Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. В. Базайкин, О. А. Богоявленская, Полные римановы метрики с группой голономии G_2 на деформациях конусов над $S^3 \times S^3$, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 5, 645–657

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10107>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 17:16:22

Полные римановы метрики с группой голономии G_2 на деформациях конусов над $S^3 \times S^3$

Я. В. Базайкин, О. А. Богоявленская

Строятся полные римановы метрики с группой голономии G_2 на многообразиях, полученных деформацией конусов над $S^3 \times S^3$.

Библиография: 12 названий.

DOI: 10.4213/mzm10107

1. Введение. Данная статья продолжает работы [1]–[4] и посвящена изучению римановых многообразий с группой голономии G_2 . В последнее время эта задача вызывает немалый интерес, причем, хотя наиболее важной задачей является исследование компактных многообразий, допускающих такие метрики, все же исследование некомпактных многообразий (преимущественно пространств векторных расслоений) с полными римановыми метриками с группой голономии G_2 вполне закономерно. Это объясняется тем, что в последнем случае, как правило, удастся явным образом задать G_2 -структуру и выписать уравнения, гарантирующие ее параллельность. При этом, если группа симметрии рассмотренной G_2 -структуры достаточно велика, то задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, что позволяет либо найти решения в явном виде (в контрасте с компактным случаем), либо качественно их исследовать.

Основная идея этой статьи уже использовалась в [1]–[3] для построения полных римановых метрик с группой голономии $\text{Spin}(7)$ и заключается в следующем: рассматривается стандартная коническая метрика над римановым многообразием со специальной геометрией. Тогда деформация этой метрики зависит от некоторого числа функциональных параметров, которые позволяют явным образом задать G_2 (либо $\text{Spin}(7)$) структуру. В данной работе мы предлагаем (вслед за [5]) рассмотреть в качестве такой базы конуса пространство $M = S^3 \times S^3$. Конусную метрику тогда можно записать как

$$d\bar{s}^2 = dt^2 + \sum_{i=1}^3 A_i(t)^2 (\eta_i + \tilde{\eta}_i)^2 + \sum_{i=1}^3 B_i(t)^2 (\eta_i - \tilde{\eta}_i)^2,$$

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты №№ 12-01-00873 и 12-01-00124), Советом по грантам Президента РФ (гранты МД-249.2011.1 и НШ-544.2012.1) и фондом «Династия».

где η_i , $\tilde{\eta}_i$ – это стандартный корепер из 1-форм, а функции $A_i(t)$, $B_i(t)$ задают деформацию конусной особенности. В работе [5] была выписана система дифференциальных уравнений, гарантирующая, что метрика $d\bar{s}^2$ имеет группу голономии, содержащуюся в G_2 . В [5] было также найдено частное решение этой системы, отвечающее метрике с группой голономии G_2 на $S^3 \times \mathbb{R}^4$. Отметим, что в работах [6]–[10] также исследовались и более общие метрики на конусах над $S^3 \times S^3$, но в рассмотренной нами ситуации не было найдено других примеров, кроме примера из [5] и классического примера из [11].

В предлагаемой работе мы продолжаем исследование данного класса метрик, положив $A_2 = A_3$, $B_2 = B_3$ и рассмотрев отличное от [5] краевое условие, что приводит к пространствам с другим топологическим строением. А именно, мы требуем, чтобы в вершине конуса обращалась в нуль только функция B_1 . Это приводит к тому, что риманова метрика $d\bar{s}^2$ определена на $H^4 \times S^3$, где H – пространство тавтологического комплексного линейного расслоения над S^2 , а H^4 – его четвертая тензорная степень. Заметим, что в [9] было проведено численное исследование (при помощи разложения решения основной системы в ряд Тейлора), давшее аргументы в пользу существования построенных нами метрик. Основной результат работы сформулируем в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. *Существует однопараметрическое семейство попарно негомотетичных полных римановых метрик вида $d\bar{s}^2$ с группой голономии G_2 на $H^4 \times S^3$, причем метрики можно параметризовать набором начальных данных*

$$(A_1(0), A_2(0), B_1(0), B_2(0)) = (\mu, \lambda, 0, \lambda), \quad \text{где } \lambda, \mu > 0, \quad \mu^2 + \lambda^2 = 1.$$

При $t \rightarrow \infty$ метрики данного семейства сколь угодно близко аппроксимируются прямым произведением $S^1 \times C(S^2 \times S^3)$, где $C(S^2 \times S^3)$ – конус над произведением сфер. При этом сфера S^2 возникает как факторизация диагонально вложенной в $S^3 \times S^3$ трехмерной сферы по действию окружности, соответствующей векторному полю $\xi^1 + \xi_1$.

2. G_2 -структура на конусе над $S^3 \times S^3$. Рассмотрим группу Ли $G = \text{SU}(2)$ со стандартной биинвариантной метрикой

$$\langle X, Y \rangle = -\text{tr}(XY),$$

где $X, Y \in \mathfrak{su}(2)$. На G рассмотрим три киллинговых векторных поля:

$$\xi^1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \xi^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно посчитать, что они удовлетворяют соотношениям

$$[\xi^i, \xi^{i+1}] = 2\xi^{i+2},$$

где индексы $i = 1, 2, 3$ приводятся по модулю 3. Пусть η_1, η_2, η_3 – двойственный к ξ_1, ξ_2, ξ_3 базис из 1-форм, т.е. $\eta_i(\xi^j) = \delta_i^j$. Тогда

$$d\eta_i = -2\eta_{i+1} \wedge \eta_{i+2}.$$

Пусть $M = G \times G$; тогда на M возникают 6 киллинговых полей $\xi^i, \tilde{\xi}^i, i = 1, 2, 3$, касательных, соответственно, первому и второму множителям, и 6 двойственных к ним 1-форм $\eta_i, \tilde{\eta}_i$. Рассмотрим конус $\overline{M} = \mathbb{R}_+ \times M$ с метрикой

$$d\bar{s}^2 = dt^2 + \sum_{i=1}^3 A_i(t)^2 (\eta_i + \tilde{\eta}_i)^2 + \sum_{i=1}^3 B_i(t)^2 (\eta_i - \tilde{\eta}_i)^2,$$

где $A_i(t)$ и $B_i(t)$ – некоторые положительные функции, определяющие деформацию стандартной конусной метрики.

Введя в рассмотрение ортонормированный корепер

$$\begin{aligned} e^1 &= A_1(\eta_1 + \tilde{\eta}_1), & e^2 &= A_2(\eta_2 + \tilde{\eta}_2), & e^3 &= A_3(\eta_3 + \tilde{\eta}_3), \\ e^4 &= B_1(\eta_1 - \tilde{\eta}_1), & e^5 &= B_2(\eta_2 - \tilde{\eta}_2), & e^6 &= B_3(\eta_3 - \tilde{\eta}_3), \\ e^7 &= dt, \end{aligned}$$

определим следующую 3-форму:

$$\Psi = e^{564} + e^{527} + e^{513} + e^{621} + e^{637} + e^{432} + e^{417},$$

где $e^{ijk} = e^i \wedge e^j \wedge e^k$. Форма Ψ задает G_2 -структуру на $\overline{M}$, которая является параллельной в случае выполнения уравнений

$$d\Psi = 0, \quad d * \Psi = 0. \quad (1)$$

В данной работе мы рассматриваем частный случай, когда $A_2 = A_3, B_2 = B_3$.

ЛЕММА 1. Уравнения (1) равносильны следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= \frac{1}{2} \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - \frac{A_1^2}{B_2^2} \right), & \frac{dA_2}{dt} &= \frac{1}{2} \left(\frac{B_2^2 - A_2^2 + B_1^2}{B_1 B_2} - \frac{A_1}{A_2} \right), \\ \frac{dB_1}{dt} &= \frac{A_2^2 + B_2^2 - B_1^2}{A_2 B_2}, & \frac{dB_2}{dt} &= \frac{1}{2} \left(\frac{A_2^2 - B_2^2 + B_1^2}{A_2 B_1} + \frac{A_1}{B_2} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

При $t = 0$ мы имеем конусную особенность пространства $\overline{M}$, которая может быть разрешена заданием начальных значений функций A_i, B_i . При этом с точностью до симметрии системы (2) возникают два следующих типа разрешения особенности (ср. с [1]–[3]).

Тип 1. $A_i(0) = 0, B_i(0) \neq 0, i = 1, 2$. В этом случае происходит коллапс интегральных трехмерных сфер, порожденных векторными полями $\xi^i + \tilde{\xi}^i$. Эти сферы являются орбитами свободного действия G на M , заданного соотношением $h \in G: (g_1, g_2) \mapsto (hg_1, hg_2)$. Можно показать, что при этом метрика $d\bar{s}^2$ на $\overline{M}$ продолжается на пространство $\mathcal{M}$, гомеоморфное $S^3 \times \mathbb{R}^4$. Мы опускаем подробности, поскольку этот случай в данной статье не изучается.

Тип 2. $B_1(0) = 0, B_2(0) \neq 0, A_i(0) \neq 0, i = 1, 2$. Рассмотрим свободное действие группы $U(1) = S^1$ на M :

$$z \in U(1): (U, V) \mapsto \left(\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} U, \begin{pmatrix} z^{-1} & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} V \right).$$

Понятно, что орбиты этого действия совпадают с интегральными кривыми поля $\xi_1 - \tilde{\xi}_1$. Значит, можно продолжить метрику $d\bar{s}^2$ на $[0, \infty) \times M$, затащив при $t = 0$ каждую орбиту в точку. Диффеоморфизм

$$\phi: M \rightarrow M: (U, V) \mapsto (U, U^{-1}\bar{V})$$

преобразует рассмотренное выше действие $U(1)$ в действие следующего вида:

$$z \in U(1): (U, V) \mapsto \left(\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} U, V \right).$$

Факторизация по действию $U(1)$ на первом сомножителе задает расслоение Хопфа $G = S^3 \rightarrow S^2 = G/U(1)$. После затащивания в точку орбит этого действия при $t = 0$ в пространстве $[0, \infty) \times G$ мы получаем цилиндр расслоения Хопфа, который, как нетрудно увидеть, гомеоморфен линейному $\mathbb{C}$ -расслоению H над S^2 , называемому *тавтологическим расслоением* над S^2 . Это расслоение однозначно определяется условием, что его первый класс Чженя является образующим в $H^2(S^2)$, отвечающим канонической ориентации факторпространства $S^2 = G/U(1)$. Поскольку на втором сомножителе действие тривиально, получаем, что метрика $d\bar{s}^2$ продолжается на пространство $H \times G$.

Рассмотрим теперь циклическую подгруппу $\mathbb{Z}_4$ в $U(1)$. Группа $\mathbb{Z}_4$ (следом за $U(1)$) действует на M , поэтому можно распространить это действие на все пространство $\bar{M}$. Поскольку данное дискретное действие согласовано с затащиванием орбит при $t = 0$, мы получаем действие $\mathbb{Z}_4$ на $H \times G$. Факторпространство $(H \times G)/\mathbb{Z}_4$ естественным образом диффеоморфно $\mathcal{M} = H^4 \times G$, где H^4 – четвертая тензорная степень расслоения H . Итак, в рассматриваемом случае метрика $d\bar{s}^2$ может быть продолжена на многообразие $\mathcal{M}$.

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 5 из [1].

ЛЕММА 2. *Для того чтобы метрика $d\bar{s}^2$ продолжалась до гладкой метрики на $\mathcal{M}$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

- 1) $B_1(0) = 0$, $|B'_1(0)| = 2$;
- 2) $A_2(0) = B_2(0) \neq 0$, $A'_2(0) = -A'_1(0)$;
- 3) $A_1(0) \neq 0$, $A'_1(0) = 0$;
- 4) функции A_i , B_i знакоопределены на промежутке $(0, \infty)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Разница со статьей [1], возникающая в условии на начальную производную функции B_1 в (1), связана с нормировкой: длина вектора $\xi_1 - \tilde{\xi}_1$ равна 2, а не 1, как это возникало в лемме 5 в [1].

В [5] для системы (2) было найдено точное решение следующего вида (остальные решения семейства, найденного в [5], гомотетичны данному):

$$\begin{aligned} A_1(r) &= \sqrt{\frac{(r-9/4)(r+9/4)}{(r-3/4)(r+3/4)}}, & A_2(r) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\left(r + \frac{3}{4}\right)\left(r - \frac{9}{4}\right)}, \\ B_1(r) &= 2\frac{r}{3}, & B_2(r) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\left(r - \frac{3}{4}\right)\left(r + \frac{9}{4}\right)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $r \geq 9/4$ и переменная r связана с t заменой

$$dt = \frac{dr}{A_1(r)}, \quad t|_{r=9/4} = 0.$$

Метрика (3) является полной метрикой с группой голономии G_2 на $S^3 \times \mathbb{R}^4$. Если рассмотреть случай $A_1 = A_2 = A_3 = A$ и $B_1 = B_2 = B_3 = B$, то система (2) интегрируется в элементарных функциях, и мы получаем другую полную метрику с группой голономии G_2 на $S^3 \times \mathbb{R}^4$:

$$d\bar{s}^2 = \frac{dr^2}{1 - 1/r^3} + \frac{r^2}{9} \left(1 - \frac{1}{r^3}\right) \sum_{i=1}^3 (\eta_i + \tilde{\eta}_i)^2 + \frac{r^2}{3} \sum_{i=1}^3 (\eta_i - \tilde{\eta}_i)^2. \quad (4)$$

Метрика (4) была впервые построена в [11], см. также [12]. Насколько мы знаем, метрики (3) и (4) исчерпывают список известных явных решений системы (2), отвечающих полным римановым метрикам с группой голономии G_2 .

Если сделать формальную замену $r \rightarrow -r$ в решении (4), то мы получим следующее решение (2):

$$d\bar{s}^2 = \frac{dr^2}{1 + 1/r^3} + \frac{r^2}{9} \left(1 + \frac{1}{r^3}\right) \sum_{i=1}^3 (\eta_i + \tilde{\eta}_i)^2 + \frac{r^2}{3} \sum_{i=1}^3 (\eta_i - \tilde{\eta}_i)^2. \quad (5)$$

Решение (5) определено при $0 < r < \infty$, но не задает никакую гладкую риманову метрику, поскольку имеет особенность при $r = 0$.

3. Семейство новых решений. Действуя аналогично [1], мы рассмотрим стандартное евклидово пространство $\mathbb{R}^4$ и положим $R(t) = (A_1(t), A_2(t), B_1(t), B_2(t))$. Пусть $V: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ – функция от аргумента R , определенная правой частью системы (2) (функция V , конечно, определена лишь в области, где $A_i, B_i \neq 0$). Таким образом, система (2) имеет вид

$$\frac{dR}{dt} = V(R).$$

Пользуясь инвариантностью V относительно гомотетий $\mathbb{R}^4$, сделаем замену $R(t) = f(t)S(t)$, где

$$|S(t)| = 1, \quad f(t) = |R(t)|, \\ S(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \alpha_4(t)).$$

Таким образом, наша система распадается на «радиальную» и «тангенциальную» части:

$$\frac{dS}{du} = V(S) - \langle V(S), S \rangle S = W(S), \quad (6)$$

$$\frac{1}{f} \frac{df}{du} = \langle V(S), S \rangle, \quad dt = f du. \quad (7)$$

Решения автономной системы (6) на трехмерной сфере

$$S^3 = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \mid \sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 = 1 \right\}$$

позволяют найти решения (2) интегрированием уравнений (7). Следующая лемма очевидна.

ЛЕММА 3. Системы (2) и (6) допускают следующие симметрии:

$$\begin{aligned}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) &\mapsto (-\alpha_1, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_2), \\((\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u), \alpha_4(u)) &\mapsto (-\alpha_1(-u), \alpha_2(-u), \alpha_3(-u), -\alpha_4(-u)), \\((\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u), \alpha_4(u)) &\mapsto (-\alpha_1(-u), -\alpha_2(-u), \alpha_3(-u), \alpha_4(-u)), \\((\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u), \alpha_4(u)) &\mapsto (\alpha_1(u), \alpha_2(u), -\alpha_3(u), -\alpha_4(u)), \\((\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u), \alpha_4(u)) &\mapsto (\alpha_1(u), -\alpha_2(u), -\alpha_3(u), \alpha_4(u)).\end{aligned}$$

В силу леммы 2 регулярной метрике на $\mathcal{M}$ может отвечать только траектория системы (6), выходящая из точки $S_0 = (\mu, \lambda, 0, \lambda)$, где $2\lambda^2 + \mu^2 = 1$. В силу симметрий леммы 3 можно считать, что $\lambda, \mu > 0$.

ЛЕММА 4. Для любой рассмотренной выше точки $S_0 = (\mu, \lambda, 0, \lambda)$ существует единственная гладкая траектория системы (6), выходящая из точки S_0 в область $\alpha_3 > 0, \alpha_4 > \alpha_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$J = \{(\mu, \lambda, 0, \lambda) \mid \mu > 0, \lambda > 0, 2\lambda^2 + \mu^2 = 1\}$$

– дуга окружности, на которой выбирается точка S_0 . Обозначим через U открытый круг в $\mathbb{R}^2$ с координатами $x = \alpha_3, y = \alpha_4 - \alpha_2$ радиуса ε с центром в нуле. Тогда в окрестности дуги J можно рассмотреть локальные координаты $x, y, z = \alpha_1$. В этих координатах поле W имеет следующие компоненты:

$$W_x = W_3, \quad W_y = W_2 - W_4, \quad W_z = W_1,$$

где

$$\begin{aligned}W_j(S) &= V_j(S) - \langle V(S), S \rangle \alpha_j, \quad j = 1, 2, 3, 4, \\S &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \\&= \left(z, \frac{1}{2}(\sqrt{2 - 2x^2 - y^2 - 2z^2} - y), x, \frac{1}{2}(\sqrt{2 - 2x^2 - y^2 - 2z^2} + y) \right),\end{aligned}$$

а формулы для $V_i(S)$ получаются соответствующей заменой координат. Поскольку в точках J изначальная система имеет особенность, мы рассмотрим в окрестности $J \times U$ модифицированную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dv} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xW_x \\ xW_y \\ xW_z \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Очевидно, что траектории системы (8) совпадают с траекториями системы (2) с точностью до замены параметра $du = x dv$. Векторное поле xW является гладким в окрестности $J \times U$, и непосредственное вычисление показывает, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ стационарными точками системы (8) в $J \times U$ будут в точности точки интервала J . Рассмотрим линеаризацию системы (8) в окрестности точки S_0 :

$$\frac{dx}{dv} = 2x, \quad \frac{dy}{dv} = \frac{\mu x}{\sqrt{2 - 2\mu^2}} - y, \quad \frac{dz}{dv} = 0.$$

Линеаризованная система имеет три собственных вектора

$$e_1 = \left(3, \frac{\mu}{\sqrt{2-2\mu^2}}, 0 \right), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1)$$

с собственными числами 2, -1 и 0 соответственно.

Непосредственное вычисление показывает, что если $(x, y, z) \rightarrow S_0 = (0, 0, \mu)$, то

$$\left\langle (0, 0, 1), \frac{xW}{|xW|} \right\rangle \rightarrow 0,$$

т.е. угол между вектором xW и вектором, касательным к дуге J , стремится к $\pi/2$ при подходе к точкам J . Это позволяет восстановить «фазовый портрет» системы (8) в окрестности $J \times U$ аналогично тому, как это делается в классическом случае. А именно, рассмотрим область Γ в $J \times U$, ограниченную параболическими цилиндрами

$$-\frac{\mu x}{\sqrt{2-2\mu^2}} + 3y + \alpha x^2 = 0, \quad -\frac{\mu x}{\sqrt{2-2\mu^2}} + 3y - \alpha x^2 = 0$$

и плоскостью $x = \delta$, где $\alpha, \delta > 0$. Эти цилиндры на фиксированном уровне z представляют собой параболы, касающиеся по вектору e_1 . Легко посчитать, что в точках первого параболического цилиндра

$$\frac{d}{dv} \left(-\frac{\mu x}{\sqrt{2-2\mu^2}} + 3y + \alpha x^2 \right) = 5\alpha x^2 + O(x^2 + y^2) \geq 0,$$

если выбрать константу α достаточно большой (причем равенство достигается только на J). Значит, траектории пересекают первый параболический цилиндр, проходя снаружи области Γ внутрь. Аналогично показывается, что траектории системы (8) пересекают второй параболический цилиндр, ограничивающий область Γ , также проходя снаружи области внутрь. Тогда для каждого значения $z = z_0$ найдется траектория, кончающаяся на плоской стенке области в точке (δ, y, z_0) , которая выходит из точки на оси J , если выбрать δ достаточно малым, а α достаточно большим (это следует из того, что такая траектория не может сильно отклониться вдоль J , поскольку угол, который она составляет с J , стремится к $\pi/2$). Следовательно, если фиксировать точку $S_0 = (0, 0, \mu)$ на дуге J , то при уменьшении δ и увеличении α можно найти траекторию, выходящую экспоненциально с порядком e^{2v} из точки S_0 в область $x > 0$. Аналогично, будет существовать траектория, выходящая из S_0 с противоположной стороны, т.е. со стороны области $x < 0$. Поскольку порядок сходимости x к нулю равен e^{-2v} , то относительно параметра u произойдет «выход» из точки S_0 за конечное время. Аналогичными рассуждениями показывается единственность каждой из траекторий.

Заметим теперь, что при переходе от параметра u к параметру v происходит обращение ориентации траекторий в области $x < 0$. Это означает, что для каждой точки S_0 существует единственная траектория, за конечное время выходящая из точки S_0 и входящая в область $x > 0$. При этом выходящая из S_0 траектория будет касаться вектора e_1 , т.е. при малых u будем иметь $\alpha_4 > \alpha_2$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Стационарные решения системы (6) на S^3 исчерпываются следующим списком нулей векторного поля W с точностью до симметрий леммы 3:

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right), \quad \left(0, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В точках, где векторное поле W обращается в нуль, поле $V(S)$ параллельно $S(u)$; следовательно, стационарные решения системы (2) удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_4^2} \right) &= \beta \alpha_1, & \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_4^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{\alpha_3 \alpha_4} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) &= \beta \alpha_2, \\ \frac{\alpha_2^2 + \alpha_4^2 - \alpha_3^2}{\alpha_2 \alpha_4} &= \beta \alpha_3, & \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_2^2 - \alpha_4^2 + \alpha_3^2}{\alpha_2 \alpha_3} + \frac{\alpha_1}{\alpha_4} \right) &= \beta \alpha_4, \\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 &= 1, \end{aligned}$$

где $\beta = \langle V(S), S \rangle \in \mathbb{R}$. Решение системы распадается на два случая: если $\alpha_1 = 0$, то без труда получаем вторую точку из условия леммы. Если $\alpha_1 \neq 0$, то, исключая β , выражаем α_1, α_3 через α_2, α_4 :

$$\alpha_1^2 = \frac{4}{3} \frac{\alpha_2^2 \alpha_4^2}{\alpha_2^2 + \alpha_4^2}, \quad \alpha_3^2 = 3 \frac{(\alpha_4^2 - \alpha_2^2)^2}{\alpha_2^2 + \alpha_4^2},$$

после чего получаем соотношение

$$4(\alpha_4^2 - \alpha_2^2)^2 = (\alpha_4^2 + \alpha_2^2)^2,$$

откуда немедленно получаем оставшиеся точки. Лемма доказана.

Точку $S \in S^3$, в которой поле W не определено, назовем *условно стационарной*, если существует вещественно-аналитическая кривая $\gamma(u)$ на S^3 , $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\gamma(0) = S$ такая, что поля V, W определены во всех точках $\gamma(u)$, $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $u \neq 0$, непрерывно продолжаются на всю кривую $\gamma(u)$, и $\lim_{u \rightarrow 0} W(\gamma(u)) = 0$.

ЛЕММА 6. Система (6) не имеет условно стационарных решений на S^3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть точка $S = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $\sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 = 1$, является условно стационарной, т.е. существует кривая $\gamma(u)$, $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, с указанными выше свойствами. Очевидно, что такое возможно только в случае, когда выполнено хотя бы одно из условий: $\alpha_2(0) = 0$, $\alpha_3(0) = 0$ или $\alpha_4(0) = 0$.

1) Рассмотрим сначала случай, когда выполнены все соотношения одновременно: $\alpha_2(0) = \alpha_3(0) = \alpha_4(0) = 0$, $\alpha_1(0) = \pm 1$. Положим для $i = 2, 3, 4$

$$\alpha_i(u) = c_i u^{k_i} (1 + o(1)) \quad \text{при } u \rightarrow 0,$$

где $c_i \neq 0$, $k_i > 0$. Заметим, что если $\alpha_2(u) = \alpha_4(u) + c u^k$, где $c \neq 0$, то V_1 не может быть непрерывно продолжено вдоль $\gamma(u)$ вплоть до $u = 0$. Из вещественной аналитичности следует, что $\alpha_2(u) = \alpha_4(u)$ и, в частности, $k_2 = k_4$. Тогда

$$V_2 = \frac{\pm 1}{2c_2} u^{-k_2} (1 + o(1))$$

– противоречие с существованием предела $V(S)$ при $u \rightarrow 0$.

2) Пусть две из трех функций $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ обращаются в нуль при $u = 0$. Рассмотрим возникающие случаи.

Случай $\alpha_2(0) = \alpha_3(0) = 0, \alpha_4(0) \neq 0$. Если при этом $\alpha_1(0) \neq 0$, то

$$V_1 = \frac{\alpha_1(0)}{2c_2^2} u^{-2k_2} (1 + o(1)),$$

что приводит к противоречию. Если $\alpha_1(u) = c_1 u^{k_1} (1 + o(1))$, $c_1 \neq 0$, $k_1 > 0$, то $k_1 \geq k_2$ (из непрерывности V_1) и

$$V_2 = \frac{\alpha_4(0)}{c_3} u^{-k_3} (1 + o(1))$$

– снова противоречие.

Случай $\alpha_2(0) \neq 0, \alpha_3(0) = \alpha_4(0) = 0$ симметричен предыдущему и исключается аналогично.

Случай $\alpha_2(0) = \alpha_4(0) = 0, \alpha_3(0) \neq 0$. Этот случай исключаем, поскольку

$$V_3 = -\frac{\alpha_3(0)^2}{c_2 c_4} u^{-k_2 - k_4} (1 + o(1)).$$

3) Предположим, что только одна из функций $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ обращается в нуль при $u = 0$.

Случай $\alpha_2(0) = 0, \alpha_3(0), \alpha_4(0) \neq 0$. Непрерывность V_1 и V_3 влечет в этом случае $\alpha_1(0) = 0$ и $\alpha_3(0) = \pm \alpha_4(0) \neq 0$, причем $k_1 \geq k_2$. В этом случае

$$\lim_{u \rightarrow 0} V(\gamma(u)) = (0, 1, 0, 0), \quad \lim_{u \rightarrow 0} W(\gamma(u)) = (0, 1, 0, 0) \neq 0$$

– противоречие.

Случай $\alpha_4(0) = 0, \alpha_2(0), \alpha_3(0) \neq 0$ исключается аналогично.

Случай $\alpha_3(0) = 0, \alpha_2(0), \alpha_4(0) \neq 0$. Непрерывность V сразу влечет $\alpha_2(0) = \pm \alpha_4(0)$. Тогда

$$\lim_{u \rightarrow 0} V_3(\gamma(u)) = 2, \quad \lim_{u \rightarrow 0} W_3(\gamma(u)) = 2 \neq 0$$

– снова противоречие. Лемма доказана.

Метрика $d\bar{s}^2$ называется *асимптотически локально конической*, если существуют функции $\tilde{A}_i(t), \tilde{B}_i(t)$, линейные по t с точностью до сдвига, такие, что

$$\left| 1 - \frac{A_i}{\tilde{A}_i} \right| \rightarrow 0, \quad \left| 1 - \frac{B_i}{\tilde{B}_i} \right| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Метрика, определяемая функциями $\tilde{A}_i(t), \tilde{B}_i(t)$, называется *локально конической*. Следующая лемма доказана в [1].

ЛЕММА 7. *Стационарным решениям системы (6) отвечают локально конические метрики на $\bar{M}$, а траекториям системы (6), асимптотически стремящимся к стационарным решениям, отвечают асимптотически локально конические метрики на $\bar{M}$.*

Следующая лемма следует из непосредственного анализа систем (2) и (6).

ЛЕММА 8. Если $S = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ – решение системы (6), то имеют место следующие соотношения:

- 1) $\frac{d}{dt}(2A_1A_2B_2 - B_1(B_2^2 - A_2^2)) = 0,$
- 2) $\frac{d}{du} \left(\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_4}{2\alpha_4\alpha_2\alpha_1 - \alpha_3(\alpha_4^2 - \alpha_2^2)} \right) = \frac{\alpha_1\alpha_3}{2\alpha_4\alpha_2\alpha_1 - \alpha_3(\alpha_4^2 - \alpha_2^2)},$
- 3) $\frac{d}{du} \left(\ln \frac{\alpha_3(\alpha_4^2 - \alpha_2^2)}{\alpha_4\alpha_2\alpha_1} \right) = \frac{2\alpha_4\alpha_2\alpha_1 - \alpha_3(\alpha_4^2 - \alpha_2^2)}{2\alpha_4\alpha_2(\alpha_4^2 - \alpha_2^2)},$
- 4) $\frac{d}{du} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_4} = \frac{\alpha_4^2 - \alpha_2^2}{\alpha_2\alpha_3\alpha_4} \quad \text{при } \alpha_1 = 0,$
- 5) $\frac{d}{du} \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_4} \right) = \frac{3}{2\alpha_4} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\alpha_3}{\alpha_4} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\alpha_3}{\alpha_4} \right) \quad \text{при } \alpha_1 = 0, \alpha_2 = \alpha_4.$

ЗАМЕЧАНИЕ. Таким образом, функция $F(t) = 2A_1A_2B_2 - B_1(B_2^2 - A_2^2)$ является интегралом системы (2).

ЛЕММА 9. Траектория системы (6), определенная начальной точкой $S_0 = (\mu, \lambda, 0, \lambda)$, $\lambda, \mu > 0$, $2\lambda^2 + \mu^2 = 1$, стремится при $u \rightarrow \infty$ к стационарной точке

$$S_\infty = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначения для следующих точек в S^3 :

$$O = (0, 0, 1, 0), \quad A = (0, 0, 0, 1), \quad B = (1, 0, 0, 0), \quad C = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Рассмотрим область $\Pi \subset S^3$, определенную неравенствами

$$\Pi: \quad \alpha_4 \geq \alpha_2 \geq 0, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_3 \geq 0.$$

Нетрудно убедиться, что область Π является сферической пирамидой $(OABC)$. Границами области служат следующие множества:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= (OAB) = \{\alpha_2 = 0, \alpha_4 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \alpha_3 \geq 0\}, \\ \Pi_2 &= (OBC) = \{\alpha_4 = \alpha_2, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \alpha_3 \geq 0\}, \\ \Pi_3 &= (OAC) = \{\alpha_4 \geq \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 = 0, \alpha_3 \geq 0\}, \\ \Pi_4 &= (ABC) = \{\alpha_4 \geq \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \alpha_3 = 0\}. \end{aligned}$$

Начальная точка $S_0 = (\mu, \lambda, 0, \lambda) \in (BC)$. Согласно лемме 4 при всех малых $u > 0$ траектория системы (6), определенная начальной точкой S_0 , находится внутри области Π .

Рассмотрим сначала возможность достижения траекторией границы области Π за конечное время. На $\Pi_1 \setminus ((AB) \cup (OB))$ интеграл $F(t) = -\alpha_3 \alpha_4^2 f(t)^3$ строго отрицателен, а в начальной точке $F(S_0) = 2\lambda^2 \mu > 0$, значит, траектория не может пересечь некоторую окрестность этой стенки, за исключением, возможно, дуг (AB) и (OB) . Далее, на Π_2 мы имеем

$$\frac{d(\alpha_4 - \alpha_2)}{du} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} > 0$$

при $\alpha_1 \neq 0$, т.е. траектория не может пересечь некоторую окрестность множества Π_2 за конечное время или даже подойти к ней достаточно близко, за исключением дуги (OC) . Заметим, что это соображение заодно исключает окрестность дуги (OB) . Наконец, на множестве Π_4 производная функции $\alpha_3(t)$ строго положительна и отграничена от нуля, поэтому траектория не пересекает Π_4 и некоторую ее окрестность (заметим, что тем самым мы исключили и остававшуюся возможность приближения к дуге (AB)). Поскольку Π_3 является инвариантным подмножеством системы (6), траектория не может пересечь Π_3 за конечное время (в том числе дугу (OC)).

Определим функцию F_1 на S^3 :

$$F_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4}{F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)}.$$

Поскольку $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = f(t)^{-3} F(S_0) > 0$, из соотношения 2) леммы 8 вытекает, что функция F_1 строго возрастает вдоль траекторий системы (2), идущих внутри области Π . Допустим, что C – предельное множество рассматриваемой траектории. Тогда в C могут попасть: либо стационарные и условно стационарные точки системы (6) (т.е. в соответствии с леммами 5 и 6 мы имеем только две такие возможности: точки S_∞ и $S_1 = (1/2\sqrt{2}, 1/2\sqrt{2}, \sqrt{3}/2\sqrt{2}, \sqrt{3}/2\sqrt{2})$); либо точки, лежащие на критическом уровне функции F_1 (ясно, что внутри Π таких точек нет, поскольку в окрестности каждой внутренней в Π точки из C можно отграничить от нуля производную $F_1(u)$); наконец, все точки C , лежащие на границе Π , должны находиться на максимальном уровне функции F_1 . Рассмотрим функцию

$$F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \ln \frac{\alpha_3(\alpha_4^2 - \alpha_2^2)}{\alpha_4 \alpha_2 \alpha_1}.$$

Тогда из соотношения 3) леммы 8 следует, что F_2 возрастает вдоль траектории, и, значит, множество $C \cap \partial\Pi$ лежит на максимальном уровне F_2 в Π . Заметим, что максимальным (в Π) уровнем функции F_2 служит множество $\Pi_3 \cup \Pi_1$. Выше было показано, что нельзя приблизиться к окрестности $\Pi_1 \setminus (OA)$; следовательно, возможен только случай $C \cap \partial\Pi \subset \Pi_3$.

Далее, из соотношения 4) леммы 8 следует, что функция $F_3 = \ln(\alpha_2/\alpha_4)$ возрастает вдоль траектории (для достаточно больших u) к максимальному значению на Π_3 , которое достигается при $\alpha_2 = \alpha_4$. Итак, наша траектория стремится при $u \rightarrow \infty$ к инвариантному одномерному множеству $\Pi_3 \cap \Pi_2 = (OC)$. Соотношение 5) леммы 8 показывает, что в окрестности (OC) функция $F_4 = \alpha_3/\alpha_4$ возрастает при $F_4 \leq 2/\sqrt{3}$ и убывает при $F_4 \geq 2/\sqrt{3}$; следовательно, $C \cap \partial\Pi$ может содержать только точку S_∞ , определяемую условием $F_4 = 2/\sqrt{3}$.

Итак, мы пришли к выводу, что рассматриваемая траектория сходится либо к S_1 , либо к S_∞ . Для завершения доказательства теоремы нам осталось показать, что сходимости к S_1 не имеет места.

Прямое вычисление показывает, что линеаризация системы (6) в окрестности стационарной точки S_1 имеет три собственных числа кратности один:

$$\lambda_1 = -2\sqrt{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{7}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{290}, \quad \lambda_3 = -\frac{7}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}\sqrt{290}.$$

Таким образом, в окрестности точки S_1 существует (локально определенная) поверхность, заметаемая траекториями, входящими в точку S_1 , причем эта поверхность в точке S_1 касается двумерной плоскости, натянутой на первые два собственных вектора e_1 и e_2 . Остальные траектории в окрестности S_1 выходят из S_1 . При этом первый собственный вектор имеет координаты (в $\mathbb{R}^4$): $e_1 = (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1, 1)$ и является касательным к траектории, которая задается как $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_3 = \alpha_4$. Нетрудно увидеть, что собственному числу λ_1 отвечают в точности решения (4) и (5) (обе траектории входят в точку S_1 с противоположных сторон; траектория (4) отвечает $F < 0$, траектория (5) — $F > 0$). Поскольку $|\lambda_2| > |\lambda_1|$, остальные входящие в S_1 траектории (кроме одной) касаются в точке S_1 траектории (5) или (6). Упомянутая нами единственная не касательная к (5), (6) траектория отвечает собственному числу λ_2 , и непосредственно проверяется, что она лежит на инвариантной поверхности $F = 0$ и, следовательно, не может совпадать с нашей траекторией.

Рассмотрим пару функций: $G_1 = \alpha_2\alpha_4 - \alpha_1\alpha_3$ и $G_2 = \alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3$. Начальная точка S_0 находится в области $\{G_1 > 0, G_2 > 0\}$, точка S_1 лежит в $\{G_1 = 0, G_2 = 0\}$. Непосредственное вычисление показывает, что вектор e_2 направлен внутрь области $\{G_1 > 0, G_2 > 0\}$ либо $\{G_1 < 0, G_2 < 0\}$ (область зависит от выбора направления e_2 ; мы не приводим здесь явные координаты e_2 , чтобы избежать громоздких формул). Легко проверить, что

$$\frac{d}{du} G_1 = -\frac{2}{\alpha_2} G_2,$$

в точках, где $G_1 = 0$, и

$$\frac{d}{du} G_2 = -\frac{2}{\alpha_2} G_1$$

в тех точках, где $G_2 = 0$. Значит, траектория может достичь точки S_1 только находясь в области $\{G_1 > 0, G_2 > 0\}$; если она перейдет в одну из областей $\{G_1 > 0, G_2 < 0\}$ либо $\{G_1 < 0, G_2 > 0\}$, то уже не сможет из них выйти (отметим, что S_∞ лежит в $\{G_1 > 0, G_2 < 0\}$). В том числе это соображение определяет направление вектора e_2 — он направлен внутрь области $\{G_1 > 0, G_2 > 0\}$.

Теперь, рассмотрим функцию $F_5 = \alpha_4^2 - \alpha_3^2$. Очевидно, что $F_5(S_0) = \lambda^2 > 0$, $F_5(S_1) = 0$. Далее,

$$\frac{d}{du} F_5 = \frac{G_2}{2\alpha_1\alpha_4}$$

в тех точках, где $F_5 = 0$. Таким образом, на поверхности уровня $\{F_5 = 0\}$ производная функции вдоль траектории неотрицательна и обращается в нуль в точности в точках, в которых $\alpha_1 = \alpha_2$ и $\alpha_3 = \alpha_4$. Поскольку эти точки принадлежат траектории решения (5), рассматриваемая траектория не может выйти за пределы области $\{F_5 > 0\}$. Непосредственное вычисление показывает, что вектор e_2 (по которому

приходят траектории к точке S_1) направлен внутрь области $\{F_5 < 0\}$. Таким образом, находясь в области $\{G_1 > 0, G_2 > 0\}$, траектория не может подойти к S_1 . Остается одна возможность: выход в область $\{G_1 > 0, G_2 < 0\}$, где единственной предельной точкой является S_∞ . Лемма доказана.

Основная теорема теперь является непосредственным следствием лемм 4 и 9: начальная точка траектории определяет топологическое строение пространства, на котором определена наша метрика, группа голономии которой очевидно совпадает со всем G_2 . Предельная точка S_∞ означает, что функция B_1 аппроксимируется на бесконечности константой, а остальные функции, определяющие метрику, — линейными непостоянными функциями, что дает на бесконечности произведение S^1 и конуса над $S^2 \times S^3$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Я. В. Базайкин, “О новых примерах полных некомпактных метрик с группой голономии $\text{Spin}(7)$ ”, *Сиб. матем. журн.*, **48**:1 (2007), 11–32.
- [2] Я. В. Базайкин, “Некомпактные римановы пространства с группой голономии $\text{Spin}(7)$ и 3-сасакиевы многообразия”, *Геометрия, топология и математическая физика. I*, Сб. статей. К 70-летию со дня рождения академика Сергея Петровича Новикова, Тр. МИАН, **263**, МАИК, М., 2008, 6–17.
- [3] Я. В. Базайкин, Е. Г. Малькович, “ $\text{Spin}(7)$ -структуры на комплексных линейных расслоениях и явные римановы метрики с группой голономии $\text{SU}(4)$ ”, *Матем. сб.*, **202**:4 (2011), 3–30.
- [4] Е. Г. Малькович, “О новых явных римановых метриках с группой голономии $\text{SU}(2(n+1))$ ”, *Сиб. матем. журн.*, **52**:1 (2011), 95–99.
- [5] A. Brandhuber, J. Gomis, S. S. Gubser, S. Gukov, “Gauge theory at large N and new G_2 holonomy metrics”, *Nuclear Phys. B*, **611**:1-3 (2001), 179–204, arXiv: hep-th/0106034v2.
- [6] M. Cvetič, G. W. Gibbons, H. Lü, C. N. Pope, “Cohomogeneity one manifolds of $\text{Spin}(7)$ and G_2 holonomy”, *Phys. Rev. D* (3), **65**:10 (2002), 106004, arXiv: hep-th/0108245v2.
- [7] M. Cvetič, G. W. Gibbons, H. Lü, C. N. Pope, “Orientifolds and slumps in G_2 and $\text{Spin}(7)$ metrics”, *Ann. Phys.*, **310**:2 (2004), 265–301, arXiv: hep-th/0111096v2.
- [8] A. Brandhuber, “ G_2 holonomy spaces from invariant three-forms”, *Nuclear Phys. B*, **629**:1-3 (2002), 393–416, arXiv: hep-th/0112113v2.
- [9] M. Cvetič, G. W. Gibbons, H. Lü, C. N. Pope, “A G_2 unification of the deformed and resolved conifolds”, *Phys. Lett. B*, **534**:1-4 (2002), 172–180, arXiv: hep-th/0112138v3.
- [10] Z. W. Chong, M. Cvetič, G. W. Gibbons, H. Lü, C. N. Pope, P. Wagner, “General metrics of G_2 holonomy and contraction limits”, *Nuclear Phys. B*, **638**:3 (2002), 459–482, arXiv: hep-th/0204064v1.
- [11] R. L. Bryant, S. M. Salamon, “On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy”, *Duke Math. J.*, **58**:3 (1989), 829–850.
- [12] G. W. Gibbons, D. N. Page, C. N. Pope, “Einstein Metrics on S^3 , $\mathbb{R}^3$, and $\mathbb{R}^4$ bundles”, *Comm. Math. Phys.*, **127**:3 (1990), 529–553.

Я. В. Базайкин

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск
E-mail: bazaikin@math.nsc.ru

Поступило

08.06.2012

Исправленный вариант

26.06.2012

О. А. Богоявленская

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск