следовательно, спектр оператора A_ε лежит в правой полуплоскости, резольвента $(A_\varepsilon + 1)^{-1}$ заведомо существует и уравнение (1.1) разрешимо.

Нас будут интересовать приближения к резольвенте $(A_\varepsilon + 1)^{-1}$ в операторной L^2 -норме, которые строятся с помощью подходящего однородного оператора диффузии, называемого усредненным или эффективным, и некоторого набора осциллирующих функций – решений специальных задач на ячейке периодичности. Это типичная ситуация теории усреднения. Для обоснования близости построенных приближений требуется лишь достаточная гладкость матрицы $a(x)$ и вектора $b(x)$, которую уточним позже (см. п. 2.1).

Справедлива

ТЕОРЕМА 1.1. *Найдутся*

- *постоянная симметрическая матрица $a^0 > 0$,*
- *вектор $\mu \in \mathbb{R}^n$,*
- *1-периодическая ограниченная положительная функция $p(x)$, нормированная условием*

$$\langle p \rangle = \int_{\square} p(x) dx = 1,$$

такие что

$$\left\| (A_\varepsilon + 1)^{-1} - (A_{0,\varepsilon} + 1)^{-1} p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c_0 \varepsilon, \quad (1.3)$$

где

$$A_{0,\varepsilon} = -\operatorname{div}(a^0 \nabla) + \varepsilon^{-1} \mu \cdot \nabla. \quad (1.4)$$

Матрица a^0 , вектор μ и функция p заданы в (1.11), (1.10) и (1.7) соответственно. Константа c_0 зависит от размерности n , постоянной эллиптичности ν из (1.2) и некоторых характеристик гладкости коэффициентов a_{ij} , b_j .

Предельный оператор $A_{0,\varepsilon}$ по своей структуре подобен оператору A_ε , но имеет постоянные коэффициенты. Кроме того, $A_{0,\varepsilon}$ аккретивен в $L^2(\mathbb{R}^n)$, т.е.

$$\operatorname{Re}(A_{0,\varepsilon} u, u)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq 0,$$

так что резольвента $(A_{0,\varepsilon} + 1)^{-1}$ очевидно определена.

Согласно (1.3) оператор $(A_{0,\varepsilon} + 1)^{-1}p(x/\varepsilon)$ является нулевым приближением к $(A_\varepsilon + 1)^{-1}$ с указанной погрешностью. Иначе говоря, решение уравнения

$$u_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^n), \quad A_{0,\varepsilon}u_{0,\varepsilon} + u_{0,\varepsilon} = p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)f(x), \quad (1.5)$$

приближает решение задачи (1.1) так, что

$$\|u_\varepsilon(x) - u_{0,\varepsilon}(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c_0\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.6)$$

Аппроксимация к $(A_\varepsilon + 1)^{-1}$, более точная, чем в (1.3), будет построена в п. 3.

Заметим, что в самосопряженном случае (когда $b \equiv 0$) усредненное уравнение не содержит параметр ε : $A_{0,\varepsilon} = A_0 = -\operatorname{div}(a^0\nabla)$, а вес отсутствует: $p \equiv 1$. Таким образом, имеет место классическое усреднение.

1.2. Для точного определения приближений к резольвенте $(A_\varepsilon + 1)^{-1}$ введем основные задачи на ячейке периодичности:

$$p \in H_{\text{per}}^1(\square), \quad -\operatorname{div}(a\nabla p + bp) = 0, \quad \langle p \rangle = 1, \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} N_j \in H_{\text{per}}^1(\square), \quad & -\operatorname{div} a(\nabla N_j + e_j) + b \cdot (\nabla N_j + e_j) - \mu_j = 0, \\ \langle pN_j \rangle = 0, \quad & j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} M_j \in H_{\text{per}}^1(\square), \quad & -\operatorname{div}[a(\nabla M_j + pe_j) + bM_j] - g_j + p\mu_j = 0, \\ \langle M_j \rangle = 0, \quad & j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $e_1, \dots, e_n$ – канонический базис в $\mathbb{R}^n$, а векторы $\mu \in \mathbb{R}^n$ и g определены через решение задачи (1.7) как

$$\mu = \langle g \rangle, \quad g = a\nabla p + bp. \quad (1.10)$$

Здесь и всюду далее $H_{\text{per}}^1(\square) = H^1(\square)$ – пространство Соболева 1-периодических функций, а решение задач на ячейке можно понимать в слабом смысле – через интегральное тождество на пробных функциях из класса $C_{\text{per}}^\infty(\square)$. Например, для N_j выполнено тождество

$$\int_{\square} [a(\nabla N_j + e_j) \cdot \nabla \varphi + b \cdot (\nabla N_j + e_j)\varphi - \mu_j \varphi] dx = 0, \quad \varphi \in C_{\text{per}}^\infty(\square).$$

Ввиду гладкости коэффициентов слабые решения этих задач оказываются классическими.

Задача (1.7) имеет единственное решение, причем строго положительное. Это следует из принципа максимума, см. подробнее в п. 2.

Покажем разрешимость уравнения (1.8). Поскольку оно имеет структуру

$$AN_j = F_0 + \operatorname{div} F, \quad F_0 = (\mu - b) \cdot e_j, \quad F = ae_j,$$

условие его разрешимости (правая часть ортогональна в $L^2(\square)$ решению однородного сопряженного уравнения, см. (1.7)) означает

$$\langle (F_0 + \operatorname{div} F)p \rangle = 0 \iff \langle a\nabla p + bp \rangle \cdot e_j = \mu_j,$$

что обеспечено выбором вектора μ согласно (1.10). Аналогично проверяется условие разрешимости для уравнения (1.9)). Здесь важно, что сопряженное к (1.7) уравнение имеет в качестве решений лишь константы. Нетрудно понять, что выставленные в (1.8), (1.9) условия ортогональности выделяют решения этих задач однозначно. Не совсем обычный вид условий ортогональности (1.8) (присутствие веса p) удобен для дальнейших построений.

Матрицу a^0 определим через квадратичную форму

$$a^0 \xi \cdot \xi = \langle pa(\nabla N_\xi + \xi) \cdot (\nabla N_\xi + \xi) \rangle, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (1.11)$$

где $N_\xi = \sum_{j=1}^n N_j \xi_j$ и N_j – решение задачи (1.8). Отсюда немедленно следуют отмеченные в теореме 1.1 свойства матрицы a^0 .

2. Вспомогательные задачи на ячейке

Этот пункт носит подготовительный характер – мы введем объекты, необходимые при построении первого приближения к резольвенте $(A_\varepsilon + 1)^{-1}$.

2.1. Задачи на ячейке первого порядка. В наших рассуждениях важную роль играют следующие однородные задачи на ячейке периодичности:

$$Au \equiv -\operatorname{div} a \nabla u + b \cdot \nabla u = 0, \quad \langle u \rangle = 1, \quad (2.1)$$

$$A^*p \equiv -\operatorname{div}(a \nabla p + bp) = 0, \quad \langle p \rangle = 1. \quad (2.2)$$

В силу гладкости коэффициентов слабые решения этих уравнений являются классическими и к уравнениям применим принцип максимума [1; гл. III]. Для этого требуется лишь принадлежность $a, b \in C^1(\square)$, $u, p \in C^2(\square)$. Рассмотрим эти задачи подробнее.

1°. Задача (2.1) имеет очевидное решение $u \equiv 1$, и по принципу максимума других решений нет. Следовательно, оператор A имеет простое собственное значение $\lambda_0 = 0$ с собственной функцией $u \equiv 1$. Тогда сопряженный оператор A^* также имеет простое собственное значение $\lambda_0 = 0$ с собственной функцией p – решением задачи (2.2). При этом $p \geq 0$. В противном случае нашлась бы функция $f \leq 0$ такая, что $\langle pf \rangle = 0$ и уравнение $Au = f$ разрешимо по альтернативе Фредгольма. Последнее противоречит принципу максимума. На самом деле, по принципу нулевого минимума для неотрицательного решения уравнения (2.2) выводим строгую положительность $p(x)$. Следовательно,

$$0 < p_1 \leq p(x) \leq p_2. \quad (2.3)$$

Анализ решений уравнений (2.1) и (2.2) заимствован из [2; гл. I, §3].

2°. По построению (см. (2.2)) вектор

$$g = a \nabla p + bp \quad (2.4)$$

гладкий и соленоидальный, т.е.

$$\operatorname{div} g = 0. \quad (2.5)$$

3°. С функцией p и вектором g связано следующее преобразование:

$$-p \operatorname{div}(a \nabla u) + pb \cdot \nabla u = -\operatorname{div}(pa \nabla u) + (a \nabla p + bp) \cdot \nabla u = -\operatorname{div}(pa \nabla u) + g \cdot \nabla u, \quad (2.6)$$

которое, по-видимому, впервые введено В. В. Жиковым в [3]. Видим, что при умножении A слева на p получается аналогичный оператор, но с матрицей pa (вместо a) и соленоидальным вектором g (вместо b). Тогда

$$(pAu, u)_{L^2(\square, dx)} = \int_{\square} pa \nabla u \cdot \nabla \bar{u} \, dx + \int_{\square} (g \cdot \nabla u) \bar{u} \, dx,$$

и по свойству (2.3)

$$\operatorname{Re}(pAu, u)_{L^2(\square)} = \int_{\square} pa \nabla u \cdot \nabla \bar{u} \, dx + \frac{1}{2} \int_{\square} g \cdot \nabla |u|^2 \, dx = \int_{\square} pa \nabla u \cdot \nabla \bar{u} \, dx \geq 0. \quad (2.7)$$

Последнее равенство в (2.7) справедливо в силу (2.5).

Используя преобразование (2.6), можно переписать уравнение (1.8) в виде

$$-\operatorname{div}[pa(\nabla N_j + e_j)] + g \cdot (\nabla N_j + e_j) - p\mu_j = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.8)$$

С другой стороны, справедливо преобразование

$$-\operatorname{div}[a \nabla(pm) + b(pm)] = -\operatorname{div}(pa \nabla m) - g \cdot \nabla m, \quad (2.9)$$

которое позволяет получить из (1.9) уравнение для $m_j = p^{-1}M_j$:

$$-\operatorname{div} pa(\nabla m_j + e_j) - g \cdot (\nabla m_j + e_j) + p\mu_j = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.10)$$

Уравнения (2.8) и (2.10) схожи по своей структуре, и соответствующие им однородные уравнения имеют в качестве решений лишь константы, что является следствием соленоидальности вектора g .

2.2. Задачи на ячейке второго и третьего порядков. Чтобы сформулировать результат о приближении первого порядка, необходимо ввести вспомогательные объекты: 1-периодические функции $\{N_\alpha(y)\}_\alpha$ и константы $\{a_\alpha^0\}_\alpha$ с мультииндексом α длины 2 и 3.

Здесь α – мультииндекс длины $|\alpha| = m$, $m \in \mathbb{N}$, следующего вида:

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m), \quad \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_m, \quad \alpha_j \in \{1, \dots, n\}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (2.11)$$

Договоримся о некоторых обозначениях, связанных с мультииндексами.

Индекс $\alpha_{\bar{s}}$ получается из α вычеркиванием компоненты α_s , индекс $\alpha_{\bar{s}\bar{p}}$ – вычеркиванием из $\alpha_{\bar{s}}$ компоненты α_p и т.д. Ясно, что $|\alpha_{\bar{s}}| = m - 1$, $|\alpha_{\bar{s}\bar{p}}| = m - 2$. Если индекс β составлен из некоторых компонент индекса α , то пишем $\beta \subset \alpha$, а индекс $\alpha_{\bar{\beta}}$ получается из α вычеркиванием компонент, входящих в β .

Ранее были определены $N_j(y)$ с индексом единичной длины как решения задач (1.8). Кроме того, положим

$$a_j^0 = \mu_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.12)$$

где вектор $\mu \in \mathbb{R}^n$ из (1.10).

Далее вводим задачи для N_α с любым индексом α длины 2, а затем – и длины 3. В этих задачах участвуют константы a_α^0 , обеспечивающие их разрешимость.

Если $|\alpha| = 2$, то

$$\begin{aligned} \langle pN_\alpha \rangle &= 0, \\ -\operatorname{div} a \nabla N_\alpha + b \cdot \nabla N_\alpha \\ &+ \sum_{\alpha_j \subset \alpha} [\operatorname{div} a e_{\alpha_j} N_{\alpha_{\bar{j}}} + a e_{\alpha_j} (\nabla N_{\alpha_{\bar{j}}} + e_{\alpha_{\bar{j}}}) - b_{\alpha_j} N_{\alpha_{\bar{j}}} + \mu_{\alpha_j} N_{\alpha_{\bar{j}}}] = a_\alpha^0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

если $|\alpha| = 3$, то

$$\begin{aligned} \langle pN_\alpha \rangle &= 0, \\ -\operatorname{div} a \nabla N_\alpha + b \cdot \nabla N_\alpha - \operatorname{div} \sum_{\alpha_j \subset \alpha} a e_{\alpha_j} N_{\alpha_{\bar{j}}} \\ &- \sum_{\alpha_j \subset \alpha} a e_{\alpha_j} \left(\nabla N_{\alpha_{\bar{j}}} - \sum_{\alpha_s \subset \alpha_{\bar{j}}} e_{\alpha_s} N_{\alpha_{\bar{j}\bar{s}}} \right) + \sum_{\alpha_j \subset \alpha} b_{\alpha_j} N_{\alpha_{\bar{j}}} - \sum_{1 \leq |\beta| \leq 2} a_\beta^0 N_{\alpha_{\bar{\beta}}} = a_\alpha^0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Здесь в суммах вида $\sum_{\gamma_j \subset \gamma}$ перебираются все попарно различные компоненты γ_j мультииндекса γ , а в последней сумме в (2.14) – все допустимые попарно различные индексы $\beta \subset \alpha$ длины 1 и 2.

Для разрешимости введенных уравнений константы в правых частях выбраны так, что если $|\alpha| = 2$, то

$$a_\alpha^0 = \sum_{\alpha_j \subset \alpha} \langle [-(a \nabla p + pb) + \mu p] N_{\alpha_{\bar{j}}} + p a (\nabla N_{\alpha_{\bar{j}}} + e_{\alpha_{\bar{j}}}) \rangle \cdot e_{\alpha_j}, \quad (2.15)$$

если $|\alpha| = 3$, то

$$\begin{aligned} a_\alpha^0 &= \sum_{\alpha_j \subset \alpha} \langle (a \nabla p + pb) \cdot e_{\alpha_j} N_{\alpha_{\bar{j}}} \rangle - \sum_{\alpha_j \subset \alpha} \left\langle p a e_{\alpha_j} \cdot \left(\nabla N_{\alpha_{\bar{j}}} - \sum_{\alpha_s \subset \alpha_{\bar{j}}} e_{\alpha_s} N_{\alpha_{\bar{j}\bar{s}}} \right) \right\rangle \\ &- \sum_{1 \leq |\beta| \leq 2} a_\beta^0 \langle p N_{\alpha_{\bar{\beta}}} \rangle. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Здесь мы учли условие разрешимости для уравнения $AN_\alpha = F_0 + \operatorname{div} F$, имеющее вид $\langle p(F_0 + \operatorname{div} F) \rangle = 0$ (см. п. 2.1), а кроме того, преобразование (2.6) и условие нормировки $\langle p \rangle = 1$.

2.3. Об усредненной матрице диффузии. Рассмотрим подробнее задачу на ячейке второго порядка.

Пусть матрица a^0 такова, что

$$a^0 k k = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha^0 k^\alpha,$$

где $k^\alpha = k_{\alpha_1} k_{\alpha_2}$ для вектора $k = (k_1, \dots, k_n)$ и индекса $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Тогда по нашему соглашению о мультииндексах имеем

$$a_\alpha^0 = \begin{cases} 2a^0 e_{\alpha_1} e_{\alpha_2}, & \text{если } \alpha_1 \neq \alpha_2, \\ a^0 e_{\alpha_1} e_{\alpha_1}, & \text{если } \alpha_1 = \alpha_2, \end{cases} \quad (2.17)$$

и равенство (2.15) в терминах матрицы a^0 с учетом определения вектора g принимает форму

$$\sum_{\alpha_j \subset \alpha} a^0 e_{\alpha_j} e_{\alpha_{\bar{j}}} = \sum_{\alpha_j \subset \alpha} [\langle (-g + \mu p) N_{\alpha_{\bar{j}}} \rangle + \langle pa(\nabla N_{\alpha_{\bar{j}}} + e_{\alpha_{\bar{j}}}) \rangle] e_{\alpha_j}.$$

Последнее равенство заведомо выполнено, если матрица a^0 подчинена условию

$$a^0 e_j = \langle pa(\nabla N_j + e_j) \rangle + \langle (-g + \mu p) N_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.18)$$

В силу линейности задачи для N_j из (2.18) следует

$$a^0 \xi = \langle pa(\nabla N_\xi + \xi) \rangle + \langle (-g + \mu p) N_\xi \rangle, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

где $N_\xi = N \cdot \xi$ и $N = (N_1, \dots, N_n)$ и, значит,

$$a^0 \xi \xi = \langle pa(\nabla N_\xi + \xi) \rangle \cdot \xi + \langle (-g + \mu p) N_\xi \rangle \cdot \xi. \quad (2.19)$$

С другой стороны, N_ξ есть решение уравнения

$$-\operatorname{div} a(\nabla N_\xi + \xi) + b \cdot (\nabla N_\xi + \xi) - \mu \cdot \xi = 0,$$

которое можно переписать (см. (2.8)) в виде

$$-\operatorname{div} pa(\nabla N_\xi + \xi) + g \cdot (\nabla N_\xi + \xi) - p\mu \cdot \xi = 0,$$

откуда следует равенство

$$0 = \langle pa(\nabla N_\xi + \xi) \cdot \nabla N_\xi \rangle + \langle g \cdot (\nabla N_\xi + \xi) N_\xi \rangle - \langle p N_\xi \rangle \mu \cdot \xi. \quad (2.20)$$

Складывая (2.19) и (2.20) и используя вытекающее из соленоидальности вектора g равенство $\langle g \cdot N_\xi \nabla N_\xi \rangle = (1/2) \langle g \cdot \nabla |N_\xi|^2 \rangle = 0$, выводим

$$a^0 \xi \xi = \langle pa(\nabla N_\xi + \xi) \cdot (\nabla N_\xi + \xi) \rangle.$$

Таким образом, для матрицы, определенной равенством (2.18), проверено представление (1.11).

3. Аппроксимация первого порядка

Приведем приближение резольвенты $(A_\varepsilon + 1)^{-1}$ порядка $O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. В этом случае усредненным будет оператор с постоянными коэффициентами, содержащий дифференцирование третьего порядка, а именно,

$$A_{1,\varepsilon} = -\operatorname{div}(a^0 \nabla) + \varepsilon^{-1} \mu \cdot \nabla - \sum_{|\alpha|=3} \varepsilon a_\alpha^0 \mathcal{D}^\alpha. \quad (3.1)$$

Здесь и далее

$$\mathcal{D}^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_1}} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_2}} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_3}}$$

для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Видим, что оператор $A_{1,\varepsilon}$ получен из $A_{0,\varepsilon}$ (см. (1.4)) добавлением всех возможных частных производных третьего порядка с коэффициентами $-\varepsilon a_\alpha^0$, $|\alpha| = 3$, определенными в (2.16).

Нетрудно проверить, что $A_{1,\varepsilon}$ – аккретивный оператор в $L^2(\mathbb{R}^n)$, так что определена резольвента $(A_{1,\varepsilon} + 1)^{-1}$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Имеет место оценка*

$$\|(A_\varepsilon + 1)^{-1} - (R_\varepsilon p_\varepsilon + \varepsilon N_\varepsilon \cdot \nabla R_\varepsilon p_\varepsilon - \varepsilon R_\varepsilon \operatorname{div} M_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c_0 \varepsilon^2, \quad (3.2)$$

где

$$R_\varepsilon = (A_{1,\varepsilon} + 1)^{-1},$$

$$p_\varepsilon = p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad N_\varepsilon = N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad M_\varepsilon = M\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

$p, N = (N_1, \dots, N_n), M = (M_1, \dots, M_n)$ – решения задач (1.7)–(1.9) соответственно. Константа c_0 того же типа, что в (1.3).

Таким образом, полагая

$$u_{1,\varepsilon}(x) = R_\varepsilon p_\varepsilon f(x) + \varepsilon N_\varepsilon \cdot \nabla R_\varepsilon p_\varepsilon f(x) - \varepsilon \operatorname{div} R_\varepsilon M_\varepsilon f(x), \quad (3.3)$$

получаем приближение к решению задачи (1.1) с оценкой

$$\|u_\varepsilon - u_{1,\varepsilon}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c_0 \varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.4)$$

Итак, согласно (3.3), чтобы построить приближение первого порядка $u_{1,\varepsilon}$, надо, во-первых, найти решения усредненного уравнения с постоянными коэффициентами (см. (3.1)), но с осциллирующей правой частью, а именно,

$$A_{1,\varepsilon} v_\varepsilon + v_\varepsilon = \Phi_\varepsilon,$$

где в качестве правой части $\Phi_\varepsilon(x)$ берутся функции $p(x/\varepsilon)f(x)$ или $M_j(x/\varepsilon)f(x)$; и во-вторых, составить из этих решений указанные в (3.3) комбинации, привлекая также функции $N_j(x/\varepsilon)$.

Для доказательства теорем 1.1 и 3.1 применяется спектральный подход, основанный на блоховском разложении функций из $L^2(\mathbb{R}^n)$. Этот подход в теории усреднения известен давно и довольно часто используется. Укажем наиболее ранние работы в этом направлении [4]–[6], относящиеся к 70-м и 80-м гг. В 90-е гг. вновь возник интерес к этому методу, см., например, [7], [8] и цитированную там литературу.

Отметим также серию работ Бирмана, Суслиной и их учеников, в которых за последние более чем 10 лет исследовались спектральным методом самые разные задачи усреднения с самосопряженными операторами, см. [9], [10], а также указанную там библиографию.

Спектральный метод имеет версии, несколько различающиеся между собой. Мы следуем варианту этого метода из работ [6], [11], см. также [2; гл. II].

Среди работ по уравнению диффузии со сносом, в которых применялся спектральный подход, отметим работу [12], где изучалась асимптотика фундаментального решения задачи Коши.

Наряду со спектральным методом существует другой мощный метод доказательства оценок усреднения операторного типа – так называемый “метод первого приближения в комбинации со сдвигом”, коротко – “метод сдвига”, предложенный Жиковым [13] и модифицированный в [14], [15]. Интересно было бы методом сдвига обосновать аппроксимации резольвенты $(A_\varepsilon + 1)^{-1}$. Это позволило бы уйти от условия жесткой периодичности коэффициентов и рассматривать операторы с коэффициентами локально периодическими или осциллирующими в нескольких масштабах разного порядка, см. [16], [17].

4. Блоховское представление оператора

4.1. Преобразование Гельфанда и его свойства. Напомним известное преобразование [18]: если $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то

$$Uf = \widehat{f}(x, k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{h \in \mathbb{Z}^n} e^{-ik \cdot (x+h)} f(x+h), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{R}^n. \quad (4.1)$$

Функция $\widehat{f}(x, k)$ является 1-периодической по $x_1, \dots, x_n$, а функция $e^{ik \cdot x} \widehat{f}(x, k)$ – 2π -периодической по $k_1, \dots, k_n$; $\square = [-1/2, 1/2]^n$ и $\square^* = [-\pi, \pi]^n$ – ячейки периодичности.

Справедливо равенство

$$f(x) = U^{-1}(\widehat{f}(x, k)) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\square^*} e^{ik \cdot x} \widehat{f}(x, k) dk, \quad (4.2)$$

называемое *блоховским разложением функции f* .

Имеет место равенство Планшереля

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \int_{\square} \int_{\square^*} |\widehat{f}(x, k)|^2 dx dk. \quad (4.3)$$

Можно показать, основываясь на (4.3), что преобразование U продолжается по непрерывности до унитарного оператора

$$U: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\square \times \square^*).$$

Перечислим свойства преобразования U . Начнем с простейших:

$$U(\nabla f) = (\nabla + ik)Uf, \quad (4.4)$$

$$U(bf) = bU(f), \quad \text{если } b \in L^\infty(\square) \text{ и 1-периодична.} \quad (4.5)$$

Используя преобразование Фурье функции f

$$F(f, k) = F(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ik \cdot x} dx,$$

можно записать

$$\int_{\square} \widehat{f}(x, k) dx = F(k). \quad (4.6)$$

Если $\widehat{f} = \widehat{f}(k)$ (т.е. не зависит от x), то (см. (4.6), (4.2))

$$\widehat{f}(k) = F(k), \quad f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\square^*} e^{ik \cdot x} F(k) dk. \quad (4.7)$$

Очевидно (см. (4.3), (4.4)),

$$f \in H^2(\mathbb{R}^n) \iff \widehat{f}(\cdot, k) \in H_{\text{per}}^2(\square) \text{ для п.в. } k \in \square^*,$$

$$\int_{\square} \int_{\square^*} [|\widehat{f}(x, k)|^2 + |(\nabla + ik)\widehat{f}(x, k)|^2 + |(\nabla + ik)(\nabla + ik)\widehat{f}(x, k)|^2] dx dk < \infty.$$

Это равносильно тому, что

$$f \in H^2(\mathbb{R}^n) \iff \{\widehat{f} \in L^2(\square \times \square^*) : \widehat{f} \in L^2(\square^*, H_{\text{per}}^2(\square))\}. \quad (4.8)$$

4.2. Блоховское представление резольвенты. Введем оператор с 1-периодическими коэффициентами

$$A(k) = e^{-ik \cdot x} (-\operatorname{div} a(x) \nabla + b(x) \cdot \nabla) e^{ik \cdot x}, \quad (4.9)$$

зависящий от параметра $k \in \square^*$. Оператор имеет структуру

$$A(k) = -(\nabla + ik) \cdot a(x) (\nabla + ik) + b(x) \cdot (\nabla + ik), \quad (4.10)$$

где $\nabla \cdot = \operatorname{div}$. Отметим также вытекающее из (4.9) представление для оператора

$$A = A_\varepsilon|_{\varepsilon=1},$$

а именно,

$$A = A(0) = -\operatorname{div} a(x) \nabla + b(x) \cdot \nabla = e^{ik \cdot x} A(k) e^{-ik \cdot x}. \quad (4.11)$$

Теперь возьмем $u(x)$ – решение уравнения (1.1) с оператором A и правой частью $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Используя L^2 -теорию для эллиптических уравнений, можно показать (см., например, [2; гл. II, § 1], что функция $u(x)$ и все производные до второго порядка принадлежат $L^2(\mathbb{R}^n)$ и экспоненциально убывают при $|x| \rightarrow \infty$. В частности, $u(x)$ удовлетворяет уравнению (1.1) (с $\varepsilon = 1$) поточечно для п.в. $x \in \mathbb{R}^n$. В силу (4.11) функция $v(x) = e^{-ik \cdot x} u(x)$ есть решение уравнения

$$A(k)v + v = e^{-ik \cdot x} f(x).$$

Ввиду периодичности коэффициентов оператора $A(k)$ (см. (4.10)), каждая функция $v_h = e^{-ik \cdot (x+h)} u(x+h)$, $h \in \mathbb{Z}^n$, полученная из v сдвигом в аргументе x , удовлетворяет одному и тому же уравнению, но с соответствующей правой частью, а именно,

$$A(k)v_h + v_h = f_h.$$

После суммирования по h (что возможно в силу экспоненциального убывания функции u и ее производных) получаем из v_h функцию $\hat{u}(x, k) = U[u(x)]$, определенную по x и k на $\square \times \square^*$, при этом $\hat{u}(x, k)$ есть решение уравнения

$$\hat{A}\hat{u} + \hat{u} = \hat{f}, \quad (4.12)$$

где оператор $\hat{A}$ действует в $L^2(\square \times \square^*) = L^2(\square^*, L^2(\square))$ послойно как

$$\hat{A}\hat{u} = A(k)\hat{u}(\cdot, k). \quad (4.13)$$

Рассуждения в конце предыдущего пункта показывают, что пространство $H^2(\mathbb{R}^n)$, область определения оператора A , переводится преобразованием U в область определения оператора $\hat{A}$, указанную в правой части (4.8).

Из (4.12) следует

$$\hat{u} = (\hat{A} + 1)^{-1} \hat{f}, \quad (4.14)$$

при этом существование резольвенты обеспечено свойством аккретивности (4.13). Равенство (4.14) в операторной форме записывается как

$$(A + 1)^{-1} = U^{-1}(\hat{A} + 1)^{-1}U \quad (4.15)$$

и называется *блоховским представлением резольвенты*.

Вернемся к уравнению (1.1) с произвольным малым параметром ε . После замены переменных

$$x = \varepsilon y, \quad u_\varepsilon(\varepsilon y) = v_\varepsilon(y)$$

его можно записать как

$$-\operatorname{div}_y a(y) \nabla_y v_\varepsilon + b(y) \cdot \nabla_y v_\varepsilon + \varepsilon^2 v_\varepsilon = \varepsilon^2 f(\varepsilon y)$$

или в операторной форме (см. (4.11))

$$(A + \varepsilon^2) v_\varepsilon = \varepsilon^2 f(\varepsilon y).$$

Отсюда видно, что

$$(A_\varepsilon + 1)^{-1} = \varepsilon^2 \Gamma_{\varepsilon^{-1}} (A + \varepsilon^2)^{-1} \Gamma_\varepsilon,$$

где использован оператор гомотетии

$$(\Gamma_\varepsilon f)(y) = f(\varepsilon y), \quad (4.16)$$

что вместе с (4.15) дает представление

$$(A_\varepsilon + 1)^{-1} = \Gamma_{\varepsilon^{-1}} U^{-1} \varepsilon^2 (\hat{A} + \varepsilon^2)^{-1} U \Gamma_\varepsilon. \quad (4.17)$$

5. О резольvente оператора $\hat{A}$

В соответствии с формулой (4.17) наша задача сводится к тому, чтобы найти приближения в операторной норме для оператора $\varepsilon^2 (\hat{A} + \varepsilon^2)^{-1}$ порядка $O(\varepsilon^m)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $m = 1$ или 2 . Поскольку резольвента $(\hat{A} + \varepsilon^2)^{-1}$ действует послойно в $L^2(\square \times \square^*) = L^2(\square^*, L^2(\square))$ (см. (4.13)), надо изучать для фиксированного $k \in \square^*$ ограниченный в $L^2(\square)$ оператор $\varepsilon^2 (A(k) + \varepsilon^2)^{-1}$ и строить для него приближения с оценкой в норме $\|\cdot\|_{L^2(\square) \rightarrow L^2(\square)}$, равномерные по $k \in \square^*$.

Здесь уместно заметить, что если $B(k)$ – ограниченный оператор в $L^2(\square)$, непрерывно зависящий от $k \in \square^*$, то $B = B(k)$ как оператор, действующий послойно в $L^2(\square^*, L^2(\square)) = L^2(\square \times \square^*)$, удовлетворяет оценке

$$\|B\| \leq (2\pi)^n \max_{k \in \square^*} \|B(k)\|.$$

Очевидно, что $A(k)$ – оператор с компактной резольventой $(A(k) + s)^{-1}$, если $s > 0$ достаточно велико. Отсюда заключаем, что спектр оператора $A(k)$ состоит из счетной последовательности конечнократных собственных значений, имеющих точку накопления лишь в бесконечности. Пусть $\{\lambda_j(k)\}_{j=0}^\infty$ – все различные собственные значения, и $\lambda_0(k)$ – наименьшее из них по модулю. Сопряженный оператор также имеет чисто дискретный спектр – это последовательность собственных значений $\{\bar{\lambda}_j(k)\}_{j=0}^\infty$, причем кратности $\bar{\lambda}_j(k)$ совпадают с кратностями собственных значений $\lambda_j(k)$ оператора $A(k)$.

Прежде всего изучим расположение спектра оператора $A(k)$ на комплексной плоскости.

Благодаря преобразованию (2.6), запишем соотношение

$$(pA(k)u, u)_{L^2(\square, dx)} = \int_\square p a \nabla v \cdot \nabla \bar{v} dx + \int_\square (g \cdot \nabla v) \bar{v} dx, \quad v = e^{ik \cdot x} u.$$

В силу соленоидальности вектора g

$$\operatorname{Re}(pA(k)u, u)_{L^2(\square)} = \int_{\square} pa \nabla v \cdot \nabla \bar{v} dx + \frac{1}{2} \int_{\square} g \cdot \nabla |u|^2 dx = \int_{\square} pa \nabla v \cdot \nabla \bar{v} dx \geq 0,$$

(при $k = 0$ этот вывод уже воспроизводился в п. 2, см. (2.7)), откуда следует

$$\operatorname{Re} \lambda_j(k) \geq 0, \quad j = 0, 1, \dots, \quad k \in \square^*,$$

т.е. весь спектр лежит в правой полуплоскости.

Можно уточнить это утверждение (см. лемму 6.2): если $|k| > \delta > 0$, то для некоторого $r_0(\delta) > 0$

$$\operatorname{Re} \lambda_j(k) \geq r_0, \quad j = 0, 1, \dots,$$

т.е. при указанных k весь спектр лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} \xi \geq r_0$. Отсюда вытекает оценка для резольвенты $R(\xi, k) \equiv (A(k) - \xi)^{-1}$ в операторной L^2 -норме

$$\|R(-\varepsilon^2, k)\| \leq c(\delta) \quad \text{для всех } k \in \square^*, \quad |k| > \delta, \quad (5.1)$$

равномерная по $\varepsilon \in (0, \varepsilon(\delta)]$. Эту оценку можно обосновать, например, через разложение аналитической по ξ функции $R(\xi, k)$ в ряд Тейлора с центром в точке $r_0/3$. Радиус сходимости ряда заведомо не меньше $2r_0/3$, так что в круг сходимости попадает точка $\xi = -\varepsilon^2$, если $3\varepsilon^2 < r_0$.

Благодаря оценке (5.1), для наших целей остается изучить резольвенту $R(-\varepsilon^2, k)$ лишь в достаточно малой окрестности точки $k = 0$, где имеет место разделение спектра и невырожденность первого собственного значения (см. лемму 6.3):

$$|\lambda_0(k)| < \frac{c_1}{4}, \quad \operatorname{Re} \lambda_j(k) > \frac{c_1}{2} \quad \text{для всех } j \geq 1, \quad \lambda_0(k) \text{ простое.} \quad (5.2)$$

В силу общей теории [19; гл. III, § 6] в ситуации (5.2) имеет место представление

$$(A(k) + \varepsilon^2)^{-1} = \frac{1}{\lambda_0(k) + \varepsilon^2} P(k) + R'(k), \quad (5.3)$$

в котором первое слагаемое содержит проектор на собственное подпространство, соответствующее $\lambda_0(k)$,

$$P(k) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\xi, k) d\xi, \quad \Gamma = \left\{ |\xi| = \frac{c_1}{4} \right\},$$

а оператор $R'(k)$ равномерно ограничен в операторной норме. В (5.3) записано разложение в ряд Лорана резольвенты оператора $A(k)$ в окрестности точки $\lambda_0(k)$, являющейся для нее полюсом первого порядка.

Далее объектом нашего изучения будет оператор $(\lambda_0(k) + \varepsilon^2)^{-1} P(k)$ из (5.3), см. п. 8. Именно из него формируются аппроксимации для $\varepsilon^2(A(k) + \varepsilon^2)^{-1}$ порядка $O(\varepsilon^m)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $m = 1$ или 2 . С этой целью привлекаются разложения по k собственного значения $\lambda_0(k)$ и проектора $P(k)$. Этим разложениям посвящены следующие два пункта 6 и 7.

6. О спектре оператора $A(k)$

Сформулируем точно необходимые для нас результаты о спектре оператора $A(k)$.

Начнем с описания спектра невозмущенного оператора $A(0)$, которое легко получить, благодаря преобразованию (2.6) и неравенству Пуанкаре

$$\int_{\square} |v|^2 dx \leq c_P \int_{\square} |\nabla v|^2 dx \quad \text{для всех } v \in H^1(\square), \quad \langle v \rangle = 0.$$

Здесь функция v необязательно периодична.

ЛЕММА 6.1. *Оператор $A(0)$ имеет простое собственное значение $\lambda_0 = \lambda_0(0) = 0$ с собственной функцией $\varphi_0(x) \equiv 1$, а другие собственные значения $\lambda_j = \lambda_j(0)$, $j \geq 1$, таковы, что $\operatorname{Re} \lambda_j \geq c_1 = p_1 \nu (p_2 c_P)^{-1}$, где c_P – константа из неравенства Пуанкаре, ν – константа эллиптичности из (1.3), а p_1, p_2 – константы из (2.3).*

Теперь рассмотрим возмущенный оператор $A(k)$, $k \in \square^*$.

ЛЕММА 6.2. *Если $|k| \geq \delta > 0$, то для любого собственного значения $\lambda(k)$ оператора $A(k)$ имеем $\operatorname{Re} \lambda(k) \geq r(\delta) > 0$.*

Доказательство этой леммы проводится методом от противного, при этом используется преобразование (2.7) для формы $\operatorname{Re}(pA(k)\varphi, \varphi)_{L^2(\square)}$, где φ – собственный вектор оператора $A(k)$. В самосопряженном случае аналог леммы доказан подробно в [20].

В следующей лемме в предположении достаточной малости $|k|$ приводятся свойства первого собственного значения $\lambda_0(k)$ оператора $A(k)$, соответствующей собственной функции $\varphi_0(x, k)$, а также собственной функции $\psi_0(x, k)$ с собственным значением $\bar{\lambda}_0(k)$ для сопряженного оператора $A(k)^*$.

ЛЕММА 6.3. *Найдется такое $\delta_0 > 0$, что для всех $|k| < \delta_0$ имеет место:*

- (i) $|\lambda_0(k)| < c_1/4$ и $\operatorname{Re} \lambda_j(k) > c_1/2$ для всех $j \geq 1$, где c_1 – константа из леммы 6.1;
- (ii) собственное значение $\lambda_0(k)$ простое и является аналитической функцией, допускающей разложение

$$\lambda_0(k) = i\mu \cdot k + a^0 k \cdot k + i \sum_{|\alpha|=3} a_\alpha^0 k^\alpha + O(|k|^4), \quad (6.1)$$

где вектор μ определен в (1.10), матрица a^0 – в (1.11), а константы a_α^0 , $|\alpha| = 3$, – в (2.16);

- (iii) собственную функцию $\varphi_0(x, k)$ можно выбрать аналитической по k , так что верно разложение

$$\varphi_0(x, k) = 1 + ik \cdot N(x) + \sum_{|\alpha|=2} k^\alpha N_\alpha(x) + i \sum_{|\alpha|=3} k^\alpha N_\alpha(x) + O(|k|^4), \quad (6.2)$$

где $N = (N_1, \dots, N_n)$ – решение задачи (1.8), $N_\alpha(x)$, $2 \leq |\alpha| \leq 3$, – решения задач (2.13) и (2.14);

- (iv) собственную функцию $\psi_0(x, k)$ можно выбрать аналитической по k , так что верно разложение

$$\psi_0(x, k) = p(x) + ik \cdot M(x) + O(|k|^2), \quad (6.3)$$

где p – решение задачи (1.7), $M = (M_1, \dots, M_n)$ – решение задачи (1.9).

В разложениях (6.1), (6.2) степень k^α для вектора $k = (k_1, \dots, k_n)$ с мультииндексом $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ определяется как

$$k^\alpha = k_{\alpha_1} \cdots k_{\alpha_m},$$

а свойства мультииндекса α даны в (2.11). Кроме того, все константы a_α^0 и функции $N_\alpha(x)$, $M_\alpha(x)$ вещественнозначны. Можно было бы дать идентификацию всех коэффициентов из разложений (6.1)–(6.3) с помощью задач на ячейке вида (2.14) – мы ограничились лишь теми, которые используются в теореме 3.1.

Доказательство леммы 6.3 дано в следующем пункте.

7. О спектральных разложениях

В этом пункте с разной степенью подробности доказываются утверждения леммы 6.3. Важнейшими из них являются утверждения о свойствах аналитичности и разделении спектра. Они следуют из общей теории возмущений линейных операторов (см. [19]), и их можно было не доказывать. Но для ясности и полноты изложения мы предпочли привести их хотя бы с кратким доказательством.

7.1. Свойство аналитичности и разделение спектра. Поскольку (см. (4.10))

$$A(k) = A(0) + B(k),$$

где

$$B(k) = -i \operatorname{div} ak - ik \cdot a \nabla + ak \cdot k + ik \cdot b,$$

для резольвенты

$$R(\xi, k) \equiv (A(k) - \xi)^{-1}$$

справедливо представление

$$R(\xi, k) = (A(0) - \xi + B(k))^{-1} = R(\xi, 0)[I + B(k)R(\xi, 0)]^{-1}. \quad (7.1)$$

Нетрудно установить, что резольвента $R(\xi, 0) = (A(0) - \xi)^{-1}$ является ограниченным оператором, действующим из $L^2(\square)$ в $H^1(\square)$. Тогда $B(k)R(\xi, 0)$ – ограниченный оператор в $L^2(\square)$ и

$$\|B(k)R(\xi, 0)\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \frac{1}{2}, \quad \xi \in \Gamma, \quad (7.2)$$

при достаточно малых $|k|$, где Γ – некоторый компакт на комплексной плоскости. Заметим, что $B(k)R(\xi, 0)$ есть многочлен по k с операторнозначными коэффициентами.

Пусть c_1 – константа из леммы 6.1. Тогда окружность $\Gamma = \{|\xi| = c_1/4\}$ на комплексной плоскости ξ содержит внутри себя одно простое собственное значение $\lambda_0 = 0$ оператора $A(0)$. Согласно (7.1) и (7.2) имеет место разложение в ряд

$$R(\xi, k) = R(\xi, 0) + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l R(\xi, 0)[B(k)R(\xi, 0)]^l, \quad (7.3)$$

в котором каждое слагаемое есть ограниченный оператор в $L^2(\square)$. Отсюда следует аналитичность $R(\xi, k)$ как функции аргумента k в окрестности точки $k = 0$. Ряд (7.3) можно проинтегрировать по контуру Γ и получить проектор

$$P(k) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\xi, k) d\xi = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\xi, 0) d\xi + \dots = P(0) + \dots \quad (7.4)$$

Здесь $P(0)$ – собственный проектор для собственного значения $\lambda_0(0) = 0$ невозмущенного оператора $A(0)$ и при достаточно малых $|k|$ верно неравенство

$$\|P(k) - P(0)\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \frac{1}{2}$$

для оператора $P(k) - P(0)$, обозначенного в (7.4) многоточием. Отсюда следует, что образ оператора $P(k)$ изоморфен образу оператора $P(0)$, в частности, оба образа одномерны. Это означает, что внутри Γ находится в точности одно собственное значение $\lambda_0(k)$ и оно простое.

В силу (7.3), (7.4) $P(k)$ – аналитическая функция. Отсюда стандартными рассуждениями (см., например, [19; гл. IV]) выводим аналитичность собственного значения $\lambda_0(k)$, а также собственной функции $\varphi_0(x, k)$, построенной с помощью проектора $P(k)$. Нормируем $\varphi_0(x, k)$ условием

$$\langle p(x) \varphi_0(x, k) \rangle = 1, \quad (7.5)$$

где p – решение задачи (1.7).

7.2. Идентификация коэффициентов в разложениях. При достаточно малых $|k|$, когда собственное значение $\lambda_0(k)$ простое, можно утверждать, что

$$\lambda_0(-k) = \overline{\lambda_0(k)}, \quad \varphi_0(x, -k) = \overline{\varphi_0(x, k)}, \quad \psi_0(x, -k) = \overline{\psi_0(x, k)}. \quad (7.6)$$

В самом деле, поскольку $\overline{A(k)} = A(-k)$, то пара $\lambda_0(k)$, $\varphi_0(x, k)$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} A(k) \varphi_0(x, k) &= \lambda_0(k) \varphi_0(x, k), & \langle \varphi_0(\cdot, k) p(\cdot) \rangle &= 1, \\ A(-k) \overline{\varphi_0(x, k)} &= \overline{\lambda_0(k)} \overline{\varphi_0(x, k)}, & \langle \overline{\varphi_0(\cdot, k)} p(\cdot) \rangle &= 1, \end{aligned}$$

т.е. $\overline{\varphi_0(x, k)}$ – нормированная собственная функция оператора $A(-k)$ с собственным значением $\overline{\lambda_0(k)}$. Между тем,

$$A(-k) \varphi_0(x, -k) = \lambda_0(-k) \varphi_0(x, -k), \quad \langle \varphi_0(\cdot, -k) p(\cdot) \rangle = 1,$$

откуда в силу свойства разделения спектра (см. лемму 6.3, (i), (ii)) следуют первые два равенства из (7.6). Третье равенство в (7.6) проверяется аналогично.

Благодаря свойствам (7.6), аналитические функции $\lambda_0(k)$, $\varphi_0(x, k)$, $\psi_0(x, k)$ раскладываются в ряд по степеням k^α с вещественными или чисто мнимыми коэффициентами, если $|\alpha|$ четно или нечетно соответственно. Например, имеем

$$\begin{aligned} \lambda_0(k) &= i \sum_{|\alpha|=2l+1 \geq 1} a_\alpha^0 k^\alpha + \sum_{|\alpha|=2l \geq 2} a_\alpha^0 k^\alpha, \\ \varphi_0(x, k) &= 1 + i \sum_{|\alpha|=2l+1 \geq 1} k^\alpha N_\alpha(x) + \sum_{|\alpha|=2l \geq 2} k^\alpha N_\alpha(x), \end{aligned} \quad (7.7)$$

если учесть, что по лемме 6.1 $\lambda_0(0) = 0$ и $\varphi_0(x, 0) = 1$. Остается совместить эти предварительные разложения с теми, что даны в лемме 6.3. Для этого, используя (7.7), запишем равенство

$$0 = A(k)\varphi_0(x, k) - \lambda_0(k)\varphi_0(x, k),$$

группируя в нем слагаемые с одной и той же степенью k^α :

$$\begin{aligned} 0 &= A(k)\varphi_0(x, k) - \lambda_0(k)\varphi_0(x, k) \\ &= \sum_{j=1}^n ik_j [-\operatorname{div} a(\nabla N_j + e_j) + b(\nabla N_j + e_j) - a_j^0] \\ &\quad + \sum_{|\alpha|=2} k^\alpha \left[-\operatorname{div} a \nabla N_\alpha + b \cdot \nabla N_\alpha + \operatorname{div} \sum_{\alpha_j \subset \alpha} a e_{\alpha_j} N_{\alpha_{\bar{j}}} + \sum_{\alpha_j \subset \alpha} a e_{\alpha_j} (\nabla N_{\alpha_{\bar{j}}} + e_{\alpha_{\bar{j}}}) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\alpha_j \subset \alpha} b_{\alpha_j} N_{\alpha_{\bar{j}}} + \sum_{\alpha_j \subset \alpha} a_{\alpha_j}^0 N_{\alpha_{\bar{j}}} - a_\alpha^0 \right] \\ &\quad + \sum_{|\alpha|=3} ik^\alpha \left[-\operatorname{div} a \nabla N_\alpha + b \cdot \nabla N_\alpha - \operatorname{div} \sum_{\alpha_j \subset \alpha} a e_{\alpha_j} N_{\alpha_{\bar{j}}} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\alpha_j \subset \alpha} a e_{\alpha_j} \left(\nabla N_{\alpha_{\bar{j}}} - \sum_{\alpha_s \subset \alpha_{\bar{j}}} e_{\alpha_s} N_{\alpha_{\bar{j}\bar{s}}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\alpha_j \subset \alpha} b_{\alpha_j} N_{\alpha_{\bar{j}}} - \sum_{1 \leq |\beta| \leq 2} a_{\beta}^0 N_{\alpha_{\bar{\beta}}} - a_\alpha^0 \right] + \dots \end{aligned} \quad (7.8)$$

Здесь действует соглашение о работе с мультииндексами (см. начало п. 2.2) и, как прежде (см. комментарии в п. 2.2), в сумме $\sum_{\gamma_j \subset \gamma}$ перебираются все попарно различные компоненты γ_j мультииндекса γ .

Приравнявая нулю коэффициенты при различных степенях k^α в (7.8), получаем искомое свойство:

- N_j , $j = 1, \dots, n$, – решение уравнения (1.8);
- N_α , $|\alpha| = 2$, – решение уравнения (2.13);
- N_α , $|\alpha| = 3$, – решение уравнения (2.14).

При этом константы a_α^0 с мультииндексом длины 1, 2 и 3, те, что указаны в пункте (ii) леммы 6.3. Условие ортогональности в задачах для N_α подчинены соотношению (7.5).

8. Доказательство основных результатов

8.1. Выделение главной части резольвенты. Отталкиваясь от представления (5.3), продолжим начатое в п. 5 изучение оператора $\varepsilon^2(A(k) + \varepsilon^2)^{-1}$ на основе аналитических разложений из леммы 6.3.

Будем использовать введенные ранее обозначения (иногда без комментариев). Кроме того, для заданных функций $\varphi, \psi \in L^2(\square)$ символом $\varphi \times \psi$ обозначим проектор в $L^2(\square)$, действующий по правилу

$$(\varphi \times \psi)v = \varphi \int_{\square} v \bar{\psi} dx. \quad (8.1)$$

Тогда оператор $P(k)$ из (5.3) записывается как

$$P(k) = \varphi_0(x, k) \times \varphi_0^*(x, k),$$

где

$$\varphi_0^*(x, k) = \frac{1}{\nu(k)} \psi_0(x, k), \quad \nu(k) = \int_{\square} \varphi_0(x, k) \overline{\psi_0(x, k)} dx,$$

а $\varphi_0(x, k)$, $\psi_0(x, k)$ – собственные функции для операторов $A(k)$ и $A(k)^*$ – те же, что в лемме 6.3. Вычисляем при $|k| < \delta_0$ (δ_0 – параметр из леммы 6.3)

$$\nu(k) \stackrel{(6.2), (6.3)}{=} \int_{\square} (1 + iN \cdot k + O(|k|^2))(p - iM \cdot k + O(|k|^2)) dx = 1 + O(|k|^2),$$

в силу условий нормировки $\langle p \rangle = 1$, $\langle pN \rangle = 0$, $\langle M \rangle = 0$. Отсюда

$$P(k) = \varphi_0(x, k) \times \psi_0(x, k) + O(|k|^2), \quad \frac{P(k)}{\lambda_0(k) + \varepsilon^2} = \frac{\varphi_0(x, k) \times \psi_0(x, k)}{\lambda_0(k) + \varepsilon^2} + O(1) \quad (8.2)$$

с остаточным членом в операторной L^2 -норме. Оценка остаточного члена в (8.2)₂ основана на том, что при малых k ($|k| < \delta_1 \leq \delta_0$)

$$\frac{|k|^2}{|\lambda_0(k) + \varepsilon^2|} \leq \frac{|k|^2}{|\operatorname{Re} \lambda_0(k) + \varepsilon^2|} \leq \frac{|k|^2}{\tau|k|^2 + \varepsilon^2} \leq c, \quad (8.3)$$

где использовано разложение (6.1), положительная определенность матрицы a^0 и вытекающее из нее неравенство $\operatorname{Re} \lambda_0(k) \geq \tau|k|^2$ при достаточно малых k .

Суммируем полученные к этому моменту результаты.

ЛЕММА 8.1. *При достаточно малых k ($|k| < \delta_1$) имеет место представление*

$$(A(k) + \varepsilon^2)^{-1} = \frac{1}{\lambda_0(k) + \varepsilon^2} \varphi_0(x, k) \times \psi_0(x, k) + O(1) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (8.4)$$

с остаточным членом в операторной L^2 -норме равномерно по k .

8.2. Доказательство теоремы 1.1. Стремясь к оценке (1.3), продолжим выделять главную часть оператора $\varepsilon^2(A(k) + \varepsilon^2)^{-1}$, исходя из представления (8.4).

Согласно (6.1)–(6.3), при малых $|k|$ справедливы разложения

$$\begin{aligned} \lambda_0(k) &= i\mu \cdot k + a^0 k k + O(|k|^3) = S_2(k) + O(|k|^3), \\ \varphi_0(x, k) &= 1 + O(|k|), \\ \psi_0(x, k) &= p(x) + O(|k|). \end{aligned} \quad (8.5)$$

Следовательно,

$$\varphi_0(x, k) \times \psi_0(x, k) = 1 \times p + O(|k|), \quad \frac{\varepsilon}{\lambda_0(k) + \varepsilon^2} = \frac{\varepsilon}{S_2(k) + \varepsilon^2} + O(1), \quad (8.6)$$

поскольку

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\lambda_0(k) + \varepsilon^2} - \frac{1}{S_2(k) + \varepsilon^2} \right| &= \frac{O(|k|^3)}{|\lambda_0(k) + \varepsilon^2| |S_2(k) + \varepsilon^2|} \\ &\leq C \frac{|k|^2}{\delta|k|^2 + \varepsilon^2} \frac{\varepsilon|k|}{a^0 k \cdot k + \varepsilon^2} \varepsilon^{-1} \leq c\varepsilon^{-1}, \end{aligned}$$

где использована оценка (8.3) и неравенство $a^0 k \cdot k + \varepsilon^2 \geq c_0|k|\varepsilon$.

Из (8.6) получаем

$$\varepsilon^2 \frac{\varphi_0(x, k) \times \psi_0(x, k)}{\lambda_0(k) + \varepsilon^2} = \varepsilon^2 \frac{1 \times p}{S_2(k) + \varepsilon^2} + O(\varepsilon), \quad (8.7)$$

где выделим главную часть

$$B_\varepsilon(k) = \varepsilon^2 \frac{1 \times p}{S_2(k) + \varepsilon^2}. \quad (8.8)$$

Вычислим действие оператора $B_\varepsilon(k)$ на $\widehat{f}(x, k)$. Поскольку

$$(1 \times p)\widehat{f} \stackrel{(8.1)}{=} \int_{\square} p(x)\widehat{f}(x, k) dx \stackrel{(4.5)}{=} \int_{\square} \widehat{pf}(x, k) dx \stackrel{(4.6)}{=} F(pf, k),$$

то

$$B_\varepsilon(k)\widehat{f}(x, k) = \frac{\varepsilon^2}{S_2(k) + \varepsilon^2} F(pf, k). \quad (8.9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Оператор $B_\varepsilon(k)$ определен по формуле (8.9) для всех $k \in \square^*$. Но $\|B_\varepsilon(k)\| = O(\varepsilon^2)$ равномерно по k при $|k| > \delta_0$ и его можно отнести в остаточный член. Таким образом, вполне корректно рассматривать далее $B_\varepsilon(k)$, полученный для подходящей аппроксимации резольвенты $\varepsilon^2(A(k) + \varepsilon^2)^{-1}$ при достаточно малых $|k|$, как оператор по k на всей ячейке $\square^*$. При этом порядок аппроксимации не нарушается.

Полагая

$$w = U^{-1}B_\varepsilon Uf,$$

найдем связь между функциями f и w в более явном виде. Из равенства $\widehat{w} = B_\varepsilon \widehat{f}$ в силу (8.9) следует

$$(S_2(k) + \varepsilon^2)\widehat{w} = \varepsilon^2 F(pf, k)$$

или

$$(i\mu k + a^0 k k + \varepsilon^2)F(w, k) = \varepsilon^2 F(pf, k),$$

где учтено выражение для $S_2(k)$ из (8.5) и свойство

$$\widehat{w}(k) \stackrel{(4.7)}{=} F(w, k).$$

Переходя от Фурье-образов к оригиналам, получаем

$$-\operatorname{div} a^0 \nabla w + \mu \cdot \nabla w + \varepsilon^2 w = \varepsilon^2 pf. \quad (8.10)$$

Теперь возьмем в (8.9) вместо f функцию $f_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon f$ (см. Γ_ε в (4.16)) и положим

$$w = U^{-1}B_\varepsilon U\Gamma_\varepsilon f. \quad (8.11)$$

Тогда те же вычисления, что раньше, вместо (8.10) дают уравнение

$$-\operatorname{div}_y a^0 \nabla_y w(y) + \mu \cdot \nabla_y w(y) + \varepsilon^2 w(y) = \varepsilon^2 p(y)f(\varepsilon y).$$

Отсюда после замены переменных

$$y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad w_\varepsilon(x) = w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \Gamma_{\varepsilon^{-1}} w, \quad (8.12)$$

при которой $\nabla_y = \varepsilon \nabla_x$, получаем уравнение для $w_\varepsilon(x)$

$$-\varepsilon^2 \operatorname{div}_x a^0 \nabla_x w_\varepsilon(x) + \varepsilon \mu \cdot \nabla_x w_\varepsilon(x) + \varepsilon^2 w_\varepsilon(x) = \varepsilon^2 p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(x),$$

или, после деления на ε^2 (см. (1.4)),

$$(A_{0,\varepsilon} + 1)w_\varepsilon(x) = p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(x).$$

Видим, что $w_\varepsilon(x)$ – решение усредненного уравнения (1.5).

Собранные вместе соотношения (4.17), (5.1), (5.3), (8.4), (8.7)–(8.12) доказывают оценку (1.6), если в качестве нулевого приближения взять $u_{0,\varepsilon} = w_\varepsilon$. Вместе с тем доказана и оценка (1.3).

8.3. Доказательство теоремы 3.1. Докажем оценку (3.2). С этой целью вместо (8.5) возьмем из (6.1)–(6.3) более точные приближения

$$\begin{aligned} \lambda_0(k) &= i\mu \cdot k + a^0 k k + i \sum_{|\alpha|=3} a_\alpha^0 k^\alpha + O(|k|^4) = S_3(k) + O(|k|^4), \\ \varphi_0(x, k) &= 1 + ik \cdot N(x) + O(|k|^2), \\ \psi_0(x, k) &= p(x) + ik \cdot M(x) + O(|k|^2). \end{aligned} \quad (8.13)$$

Тогда вместо (8.6) получим

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, k) \times \psi_0(x, k) &= 1 \times p + ik \cdot (N \times p) - ik \cdot (1 \times M) + O(|k|^2), \\ \frac{1}{\lambda_0(k) + \varepsilon^2} &= \frac{1}{S_3(k) + \varepsilon^2} + O(1), \end{aligned}$$

а аналогом (8.7) будет представление

$$\varepsilon^2 \frac{\varphi_0(x, k) \times \psi_0(x, k)}{\lambda_0(k) + \varepsilon^2} = \varepsilon^2 \frac{1 \times p + ik \cdot (N \times p) - ik \cdot (1 \times M)}{S_3(k) + \varepsilon^2} + O(\varepsilon^2), \quad (8.14)$$

Обозначая существенную часть в (8.14) через $B_\varepsilon^1(k)$, найдем действие оператора $B_\varepsilon^1(k)$ на $\widehat{f}(x, k)$. А именно,

$$B_\varepsilon^1(k) \widehat{f}(x, k) = \frac{\varepsilon^2}{S_3(k) + \varepsilon^2} [(1 \times p) \widehat{f} + ik \cdot (N \times p) \widehat{f} - ik \cdot (1 \times M) \widehat{f}], \quad (8.15)$$

где

$$\begin{aligned} (1 \times p) \widehat{f} &= \int_{\square} p(x) \widehat{f}(x, k) dx = F(pf, k) - \text{преобразование Фурье функции } pf, \\ (N \times p) \widehat{f} &= N(x) \int_{\square} p(x) \widehat{f}(x, k) dx = N(x) F(pf, k), \\ (1 \times M) \widehat{f} &= \int_{\square} \widehat{f}(x, k) M(x) dx = \int_{\square} \widehat{fM} dx = F(fM, k). \end{aligned}$$

Далее $B_\varepsilon^1(k)$ рассматриваем для всех $k \in \square^*$, а не только для тех малых k , для которых этот оператор появился как подходящая аппроксимация. Такое расширение не нарушает порядок аппроксимации, см. замечание в п. 8.2.

Аналогично, как в п. 8.2, вычисляем (см. (8.9)–(8.10)) первое слагаемое из суммы (8.15):

$$\frac{\varepsilon^2}{S_3(k) + \varepsilon^2} (1 \times p) \hat{f} = \hat{w}, \quad w(x) = \varepsilon^2 (A_1 + \varepsilon^2)^{-1} (pf),$$

$$A_1 = -\operatorname{div}(a^0 \nabla) + \mu \cdot \nabla - \sum_{|\alpha|=3} a_\alpha^0 \mathcal{D}^\alpha.$$

Для второго слагаемого в (8.15) находим

$$\frac{\varepsilon^2}{S_3(k) + \varepsilon^2} (ik) \cdot (N \times p) \hat{f} = N(x) \cdot (ik) \frac{\varepsilon^2}{S_3(k) + \varepsilon^2} F(pf, k) = N(x) \cdot (ik) \hat{w}(k)$$

$$\stackrel{(4.4)}{=} N \widehat{\nabla w} \stackrel{(4.5)}{=} U(N \nabla w), \quad w = \varepsilon^2 (A_1 + \varepsilon^2)^{-1} (pf).$$

Наконец, для третьего слагаемого в (8.15) вычисления дают

$$(ik) \cdot (1 \times M) \hat{f} = (ik) \cdot F(fM, k) = F(\operatorname{div}(Mf), k),$$

$$\frac{\varepsilon^2}{S_3(k) + \varepsilon^2} (ik) \cdot (1 \times M) \hat{f} = \frac{\varepsilon^2}{S_3(k) + \varepsilon^2} F(\operatorname{div}(Mf), k) \equiv \hat{w}_1(k).$$

Поскольку $\hat{w}_1(k)$ не зависит от x , то $\hat{w}_1(k) = F(w_1, k)$. Очевидно, что

$$w_1 = \varepsilon^2 (A_1 + \varepsilon^2)^{-1} \operatorname{div}(Mf).$$

В результате вычислений для (8.15) найдено представление

$$B_\varepsilon^1(k) \hat{f} = \varepsilon^2 U \left[(A_1 + \varepsilon^2)^{-1} (pf) + N \cdot \nabla (A_1 + \varepsilon^2)^{-1} (pf) - (A_1 + \varepsilon^2)^{-1} \operatorname{div}(Mf) \right]. \quad (8.16)$$

Теперь возьмем в (8.15) вместо f функцию $f_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon f$. Так же, как раньше (см. рассуждения, следующие в п. 8.2 за (8.11)), проверяем, что функция

$$u_{1,\varepsilon} = \Gamma_{\varepsilon^{-1}} U^{-1} B_\varepsilon^1 U \Gamma_\varepsilon f \quad (8.17)$$

приближает решение задачи (1.1) с погрешностью $O(\varepsilon^2)$, более точно – с оценкой (3.4). При этом структура найденного приближения (см. (8.16), (8.17)) такая, как указана в (3.3).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д. Гилбарг, М. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989.
- [2] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, М., 1993.
- [3] В. В. Жиков, “Асимптотическое поведение и стабилизация решений параболического уравнения второго порядка с младшими членами”, Тр. ММО, **46**, Издательство Моск. ун-та, М., 1983, 69–98.
- [4] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. C. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, Stud. Math. Appl., **5**, North-Holland Publ., Amsterdam, 1978.
- [5] Е. В. Севостьянова, “Асимптотическое разложение решения эллиптического уравнения второго порядка с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами”, *Матем. сб.*, **115(157):2(6)** (1981), 204–222.

- [6] В. В. Жиков, “Спектральный подход к асимптотическим задачам диффузии”, *Дифференц. уравнения*, **25**:1 (1989), 44–50.
- [7] C. Conca, M. Vanninathan, “Homogenization of periodic structures via Bloch decomposition”, *SIAM J. Appl. Math.*, **57**:6 (1997), 1639–1659.
- [8] C. Conca, R. Orive, M. Vanninathan, “Bloch approximation in homogenization and applications”, *SIAM J. Math. Anal.*, **33**:5 (2002), 1166–1198.
- [9] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, “Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора”, *Алгебра и анализ*, **17**:6 (2005), 1–104.
- [10] Е. С. Василевская, Т. А. Суслина, “Пороговые аппроксимации факторизованного самосопряженного операторного семейства с учетом первого и второго корректоров”, *Алгебра и анализ*, **23**:2 (2011), 102–146.
- [11] В. В. Жиков, “О спектральном методе в теории усреднения”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **250**, Наука, М., 2005, 95–104.
- [12] И. А. Александрова, “Спектральный метод в асимптотических задачах диффузии со сносом”, *Матем. заметки*, **59**:5 (1996), 768–770.
- [13] В. В. Жиков, “Об операторных оценках в теории усреднения”, *ДАН*, **406**:5 (2006), 597–601.
- [14] V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, “On operator estimates for some problems in homogenization theory”, *Russ. J. Math. Phys.*, **12**:4 (2005), 515–524.
- [15] V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, “Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients”, *Russ. J. Math. Phys.*, **13**:2 (2006), 224–237.
- [16] С. Е. Пастухова, “Операторные оценки в нелинейных задачах повторного усреднения”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **261**, МАИК, М., 2008, 220–233.
- [17] С. Е. Пастухова, Р. Н. Тихомиров, “Операторные оценки повторного и локально периодического усреднения”, *ДАН*, **415**:3 (2007), 304–309.
- [18] И. М. Гельфанд, “Расположение характеристических функций уравнения с периодическими коэффициентами”, *ДАН СССР*, **73** (1950), 1117–1120.
- [19] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [20] С. Е. Пастухова, “Об аппроксимациях экспоненты оператора с периодическими коэффициентами”, *Проблемы матем. анализа*, **63** (2012), 115–143.

С. Е. Пастухова

Московский государственный технический
университет радиотехники, электроники и
автоматики

E-mail: pas-se@yandex.ru

Поступило

23.07.2012