Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Бутузов, Об особенностях пограничного слоя в сингулярно возмущенных задачах с кратным корнем вырожденного уравнения, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 1, 68–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10106>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 07:15:34

УДК 517.228.4

Об особенностях пограничного слоя в сингулярно возмущенных задачах с кратным корнем вырожденного уравнения

В. Ф. Бутузов

На примере краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка показано, что кратность корня вырожденного уравнения существенно влияет на характер асимптотики решения, в особенности в пограничном слое.

Библиография: 4 названия.

DOI: 10.4213/mzm10106

1. Постановка задачи. Рассмотрим краевую задачу для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} = f(u, x, \varepsilon), \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$u(0, \varepsilon) = u^0, \quad u(1, \varepsilon) = u^1. \quad (2)$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $f(u, x, \varepsilon)$ – достаточно гладкая функция (как обычно, требуемый порядок гладкости зависит от порядка асимптотики, которую мы хотим построить; поскольку речь пойдет об асимптотике произвольного порядка, будем считать функцию $f(u, x, \varepsilon)$ бесконечно дифференцируемой). При $\varepsilon = 0$ из (1) получается вырожденное уравнение

$$f(u, x, 0) = 0. \quad (3)$$

Известно [1], что если уравнение (3) имеет простой корень $u = \varphi(x)$, и $f_u(\varphi(x), x, 0) > 0$ на отрезке $[0, 1]$, то при некоторых требованиях к граничным значениям u^0 и u^1 для достаточно малых ε существует решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (1), (2), имеющее асимптотическое представление

$$u(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i (\bar{u}_i(x) + \Pi_i(\xi) + \tilde{\Pi}_i(\tilde{\xi})) + O(\varepsilon^{n+1}),$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00387).

где $\bar{u}_0(x) = \varphi(x)$, $\bar{u}_1(x), \dots$ – коэффициенты регулярной части асимптотики; $\xi = x/\varepsilon$ и $\tilde{\xi} = (1-x)/\varepsilon$ – погранслоиные переменные, $\Pi_i(\xi)$ и $\tilde{\Pi}_i(\tilde{\xi})$ – пограничные функции, имеющие экспоненциальные оценки вида

$$|\Pi_i(\xi)| \leq c \exp(-\kappa \xi), \quad \xi \geq 0;$$

здесь и далее $c > 0$ и $\kappa > 0$ – подходящие положительные числа, не зависящие от ε .

В данной работе будем рассматривать случай, когда уравнение (3) имеет двукратный корень. В связи с этим введем следующее условие.

УСЛОВИЕ A1. Пусть функция $f(u, x, \varepsilon)$ имеет вид

$$f(u, x, \varepsilon) = h(x)(u - \varphi(x))^2 - \varepsilon f_1(u, x, \varepsilon), \quad (4)$$

и пусть

$$h(x) > 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (5)$$

Отметим, что если $h = h(u, x) > 0$, то все качественные особенности асимптотики решения задачи (1), (2) сохраняются, но выкладки станут более громоздкими.

Кроме того, с целью уменьшения громоздкости последующих формул будем считать, что $h(0) = 1$. К такому случаю уравнение (1) сводится путем замены переменной $x' = \sqrt{h(0)} \cdot x$.

При условии A1 корень $u = \varphi(x)$ уравнения (3) является двукратным и, как оказывается, это приводит к качественному изменению асимптотики (при малых ε) решения задачи (1), (2), в частности, изменяются масштабы погранслоиных переменных и характер убывания пограничных функций. Кроме того, существенное влияние на асимптотку решения оказывает теперь член порядка ε , входящий в правую часть (4), а более точно, функция $\bar{f}_1(x) := f_1(\varphi(x), x, 0)$. Будут рассмотрены два случая, которые связаны соответственно со следующими условиями:

УСЛОВИЕ A2. $\bar{f}_1(x) > 0$ на отрезке $[0, 1]$.

УСЛОВИЕ A2'. $f_1(u, x, \varepsilon) = g(x)(u - \varphi(x)) + \varepsilon f_2(u, x, \varepsilon)$, причем $g(x) > 0$ на отрезке $[0, 1]$; в этом случае $\bar{f}_1(x) \equiv 0$ на $[0, 1]$.

Если $g = g(u, x) > 0$, то качественные особенности асимптотики решения сохраняются, но выкладки усложнятся.

2. Построение асимптотики решения в случае $\bar{f}_1(x) > 0$. Пусть выполнены условия A1 и A2, а также следующее требование к граничным значениям u^0 и u^1 .

УСЛОВИЕ A3. Пусть $\Pi^0 := u^0 - \varphi(0) > 0$, $\Pi^1 := u^1 - \varphi(1) > 0$.

В этом случае асимптотическое разложение решения задачи (1), (2) состоит, как и в случае простого корня вырожденного уравнения, из регулярного ряда $\bar{u}(x, \varepsilon)$ и двух погранслоиных рядов $\Pi(\xi, \varepsilon)$ и $\tilde{\Pi}(\tilde{\xi}, \varepsilon)$, но сами эти ряды отличаются от аналогичных рядов в случае простого корня. Регулярный ряд $\bar{u}(x, \varepsilon)$ является теперь рядом по целым степеням $\varepsilon^{1/2}$ (а не ε , как в случае простого корня):

$$\bar{u}(x, \varepsilon) = \sum_{i=0} \varepsilon^{i/2} \bar{u}_i(x). \quad (6)$$

Уравнения для коэффициентов $\bar{u}_i(x)$ этого ряда получаются стандартным способом, т.е. путем подстановки ряда (6) в уравнение (1) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $\varepsilon^{1/2}$ в разложениях левой и правой частей равенства. В результате этой процедуры получаем: $\bar{u}_0 = \varphi(x)$, а функция $\bar{u}_1(x)$ является решением уравнения

$$h(x)\bar{u}_1^2 - \bar{f}_1(x) = 0.$$

В силу условий A1 и A2 это уравнение имеет два вещественных корня. В качестве $\bar{u}_1(x)$ выберем положительный корень (такой выбор будет оправдан ниже при рассмотрении уравнений для пограничных функций и далее при доказательстве существования решения с построенной асимптотикой):

$$\bar{u}_1(x) = [h^{-1}(x)\bar{f}_1(x)]^{1/2} > 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (7)$$

Следующие члены $\bar{u}_i(x)$ регулярной части асимптотики последовательно определяются как решения простых линейных алгебраических уравнений

$$[2h(x)\bar{u}_1(x)]\bar{u}_i(x) = F_i(x), \quad i \geq 2,$$

где $F_i(x)$ выражаются рекуррентно через $\bar{u}_j(x)$, $j < i$, а коэффициент при $\bar{u}_i(x)$ отличен от нуля в силу (5) и (7), что и обеспечивает однозначное определение $\bar{u}_i(x)$.

Погранслойную переменную для описания пограничного слоя в окрестности точки $x = 0$ введем как и в случае простого корня: $\xi = x/\varepsilon$. Уравнения для членов погранслояного ряда $\Pi(\xi, \varepsilon) = \Pi_0(\xi) + \dots$ (по каким степеням ε будет этот ряд, выяснится в дальнейшем) будем извлекать стандартным образом из равенства

$$\frac{d^2\Pi}{d\xi^2} = \Pi f := h(\varepsilon\xi)[(\Pi_0 + \dots)^2 + 2(\varepsilon^{1/2}\bar{u}_1(\varepsilon\xi) + \varepsilon\bar{u}_2(\varepsilon\xi) + \dots)(\Pi_0 + \dots)] - \varepsilon\Pi f_1, \quad (8)$$

где $\Pi f_1 = f_1(\bar{u}(\varepsilon\xi, \varepsilon) + \Pi(\xi, \varepsilon), \varepsilon\xi, \varepsilon) - f_1(\bar{u}(\varepsilon\xi, \varepsilon), \varepsilon\xi, \varepsilon)$, а граничные условия для Π -функций при $\xi = 0$ следуют из равенства

$$\bar{u}_0(0) + \varepsilon^{1/2}\bar{u}_1(0) + \dots + \Pi_0(0) + \dots = u^0. \quad (9)$$

Кроме того, потребуем, чтобы члены погранслояного ряда удовлетворяли стандартному условию при $\xi \rightarrow \infty$:

$$\Pi(\infty, \varepsilon) = \Pi_0(\infty) + \dots = 0. \quad (10)$$

Отсюда для $\Pi_0(\xi)$ получается задача

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Pi_0}{d\xi^2} &= \Pi_0^2, \quad \xi > 0, \\ \Pi_0(0) &= \Pi^0 := u^0 - \varphi(0), \quad \Pi_0(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Решение этой задачи находится в явном виде:

$$\Pi_0(\xi) = \frac{\Pi^0}{(\sqrt{(1/6)\Pi^0} \cdot \xi + 1)^2}. \quad (12)$$

Из полученного выражения следует, что $\Pi_0(\xi)$ убывает при $\xi \rightarrow \infty$ степенным образом: $\Pi_0(\xi) = O(1/(1 + \xi)^2)$.

Однако, как показывает анализ задачи (1), (2), ее решение ведет себя в пограничном слое более сложным образом, чем это описывается функцией (12). Как будет видно из дальнейшего, степенное убывание пограничных функций имеет место только в первой зоне пограничного слоя, потом следует вторая (переходная) зона, а затем (в третьей зоне) пограничные функции убывают экспоненциально, как $\exp(-\kappa\zeta)$, где $\zeta = x/\varepsilon^{3/4}$, т.е. во второй зоне происходит изменение масштаба погранслоевой переменной и характера убывания пограничных функций.

В тех случаях, когда пограничный слой имеет несколько масштабов, обычно используют метод согласования асимптотических разложений, построенных в разных зонах пограничного слоя (см. [2]). Оказалось, что в задаче (1), (2) можно построить единые пограничные функции, описывающие поведение решения во всех зонах пограничного слоя. Для этого нужно изменить стандартные уравнения для $\Pi_0(\xi)$ и следующих членов погранслоевой ряда, причем наиболее рационально строить погранслоевой ряд $\Pi(\xi, \varepsilon)$ по целым степеням $\varepsilon^{1/4}$, а коэффициенты этого ряда будут зависеть не только от ξ , но также и от ε :

$$\Pi(\xi, \varepsilon) = \sum_{i=0} \varepsilon^{i/4} \Pi_i(\xi, \varepsilon). \quad (13)$$

В правую часть уравнения (11) для $\Pi_0(\xi, \varepsilon)$ добавим член $2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0)\Pi_0$, и, таким образом, функцию $\Pi_0(\xi, \varepsilon)$ определим как решение задачи

$$\frac{d^2\Pi_0}{d\xi^2} = \Pi_0^2 + 2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0)\Pi_0, \quad \xi > 0, \quad (14)$$

$$\Pi_0(0, \varepsilon) = \Pi^0, \quad \Pi_0(\infty, \varepsilon) = 0. \quad (15)$$

Стандартным способом задача (14), (15) сводится к дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{d\Pi_0}{d\xi} = -\left(\frac{2}{3}\Pi_0 + 2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0)\right)^{1/2} \cdot \Pi_0, \quad \xi > 0 \quad (16)$$

с начальным условием $\Pi_0(0, \varepsilon) = \Pi^0$.

Решение этой задачи находится в явном виде, и так как $\Pi^0 > 0$ (условие A3) и $\bar{u}_1(0) > 0$ (см. (7)), то выполняется условие $\Pi_0(\infty, \varepsilon) = 0$. Запишем решение так:

$$\Pi_0(\xi, \varepsilon) = \frac{12\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0)[1 + O(\varepsilon^{1/4})] \cdot \exp(-\varepsilon^{1/4}k_0\xi)}{\{1 - [1 - (12\bar{u}_1(0)(\Pi^0)^{-1})^{1/2}\varepsilon^{1/4} + O(\sqrt{\varepsilon})] \exp(-\varepsilon^{1/4}k_0\xi)\}^2}, \quad (17)$$

где $k_0 = [2\bar{u}_1(0)]^{1/2} > 0$, а величины $O(\varepsilon^{1/4})$ и $O(\sqrt{\varepsilon})$ имеют указанный порядок малости при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно на полупрямой $\xi \geq 0$. Отметим, что если $\Pi^0 < 0$, то задача (14), (15) не имеет решения, а если $\Pi^0 = 0$, то $\Pi_0(\xi, \varepsilon) \equiv 0$, и этот случай требует отдельного рассмотрения.

Несложный анализ выражения (17) показывает: если $0 \leq \xi \leq A/\varepsilon^\gamma$, где $A > 0$ – любое число, γ – любое число из промежутка $0 \leq \gamma < 1/4$ (т.е. если $0 \leq x \leq A\varepsilon^{1-\gamma}$), то

$$\Pi_0(\xi, \varepsilon) = \frac{\Pi^0}{(\sqrt{(1/6)\Pi^0} \cdot \xi + 1)^2} [1 + O(\varepsilon^{1/4-\gamma})];$$

если $\xi \geq A/\varepsilon^{1/4}$ (т.е. $x \geq A\varepsilon^{3/4}$), то

$$P_0(\xi, \varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon}) \exp(-k_0 \zeta), \quad \text{где} \quad \zeta = \varepsilon^{1/4} \xi = \frac{x}{\varepsilon^{3/4}}.$$

Таким образом, функция $P_0(\xi, \varepsilon)$ подтверждает сказанное выше о пограничных функциях в данной задаче: в первой зоне пограничного слоя, т.е. при $0 \leq x \leq A\varepsilon^{1-\gamma}$, где $0 \leq \gamma < 1/4$, функция $P_0(\xi, \varepsilon)$ убывает с ростом погранслошной переменной ξ степенным образом: $P_0 = O(1/(1 + \xi)^2)$; затем следует вторая (переходная) зона $A\varepsilon^{1-\gamma} \leq x \leq A\varepsilon^{3/4}$, в которой происходит изменение масштаба погранслошной переменной и характера убывания функции P_0 ; и, наконец, в третьей зоне, т.е. при $x \geq A\varepsilon^{3/4}$, погранслошная переменная имеет вид $\zeta = x/\varepsilon^{3/4}$, а функция P_0 убывает с ростом ζ экспоненциально. Достоинство функции $P_0(\xi, \varepsilon)$, которую мы определили как решение задачи (14), (15), состоит в том, что она описывает поведение решения во всех зонах пограничного слоя. Как будет видно из дальнейшего, следующие члены погранслошного ряда (13) имеют такое же поведение, как и $P_0(\xi, \varepsilon)$. Отметим также, что если вместо условий (2) Дирихле задать граничные условия Неймана, то пограничный слой не распадается на зоны, а пограничные функции во всем пограничном слое убывают экспоненциально, как $\exp(-\kappa \zeta)$, где $\zeta = x/\varepsilon^{3/4}$ (см. [3]).

Чтобы получить уравнения для функций $P_i(\xi, \varepsilon)$, $i = 1, 2, \dots$, перепишем равенство (8) в следующем виде (учитывая, что $\xi = \varepsilon^{-1/4} \zeta$):

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{d\xi^2} \sum_{i=0} \varepsilon^{i/4} P_i(\xi, \varepsilon) \\ &= h(\varepsilon^{3/4} \zeta) \left[\left(\sum_{i=0} \varepsilon^{i/4} P_i(\xi, \varepsilon) \right)^2 + 2 \left(\sum_{j=1} \varepsilon^{j/2} \bar{u}_j(\varepsilon^{3/4} \zeta) \right) \left(\sum_{i=0} \varepsilon^{i/4} P_i(\xi, \varepsilon) \right) \right] \\ & - \varepsilon \left[f_1 \left(\sum_{j=0} \varepsilon^{j/2} \bar{u}_j(\varepsilon^{3/4} \zeta) + \sum_{i=0} \varepsilon^{i/4} P_i(\xi, \varepsilon), \varepsilon^{3/4} \zeta, \varepsilon \right) \right. \\ & \quad \left. - f_1 \left(\sum_{j=0} \varepsilon^{j/2} \bar{u}_j(\varepsilon^{3/4} \zeta), \varepsilon^{3/4} \zeta, \varepsilon \right) \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Из этого равенства будем извлекать уравнения для функций $P_i(\xi, \varepsilon)$ не стандартным способом (т.е. путем приравнивания коэффициентов при $\varepsilon^{i/4}$ в разложениях левой и правой частей равенства), а с определенными модификациями стандартного способа. Прежде всего в правую часть уравнения для $P_i(\xi, \varepsilon)$, левая часть которого равна $d^2 P_i / d\xi^2$, наряду с членом $2P_0(\xi, \varepsilon)P_i$ включим слагаемое $2\sqrt{\varepsilon} \bar{u}_1(0)P_i$, соответствующее слагаемому $2\sqrt{\varepsilon} \bar{u}_1(0)P_0$, добавленному в уравнение (11) для P_0 (см. (14)). Поэтому уравнение для $P_i(\xi, \varepsilon)$, $i = 1, 2, \dots$, будет иметь вид

$$\frac{d^2 P_i}{d\xi^2} = 2(P_0(\xi, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon} \bar{u}_1(0)) \cdot P_i + \pi_i(\xi, \varepsilon), \quad \xi > 0, \quad (19)$$

где функция $\pi_i(\xi, \varepsilon)$ выражается определенным (не стандартным) образом через $P_j(\xi, \varepsilon)$, $j < i$. Нестандартность формирования функций $\pi_i(\xi, \varepsilon)$ состоит в следующем. Разложив правую часть (18) в ряд по целым степеням $\varepsilon^{1/4}$, обозначим коэффициент при $(\varepsilon^{1/4})^i$ через $q_i(\zeta, P_0, \dots, P_{i-1})$. Если какое-то слагаемое (обозначим

его $q_{ij}(\zeta, \Pi_0, \dots, \Pi_{i-1})$, входящее в $q_i(\zeta, \Pi_0, \dots, \Pi_{i-1})$ имеет оценку, содержащую не менее двух сомножителей $|\Pi_k(\xi, \varepsilon)|$ с какими-то $k < i$, т.е.

$$|q_{ij}| \leq |g_{ij}(\zeta)| \cdot |\Pi_k(\xi, \varepsilon)| \cdot |\Pi_l(\xi, \varepsilon)|, \quad k < i, \quad l < i,$$

то это слагаемое включаем в $\pi_i(\xi, \varepsilon)$; если же оценка по модулю слагаемого q_{ij} содержит только один сомножитель $|\Pi_k(\xi, \varepsilon)|$, $k < i$, то это слагаемое, умноженное на $\sqrt{\varepsilon}$, включаем в $\pi_{i-2}(\xi, \varepsilon)$, и, кроме того, ζ заменяем на $\varepsilon^{1/4}\xi$. Как будет показано ниже, указанная процедура формирования функций $\pi_i(\xi, \varepsilon)$ позволяет получить единообразную оценку пограничных функций $\Pi_i(\xi, \varepsilon)$, $i = 1, 2, \dots$:

$$|\Pi_i(\xi, \varepsilon)| \leq c\Pi_{\varkappa}(\xi, \varepsilon), \quad \xi \geq 0, \quad (20)$$

причем $\Pi_{\varkappa}(\xi, \varepsilon)$ имеет такой же вид, как $\Pi_0(\xi, \varepsilon)$ (см. (17)) с тем лишь отличием, что экспоненту $\exp(-\varepsilon^{1/4}k_0\xi)$ в числителе выражения (17) нужно заменить на $\exp(-\varepsilon^{1/4}\varkappa\xi)$, где $\varkappa$ – некоторое число из интервала $0 < \varkappa < k_0$. Это число и также число c в оценке (20) будут различными для различных i , но в целях упрощения записи будем обозначать их одними и теми же буквами $\varkappa$ и c для любого i . Заметим, что оценка (20), очевидно, верна при $i = 0$ для любого $\varkappa \in (0, k_0)$:

$$\Pi_0(\xi, \varepsilon) \leq \Pi_{\varkappa}(\xi, \varepsilon). \quad (21)$$

Граничные условия для пограничных функций $\Pi_i(\xi, \varepsilon)$, $i = 1, 2, \dots$ следуют из (9) и (10) и имеют вид

$$\Pi_i(0, \varepsilon) = \begin{cases} -\bar{u}_{i/2}(0), & \text{если } i - \text{четное число,} \\ 0, & \text{если } i - \text{нечетное число,} \end{cases} \quad \Pi_i(\infty, \varepsilon) = 0, \quad (22)$$

Для $i = 1$ из правой части (18) получаем $\pi_1(\xi, \varepsilon) = 0$, и так как $\Pi_1(0, \varepsilon) = 0$, то задача (19), (22) для $i = 1$ имеет тривиальное решение $\Pi_1(\xi, 0) \equiv 0$.

Формирование $\pi_2(\xi, \varepsilon)$ и $\pi_3(\xi, \varepsilon)$ по указанному выше принципу дает следующие выражения:

$$\pi_2(\xi, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}(2\bar{u}_2(0)\Pi_0 - \Pi_0 f_1),$$

где $\Pi_0 f_1 := f_1(\varphi(0) + \Pi_0(\xi, \varepsilon), 0, 0) - f_1(\varphi(0), 0, 0)$;

$$\pi_3(\xi, \varepsilon) = h'(0)(\varepsilon^{1/4}\xi)\Pi_0^2(\xi, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}[2h'(0)\bar{u}_1(0)(\varepsilon^{1/4}\xi) + 2\bar{u}'_1(0)(\varepsilon^{1/4}\xi)]\Pi_0(\xi, \varepsilon).$$

Так как $|\Pi_0 f_1| \leq c\Pi_0(\xi, \varepsilon)$, $\varepsilon^{1/4}\xi\Pi_0(\xi, \varepsilon) \leq c\Pi_{\varkappa}(\xi, \varepsilon)$, то π_2 и π_3 имеют оценки

$$\begin{aligned} |\pi_2(\xi, \varepsilon)| &\leq c\sqrt{\varepsilon}\Pi_0(\xi, \varepsilon) \leq c\sqrt{\varepsilon}\Pi_{\varkappa}(\xi, \varepsilon), \\ |\pi_3(\xi, \varepsilon)| &\leq c[\Pi_{\varkappa}^2(\xi, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_{\varkappa}(\xi, \varepsilon)]. \end{aligned}$$

ЛЕММА. *Функции $\Pi_i(\xi, \varepsilon)$, $i = 1, 2, \dots, n$, где n – любое фиксированное натуральное число, имеют оценку (20).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $i = 0$ оценка верна (см. (21)). Далее по индукции. Допустим, что оценка (20) верна для $\Pi_j(\xi, \varepsilon)$ при $j < i$. Тогда, учитывая принцип формирования неоднородности $\pi_i(\xi, \varepsilon)$ в уравнении (19) и очевидное для любого $k > 0$

неравенство $(\varepsilon^{1/4}\xi)^k \Pi_{\varkappa}(\xi, \varepsilon) \leq c \Pi_{\varkappa}(\xi, \varepsilon)$ (с разными $\varkappa$ в левой и правой частях неравенства) приходим к следующей оценке для $\pi_i(\xi, \varepsilon)$:

$$|\pi_i(\xi, \varepsilon)| \leq c[\Pi_{\varkappa}^2(\xi, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon} \Pi_{\varkappa}(\xi, \varepsilon)]. \quad (23)$$

Заметим, что рассмотренные выше функции $\pi_2(\xi, \varepsilon)$ и $\pi_3(\xi, \varepsilon)$ имеют оценку вида (23).

Решение задачи (19), (22) можно записать в виде

$$\Pi_i(\xi, \varepsilon) = \Pi_i(0, \varepsilon) \Phi(\xi, \varepsilon) + \Phi(\xi, \varepsilon) \int_0^\xi \Phi^{-2}(\xi_1, \varepsilon) d\xi_1 \int_\infty^{\xi_1} \Phi(\xi_2, \varepsilon) \pi_i(\xi_2, \varepsilon) d\xi_2, \quad (24)$$

где

$$\Phi(\xi, \varepsilon) = \frac{d\Pi_0}{d\xi}(\xi, \varepsilon) = -\left(\frac{2}{3} \Pi_0(\xi, \varepsilon) + 2\sqrt{\varepsilon} \bar{u}_1(0)\right)^{1/2} \cdot \Pi_0(\xi, \varepsilon)$$

(см. (16)). Функция $\Phi(\xi, \varepsilon)$ удовлетворяет неравенствам

$$|\Phi(\xi, \varepsilon)| \leq c[\Pi_0(\xi, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}]^{1/2} \Pi_0(\xi, \varepsilon), \quad (25)$$

$$|\Phi^{-2}(\xi, \varepsilon)| \leq c[\Pi_0^3(\xi, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon} \Pi_0^2(\xi, \varepsilon)]^{-1}. \quad (26)$$

В силу (25) и (21) первое слагаемое в выражении (24) для $\Pi_i(\xi, \varepsilon)$ имеет оценку вида (20). Покажем, что и второе слагаемое (обозначим его $\bar{\Pi}_i(\xi, \varepsilon)$) имеет такую же оценку. Используя (25), (26) и учитывая, что $\Phi(\xi, \varepsilon) = d\Pi_0/d\xi(\xi, \varepsilon)$, получаем

$$\begin{aligned} |\bar{\Pi}_i(\xi, \varepsilon)| &\leq c[\Pi_0(\xi, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}]^{1/2} \Pi_0(\xi, \varepsilon) \int_0^\xi [\Pi_0^3(\xi_1, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon} \Pi_0^2(\xi_1, \varepsilon)]^{-1} d\xi_1 \\ &\quad \times \int_\infty^{\xi_1} \frac{d\Pi_0(\xi, \varepsilon)}{d\xi}(\xi_2, \varepsilon) |\pi_i(\xi_2, \varepsilon)| d\xi_2. \end{aligned}$$

В силу оценки (23) и неравенства $\Pi_{\varkappa}(\xi_2, \varepsilon) \leq \Pi_{\varkappa}(\xi_1, \varepsilon)$ при $\xi_2 \geq \xi_1$, для внутреннего интеграла имеем оценку

$$\begin{aligned} \int_\infty^{\xi_1} \frac{d\Pi_0}{d\xi}(\xi_2, \varepsilon) |\pi_i(\xi_2, \varepsilon)| d\xi_2 &\leq \int_\infty^{\xi_1} \frac{d\Pi_0}{d\xi}(\xi_2, \varepsilon) c[\Pi_{\varkappa}^2(\xi_2, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon} \Pi_{\varkappa}(\xi_2, \varepsilon)] d\xi_2 \\ &\leq c[\Pi_{\varkappa}^2(\xi_1, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon} \Pi_{\varkappa}(\xi_1, \varepsilon)] \Pi_0(\xi_1, \varepsilon). \end{aligned}$$

Поэтому

$$|\bar{\Pi}_i(\xi, \varepsilon)| \leq c[\Pi_0(\xi, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}]^{1/2} \Pi_0(\xi, \varepsilon) \int_0^\xi \frac{\Pi_{\varkappa}(\xi_1, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}}{\Pi_0(\xi_1, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{\Pi_{\varkappa}(\xi_1, \varepsilon)}{\Pi_0(\xi_1, \varepsilon)} d\xi_1. \quad (27)$$

Заметим, что если $0 \leq \xi_1 \leq \xi$, то

$$\begin{aligned} \Pi_0(\xi, \varepsilon) &= \Pi_{\varkappa}(\xi, \varepsilon) \exp(-\varepsilon^{1/4}(k_0 - \varkappa)\xi) \\ &\leq \Pi_{\varkappa}(\xi, \varepsilon) \exp(-\varepsilon^{1/4}(k_0 - \varkappa)\xi_1) = \Pi_{\varkappa}(\xi, \varepsilon) \Pi_0(\xi_1, \varepsilon) \Pi_{\varkappa}^{-1}(\xi_1, \varepsilon), \end{aligned}$$

т.е.

$$\Pi_0(\xi, \varepsilon) \frac{\Pi_{\varkappa}(\xi_1, \varepsilon)}{\Pi_0(\xi_1, \varepsilon)} \leq \Pi_{\varkappa}(\xi, \varepsilon),$$

и так как $[\Pi_0(\xi, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}]^{1/2} \leq \sqrt{\Pi_0(\xi, \varepsilon) + \varepsilon^{1/4}}$, из (27) следует неравенство

$$|\bar{\Pi}_i(\xi, \varepsilon)| \leq c \Pi_{\varkappa}(\xi, \varepsilon) (\sqrt{\Pi_0(\xi, \varepsilon) + \varepsilon^{1/4}}) \int_0^\xi \frac{\Pi_{\varkappa}(\xi_1, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}}{\Pi_0(\xi_1, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}} d\xi_1.$$

Используя выражения для $\Pi_{\varkappa}(\xi, \varepsilon)$ и $\Pi_0(\xi, \varepsilon)$, нетрудно установить, что

$$\frac{\Pi_{\varkappa}(\xi, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}}{\Pi_0(\xi, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}} \leq c \quad \text{при} \quad \xi \geq 0.$$

Поэтому

$$|\bar{\Pi}_i(\xi, \varepsilon)| \leq c \Pi_{\varkappa}(\xi, \varepsilon) (\sqrt{\Pi_0(\xi, \varepsilon)} \xi + \varepsilon^{1/4} \xi),$$

а поскольку $\sqrt{\Pi_0(\xi, \varepsilon)} \cdot \xi \leq c$ (это легко проверить, используя явное выражение для $\Pi_0(\xi, \varepsilon)$) и $\Pi_{\varkappa}(\xi, \varepsilon) \cdot \varepsilon^{1/4} \xi \leq c \Pi_{\varkappa}(\xi, \varepsilon)$ (с разными $\varkappa$ в левой и правой частях неравенства), то окончательно получаем: $|\bar{\Pi}_i(\xi, \varepsilon)| \leq c \Pi_{\varkappa}(\xi, \varepsilon)$.

Таким образом, функция $\Pi_i(\xi, \varepsilon)$ имеет оценку (20). Лемма доказана.

Оценка (20) и тот факт, что функция $\Pi_{\varkappa}(\xi, \varepsilon)$ ведет себя таким же образом, как и $\Pi_0(\xi, \varepsilon)$, означают, что все члены погранслоного ряда $\Pi(\xi, \varepsilon)$ характеризуются одинаковым поведением (таким же, как описанное выше поведение $\Pi_0(\xi, \varepsilon)$), т.е. в первой зоне пограничного слоя они убывают с ростом ξ степенным образом, затем во второй (переходной) зоне происходит изменение масштаба погранслоной переменной, и, наконец, в третьей зоне убывание функций $\Pi_i(\xi, \varepsilon)$ имеет экспоненциальный характер.

Погранслоный ряд

$$\tilde{\Pi}(\tilde{\xi}, \varepsilon) = \sum_{i=0} \varepsilon^{i/4} \Pi_i(\tilde{\xi}, \varepsilon), \quad \text{где} \quad \tilde{\xi} = \frac{1-x}{\varepsilon},$$

описывающий поведение решения в окрестности граничной точки $x = 1$, строится аналогично ряду $\Pi(\xi, \varepsilon)$, и функции $\tilde{\Pi}_i(\tilde{\xi}, \varepsilon)$ имеют аналогичные оценки.

3. Обоснование асимптотики в случае $\bar{f}_1(x) > 0$.

ТЕОРЕМА 1. Если выполнены условия A1–A3, то для достаточно малых ε задача (1), (2) имеет решение $u(x, \varepsilon)$, и для любого натурального числа n справедливо равенство

$$u(x, \varepsilon) = U_n(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{(n+1)/2}), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (28)$$

где

$$U_n(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^{i/2} \bar{u}_i(x) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/4} \left[\Pi_i\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon\right) + \tilde{\Pi}_i\left(\frac{1-x}{\varepsilon}, \varepsilon\right) \right]. \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем теорему с помощью метода дифференциальных неравенств, т.е. путем построения подходящих нижнего и верхнего решений для задачи (1), (2). Напомним эти понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функции $\underline{U}(x, \varepsilon)$ и $\bar{U}(x, \varepsilon)$ называются *упорядоченными нижним и верхним решениями задачи (1), (2)*, если они удовлетворяют условиям:

1°) $\underline{U}(x, \varepsilon) \leq \bar{U}(x, \varepsilon)$, $0 \leq x \leq 1$ (условие упорядоченности);

$$2^\circ) L_\varepsilon \underline{U} := \varepsilon^2(d^2 \underline{U}/dx^2) - f(\underline{U}, x, \varepsilon) \geq 0 \geq L_\varepsilon \bar{U}, \quad 0 < x < 1;$$

$$3^\circ) \underline{U}(0, \varepsilon) \leq u^0 \leq \bar{U}(0, \varepsilon), \quad \underline{U}(1, \varepsilon) \leq u^1 \leq \bar{U}(1, \varepsilon).$$

Известно [4], что если для задачи (1), (2) существуют упорядоченные нижнее и верхнее решения $\underline{U}(x, \varepsilon)$ и $\bar{U}(x, \varepsilon)$, то задача (1), (2) имеет решение $u(x, \varepsilon)$, удовлетворяющее неравенствам

$$\underline{U}(x, \varepsilon) \leq u(x, \varepsilon) \leq \bar{U}(x, \varepsilon), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (30)$$

Покажем, что функция

$$\underline{U}(x, \varepsilon) = U_n(x, \varepsilon) - M\varepsilon^{n/2}, \quad (31)$$

где $U_n(x, \varepsilon)$ определена формулой (29) и $n \geq 2$, является для достаточно большого числа M (не зависящего от ε) и для достаточно малых ε нижним решением задачи (1), (2), т.е. удовлетворяет условиям 2° и 3° для нижнего решения.

Начнем с условия 3° . Так как

$$U_n(0, \varepsilon) = u^0 + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/4} \tilde{\Pi}_i\left(\frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon\right)$$

(см. (29) и (22)) и так как $\tilde{\Pi}_i(1/\varepsilon, \varepsilon) = o(\varepsilon^N)$ для любого N (в силу экспоненциального убывания функций $\tilde{\Pi}_i(\xi, \varepsilon)$), для достаточно малых ε получаем

$$\underline{U}(0, \varepsilon) = u^0 - M\varepsilon^{n/2} + o(\varepsilon^N) < u^0,$$

т.е. $\underline{U}(x, \varepsilon)$ удовлетворяет в точке $x = 0$ условию 3° . Аналогично доказывается, что $\underline{U}(x, \varepsilon)$ удовлетворяет условию 3° в точке $x = 1$.

Перейдем к условию 2° . Воспользуемся тем, что согласно описанной процедуре построения асимптотики имеет место равенство

$$L_\varepsilon U_n = O(\varepsilon^{(n/2)+1}) + O(\varepsilon^{(n+1)/2})(\Pi_\varkappa(\xi, \varepsilon) + \tilde{\Pi}_\varkappa(\xi, \varepsilon)).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} L_\varepsilon \underline{U} &= L_\varepsilon U_n - [f(U_n - M\varepsilon^{n/2}, x, \varepsilon) - f(U_n, x, \varepsilon)] \\ &= L_\varepsilon U_n - h(x)[(U_n - M\varepsilon^{n/2} - \varphi(x))^2 - (U_n - \varphi(x))^2] \\ &\quad + \varepsilon[f_1(U_n - M\varepsilon^{n/2}, x, \varepsilon) - f_1(U_n, x, \varepsilon)] \\ &= O(\varepsilon^{(n/2)+1}) + O(\varepsilon^{(n+1)/2})(\Pi_\varkappa + \tilde{\Pi}_\varkappa) \\ &\quad + 2h(x)[\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(x) + \Pi_0 + \sqrt{\varepsilon}\Pi_2 + \tilde{\Pi}_0 + \sqrt{\varepsilon}\tilde{\Pi}_2 + O(\varepsilon^{3/4})]M\varepsilon^{n/2} \\ &\quad + \varepsilon f_{1u}^* \cdot (-M\varepsilon^{n/2}) \\ &= \varepsilon^{(n+1)/2}[O(1) + (2h(x)\bar{u}_1(x) + O(\varepsilon^{1/4}))M] + \varepsilon^{n/2}2h(x)M(\Pi_0 + \sqrt{\varepsilon}\Pi_2) \\ &\quad + \varepsilon^{n/2} \cdot 2h(x)M(\tilde{\Pi}_0 + \sqrt{\varepsilon}\tilde{\Pi}_2). \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно каждое из трех слагаемых в правой части полученного равенства. Так как $2h(x)\bar{u}_1(x) \geq c > 0$, то выражение в квадратных скобках и, значит, все первое слагаемое положительно для достаточно малых ε и достаточно

большого M . Обратимся ко второму слагаемому. Из выражения (17) для $\Pi_0(\xi, \varepsilon)$ следует, что если $0 \leq \xi \leq \xi_0$, где ξ_0 – любое фиксированное число, то для достаточно малых ε справедливо неравенство

$$\Pi_0(\xi, \varepsilon) \geq \frac{c}{(1 + \xi_0)^2}.$$

Поэтому $\Pi_0 + \sqrt{\varepsilon}\Pi_2 > 0$ и все второе слагаемое положительно при $0 \leq \xi \leq \xi_0$ для достаточно малых ε . Возьмем теперь ξ_0 столь большим, чтобы при $\xi \geq \xi_0$ функция $2h(x)M|\Pi_2(\xi, \varepsilon)|$ была меньше, чем выражение в квадратных скобках, входящее в первое слагаемое. Это можно сделать, так как $\Pi_2(\xi, \varepsilon) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$. Тогда при $\xi \geq \xi_0$ сумма слагаемого $\varepsilon^{n/2}2h(x)M\sqrt{\varepsilon}\Pi_2$ и первого слагаемого будет, очевидно, положительной, а поскольку $\Pi_0(\xi, \varepsilon) > 0$, то будет положительной сумма первого и второго слагаемых. Аналогично доказывается, что для достаточно малых ε третье слагаемое не изменит положительный знак всей суммы. Итак,

$$L_\varepsilon \underline{U} > 0, \quad 0 < x < 1,$$

т.е. функция $\underline{U}(x, \varepsilon)$ удовлетворяет условию 2° для нижнего решения. Отметим, что важную роль для выполнения этого условия сыграла положительность функции $\bar{u}_1(x)$.

Верхнее решение возьмем в виде, аналогичном (31):

$$\bar{U}(x, \varepsilon) = U_n(x, \varepsilon) + M\varepsilon^{n/2}. \quad (32)$$

Таким же образом, как для функции $\underline{U}(x, \varepsilon)$, можно доказать, что $\bar{U}(x, \varepsilon)$ удовлетворяет условиям 2° и 3° для верхнего решения.

Функции $\underline{U}(x, \varepsilon)$ и $\bar{U}(x, \varepsilon)$, определенные формулами (31) и (32), удовлетворяют, очевидно, условию 1° .

Итак, функции $\underline{U}(x, \varepsilon)$ и $\bar{U}(x, \varepsilon)$ для достаточно малых ε и достаточно большого M являются упорядоченными нижним и верхним решениями задачи (1), (2). Следовательно, существует решение $u(x, \varepsilon)$ этой задачи, удовлетворяющее неравенствам (30). Из этих неравенств и вида функций $\underline{U}(x, \varepsilon)$ и $\bar{U}(x, \varepsilon)$ следует асимптотическое равенство $u(x, \varepsilon) = U_n(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n/2})$, а поскольку $U_n(x, \varepsilon) = U_{n-1}(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n/2})$, то $u(x, \varepsilon) = U_{n-1}(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n/2})$. Заменяя в этом равенстве $n - 1$ на n , приходим к равенству (28). Теорема 1 доказана.

4. Асимптотика решения в случае $\bar{f}_1(x) \equiv 0$. Пусть выполнены условия A1, A3. В этом случае структура регулярной части асимптотики решения и масштабы погранслоинных переменных изменяются по отношению к случаю $\bar{f}_1(x) > 0$.

Регулярный ряд $\bar{u}(x, \varepsilon)$ будет теперь рядом по целым степеням ε :

$$\bar{u}(x, \varepsilon) = \sum_{i=0} \varepsilon^i \bar{u}_i(x),$$

причем $\bar{u}_0 = \varphi(x)$, а для $\bar{u}_1(x)$ получается квадратное уравнение

$$h(x)\bar{u}_1^2 - g(x)\bar{u}_1 - F(x) = 0, \quad (33)$$

где $F(x) = f_2(\varphi(x), x, 0) - \varphi''(x)$.

УСЛОВИЕ А4. Пусть уравнение (33) имеет два различных вещественных корня при $x \in [0; 1]$.

Обозначим их $\bar{u}_{11}(x)$ и $\bar{u}_{12}(x)$ и для определенности будем считать, что $\bar{u}_{12}(x) > \bar{u}_{11}(x)$. Возьмем $\bar{u}_1(x) = \bar{u}_{12}(x)$. Так как $\bar{u}_{11}(x) + \bar{u}_{12}(x) = h^{-1}(x)g(x) > 0$, то $\bar{u}_{12}(x) > 0$ при $x \in [0; 1]$. Таким образом,

$$\bar{u}_1(x) > 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Это неравенство играет такую же важную роль, как в п. 2 и 3.

Для функции $\bar{u}_i(x)$ при $i \geq 2$ получаются линейные уравнения

$$[h(x)a(x)]\bar{u}_1 = F_i(x),$$

где $F_i(x)$ рекуррентно выражаются через функции $\bar{u}_j(x)$, $j < i$,

$$a(x) = 2\bar{u}_1(x) - h^{-1}(x)g(x) = \bar{u}_{12}(x) - \bar{u}_{11}(x) > 0 \quad \text{при } x \in [0; 1], \quad (34)$$

что обеспечивает однозначное определение $\bar{u}_i(x)$.

Погранслойную переменную в окрестности точки $x = 0$ введем как и в п. 2: $\xi = x/\varepsilon$, и так же, как в п. 2, будем формировать уравнения для членов погранслойного ряда $\Pi(\xi, \varepsilon)$, который будет теперь рядом по целым степеням $\varepsilon^{1/2}$:

$$\Pi(\xi, \varepsilon) = \sum_{i=0} \varepsilon^{i/2} \Pi_i(\xi, \varepsilon).$$

Введем переменную $\zeta = \sqrt{\varepsilon}\xi$ и запишем равенство, из которого будем извлекать уравнения для функций $\Pi_i(\xi, \varepsilon)$ (оно аналогично равенству (18) из п. 2):

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{d\xi^2} \sum_{i=0} \varepsilon^{i/2} \Pi_i(\xi, \varepsilon) \\ &= h(\sqrt{\varepsilon}\zeta) \left[\left(\sum_{i=0} \varepsilon^{i/2} \Pi_i(\xi, \varepsilon) \right)^2 + 2 \left(\sum_{j=1} \varepsilon^j \bar{u}_j(\sqrt{\varepsilon}\zeta) \right) \left(\sum_{i=0} \varepsilon^{i/2} \Pi_i(\xi, \varepsilon) \right) \right] \\ & \quad - \varepsilon g(\sqrt{\varepsilon}\zeta) \sum_{i=0} \varepsilon^{i/2} \Pi_i(\xi, \varepsilon) \\ & \quad - \varepsilon^2 \left[f_2 \left(\sum_{j=0} \varepsilon^j \bar{u}_j(\sqrt{\varepsilon}\zeta) + \sum_{i=0} \varepsilon^{i/2} \Pi_i(\xi, \varepsilon), \sqrt{\varepsilon}\zeta, \varepsilon \right) \right. \\ & \quad \left. - f_2 \left(\sum_{j=0} \varepsilon^j \bar{u}_j(\sqrt{\varepsilon}\zeta), \sqrt{\varepsilon}\zeta, \varepsilon \right) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда для $\Pi_0(\xi, \varepsilon)$ получается уравнение

$$\frac{d^2 \Pi_0}{d\xi^2} = \Pi_0^2 + \varepsilon a(0) \Pi_0, \quad \xi > 0,$$

где $a(0)$ определено в (34) и, что важно, $a(0) > 0$. Решение этого уравнения с граничными условиями

$$\Pi_0(0, \varepsilon) = \Pi^0, \quad \Pi_0(\infty, \varepsilon) = 0$$

запишем в виде, аналогичном (17):

$$\Pi_0(\xi, \varepsilon) = \frac{6\varepsilon a(0)b \exp(-\sqrt{\varepsilon} k_0 \xi)}{[1 - b \exp(-\sqrt{\varepsilon} k_0 \xi)]}, \quad (35)$$

где $b = 1 - \sqrt{\varepsilon} \beta + O(\varepsilon)$, $\beta > 0$ – известное число, $k_0 = \sqrt{a(0)} > 0$. Анализ выражения (35) показывает, что в данном случае так же, как и в случае, описанном в п. 2, в окрестности точки $x = 0$ имеются три зоны пограничного слоя, но с другими границами зон, нежели в п. 2. В первой зоне, где $0 \leq x \leq A\varepsilon^{1-\gamma}$, $0 \leq \gamma < 1/2$, пограничная функция $\Pi_0(\xi, \varepsilon)$ убывает с ростом ξ степенным образом:

$$\Pi_0(\xi, \varepsilon) = O\left(\frac{1}{(1 + \xi)^2}\right);$$

во второй (переходной) зоне, где $A\varepsilon^{1-\gamma} \leq x \leq A\sqrt{\varepsilon}$, происходит изменение масштаба погранслошной переменной и меняется характер убывания функции Π_0 ; и, наконец, в третьей зоне, где $x \geq A\sqrt{\varepsilon}$, погранслошная переменная имеет вид $\zeta = x/\sqrt{\varepsilon}$, а функция Π_0 убывает с ростом ζ экспоненциально: $\Pi_0 = O(\varepsilon) \exp(-k_0 \zeta)$.

Такое же поведение имеют следующие члены погранслошного ряда – функции $\Pi_i(\xi, \varepsilon)$. Они определяются как решения задач

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Pi_i}{d\xi^2} &= (2\Pi_0(\xi, \varepsilon) + \varepsilon a(0)) \cdot \Pi_i + \pi_i(\xi, \varepsilon), \quad \xi > 0, \\ \Pi_i(0, \varepsilon) &= \begin{cases} -\bar{u}_{i/2}(0), & \text{если } i - \text{четное число,} \\ 0, & \text{если } i - \text{нечетное число,} \end{cases} \quad \Pi_i(\infty, \varepsilon) = 0, \end{aligned}$$

причем неоднородности $\pi_i(\xi, \varepsilon)$ формируются по тому же принципу, как и в п. 2. Это позволяет получить для $\pi_i(\xi, \varepsilon)$ оценку $|\pi_i(\xi, \varepsilon)| \leq c(\Pi_{\varkappa}^2(\xi, \varepsilon) + \varepsilon \Pi_{\varkappa}(\xi, \varepsilon))$, где $\Pi_{\varkappa}(\xi, \varepsilon)$ имеет такой же вид, как $\Pi_0(\xi, \varepsilon)$ (см. (35)), с тем отличием, что число k_0 в показателе экспоненты, стоящей в числителе выражения (35), нужно заменить на число $\varkappa < k_0$. Указанная оценка для $\pi_i(\xi, \varepsilon)$ приводит к единообразной оценке для функций $\Pi_i(\xi, \varepsilon)$, которые, как и в п. 2, выражаются формулой (24): $|\Pi_i(\xi, \varepsilon)| \leq c \Pi_{\varkappa}(\xi, \varepsilon)$.

Погранслошный ряд

$$\tilde{\Pi}(\tilde{\xi}, \varepsilon) = \sum_{i=0} \varepsilon^{i/2} \tilde{\Pi}_i(\tilde{\xi}, \varepsilon), \quad \text{где } \tilde{\xi} = \frac{1-x}{\varepsilon},$$

строится аналогично ряду $\Pi(\xi, \varepsilon)$ и обладает аналогичными свойствами.

Таким же образом, как в п. 3, можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Если выполнены условия A1, A2', A3, A4, то для достаточно малых ε задача (1), (2) имеет решение $u(x, \varepsilon)$ и для любого натурального числа n справедливо равенство

$$u(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \bar{u}_i(x) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \left[\Pi_i\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon\right) + \tilde{\Pi}_i\left(\frac{1-x}{\varepsilon}, \varepsilon\right) \right] + O(\varepsilon^{n+1}), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (36)$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*, Актуальные вопросы прикладной и вычислительной математики, Высшая школа, М., 1990.
- [2] А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, Наука, М., 1989.
- [3] В. Ф. Бутузов, “О периодических решениях сингулярно возмущенных параболических задач в случае кратных корней вырожденного уравнения”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **51**:1 (2011), 44–55.
- [4] C. V. Pao, *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*, Plenum Press, New York, 1992.

В. Ф. Бутузов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: butuzov@phys.msu.ru

Поступило

21.07.2012

Исправленный вариант

26.12.2012