Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. М. Пенкин, Е. М. Богатов, О слабой разрешимости задачи Дирихле на стратифицированных множествах, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 6, 874–886

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1011>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 14:11:41

УДК 517.956.2

О СЛАБОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ НА СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ МНОЖЕСТВАХ

О. М. Пенкин, Е. М. Богатов

На множествах, составленных из многообразий различных размерностей, правильно примыкающих друг к другу (стратифицированных множествах), ставится задача Дирихле для оператора, аналогичного оператору Лапласа–Бельтрами. Специальный понятийный аппарат позволяет доказать аналоги интегральных тождеств Грина и неравенства Пуанкаре для пространств соболевского типа. Слабая разрешимость задачи Дирихле доказывается на основе теоремы Рисса о представлении. Аналогичным образом устанавливается слабая разрешимость задачи Дирихле для аналога бигармонического оператора на стратифицированных множествах.

Библиография: 12 названий.

Изучение статики и динамики механических систем, составленных из элементов разных размерностей, приводит к необходимости рассматривать весьма сложные наборы дифференциальных соотношений, каждое из которых описывает поведение отдельного элемента. В числе первых работ (близких по тематике к данной) отметим [1]–[3]. Обычно такие наборы трактуются как одно операторное уравнение, определенное на произведении пространств. Детально такой подход описан, например, в [4] (в контексте струнно-мембранных систем) и в [5] (в контексте гидродинамики).

В данной работе мы придерживаемся иной методики. Она основана на интерпретации всей совокупности соотношений в виде единого дифференциального оператора, который в случае задачи о деформациях струнно-мембранных систем описывается точным аналогом оператора Лапласа в дивергентной форме (дивергенция понимается нами как плотность потока векторного поля по специальной мере). Следует отметить, что идея рассматривать дивергенцию и пространства Соболева по мере не нова, и представляется странным, что к рассматриваемому классу задач она стала применяться совсем недавно. Для периодических задач такой подход был применен в [6] в контексте метода усреднения.

В несколько формальном виде данная методика представлена в работах [7], [8]. В более поздних работах [9], [10] она изложена уже в “почти классических” терминах.

Данная работа посвящена доказательству слабой разрешимости эллиптических краевых задач второго и четвертого порядка на стратифицированных множествах (последний термин формализует упомянутые выше системы составного типа). Для уравнений второго порядка результаты были анонсированы в [11].

1. Модельный пример. Прежде чем перейти к строгим определениям, разберем пример задачи, приводящей к эллиптическим уравнениям на стратифицированных множествах. Этот пример будет использоваться нами и далее для иллюстрации вводимых понятий. Рассмотрим на плоскости натянутую механическую систему Ω , изображенную на рис. 1.

Рис. 1

Здесь γ_i – струны, на $\gamma_5, \dots, \gamma_8$ натянута мембрана Q , a_i ($i = \overline{1, 4}$) – точки закрепления Ω . Деформации этой системы под воздействием малой поперечной силы f на отрезках $\gamma_1, \dots, \gamma_4$ описываются уравнениями

$$-u'' = f. \quad (\text{I})$$

На участках $\gamma_5, \dots, \gamma_8$ уравнения деформаций выглядят так:

$$-u''_\tau - u'_\nu = f, \quad (\text{II})$$

где ν – внутренняя по отношению к четырехугольнику Q нормаль, τ – направление “вдоль струны”. Во внутренних точках Q деформация описывается уравнением Пуассона

$$-\Delta u = f, \quad (\text{III})$$

где через Δ , как обычно, обозначен оператор Лапласа. Наконец, в местах стыковки струн – точках a_i ($i = \overline{5, 8}$) – мы имеем уравнения

$$-\sum \frac{\partial u}{\partial \nu} = f. \quad (\text{IV})$$

В последнем равенстве суммирование происходит по примыкающим струнам; направление нормалей указано на рисунке для точки a_5 . Условия закрепления приводят к равенствам $u(a_i) = 0$ ($i = \overline{1, 4}$), являющимися аналогами условий Дирихле.

Как видим, получается довольно разнородный набор уравнений, с которым не очень удобно работать. Однако за этим набором “стоит” единое эллиптическое уравнение дивергентного типа. Ближайшие пункты посвящены обсуждению этого в самой общей ситуации.

2. Основные обозначения. Здесь мы дадим несколько более точное по сравнению с [9]–[11] определение стратифицированного множества.

Стратификация на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – это набор замкнутых множеств

$$\Omega^{k_0} \subset \Omega^{k_1} \subset \dots \subset \Omega^{k_p} = \Omega, \quad 0 \leq k_0 < k_1 < \dots < k_p,$$

такой, что выполняются следующие условия:

- а) множество $\Omega^{k_i} \setminus \Omega^{k_{i-1}}$ – гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^n$ размерности k_i ; его связные компоненты называются *стратами размерности k_i* ;
- б) граница $\partial\sigma_{k_i} = \overline{\sigma}_{k_i} \setminus \sigma_{k_i}$ любого страта ненулевой размерности является объединением стратов меньшей (чем k) размерности;
- в) если страт σ_{k_i} примыкает к $\sigma_{k+1,j}$ и $x \in \sigma_{k_i}$, а $y \in \sigma_{k+1,j}$ приближается к x по некоторой непрерывной кривой, расположенной в $\sigma_{k+1,j}$, то касательная плоскость $T_y(\sigma_{k+1,j})$ (обычная $(k+1)$ -мерная плоскость в $\mathbb{R}^n$, касающаяся $\sigma_{k+1,j}$ в точке y) имеет предельное положение $\lim_{y \rightarrow x} T_y(\sigma_{k+1,j})$, содержащее $T_x(\sigma_{k_i})$.

В нашем примере стратификация такова: $\Omega^0 \subset \Omega^1 \subset \Omega^2 = \Omega$, где Ω^0 – множество точек $\{a_i\}_{i=1}^8$, Ω^1 получается из Ω^0 добавлением γ_i ($i = \overline{1, 8}$), а Ω^2 – добавлением внутренности четырехугольника Q к Ω^1 .

В дальнейшем запись вида $\sigma_{k_i} \prec \sigma_{m_j}$ означает примыкание страта σ_{k_i} к σ_{m_j} , т.е. то обстоятельство, что $\sigma_{k_i} \subset \overline{\sigma}_{m_j}$ и $k < m$. Далее предполагается, что в Ω конечное число стратов и все они имеют компактные замыкания. Множество Ω считается связным. Вместе с Ω мы фиксируем связное открытое (в топологии, индуцированной на Ω из $\mathbb{R}^n$) подмножество $\Omega_0 \subset \Omega$, составленное из стратов и такое, что $\overline{\Omega}_0 = \Omega$. Положим $\partial\Omega_0 = \Omega \setminus \Omega_0$. Для нашего примера возможно в качестве $\partial\Omega_0$ взять множество $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ или любое его подмножество.

На множестве Ω_0 далее будут рассматриваться уравнения, а на $\partial\Omega_0$ будут задаваться условия Дирихле.

Пусть $\sigma_{k_i} \prec \sigma_{k+1,j}$ и $x \in \sigma_{k_i}$. Если σ_{k_i} примыкает более чем к двум $(k+1)$ -мерным клеткам, то ни в какой окрестности x нельзя задать даже локальные координаты. Поэтому координаты мы будем задавать по отдельности для каждой пары $\sigma_{k_i}, \sigma_{k+1,j} \succ \sigma_{k_i}$, задавая сначала координаты $y^1, \dots, y^k$ на σ_{k_i} , а затем дополняя их координатой y^{k+1} , своей для каждого $\sigma_{k+1,j}$. Эти координаты мы будем называть *правильными*, если $y^{k+1} \equiv 0$ на σ_{k_i} и $y^{k+1} > 0$ на $\sigma_{k+1,j}$.

2.1. Мера и интеграл на Ω_0 . Если сужение функции $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ на каждый страт является равномерно непрерывной функцией (не являясь, вообще говоря, непрерывной в целом на Ω), то будем называть ее *постратно непрерывной*. Множество таких функций обозначим $\overline{C}_\sigma(\Omega_0)$. Для функций из $\overline{C}_\sigma(\Omega_0)$ определим интеграл по формуле

$$\int_{\Omega_0} f d\mu = \sum_{\sigma_{k_i} \subset \Omega_0} \int_{\sigma_{k_i}} f d\mu, \quad (1)$$

где в правой части стоят обычные интегралы Римана по стандартной мере на каждом страте, т.е. на k -мерном страте σ_{ki} мера – это k -мерный объем. При $k = 0$ под интегралом от f по σ_{k0} мы понимаем $f(x)$, где x – единственная точка страта σ_{k0} ($\sigma_{k0} = \{x\}$). Как подмножество $\mathbb{R}^n$ страт σ_{ki} наследует его метрику, становясь, тем самым, римановым многообразием. Зафиксировав в σ_{ki} локальные координаты $y^1, \dots, y^k$ и обозначив через g_{ij} компоненты римановой метрики в этих координатах, имеем (для малых параллелепипедов ω со сторонами $dy^1, \dots, dy^k$)

$$\mu(\omega) = \sqrt{g} dy^1 \dots dy^k, \quad (2)$$

где g – определитель матрицы (g_{ij}) . Функции из $\overline{C}_\sigma(\Omega_0)$ обязательно ограничены на Ω_0 , что следует из компактности замыканий стратов и конечности их числа, а потому интеграл (1) существует для любой $f \in \overline{C}_\sigma(\Omega_0)$. Формулой

$$\langle f, g \rangle_\mu = \int_{\Omega_0} fg d\mu \quad (3)$$

задается скалярное произведение на $\overline{C}_\sigma(\Omega_0)$. Определяемая им норма обозначается через $\|\cdot\|_\mu$. Теперь мы можем ввести новое пространство $L^2_\mu(\Omega_0)$ – пополнение $\overline{C}_\sigma(\Omega_0)$ по норме $\|\cdot\|_\mu$.

Определение интеграла формулой (1) выглядит несколько необычно. Тем не менее, оказывается, что он является интегралом Лебега–Стилтьеса по мере μ на Ω_0 , определяемой так: множество $G \subset \Omega_0$ называется *измеримым*, если измеримы по Лебегу все пересечения $G \cap \sigma_{ki}$ ($\sigma_{ki} \subset \Omega_0$). При этом мера $\mu(G)$ полагается равной сумме мер Лебега $\mu(G \cap \sigma_{ki})$, т.е. с учетом (2)

$$\mu(\omega) = \sum \int_{\sigma_{ki} \cap G} \sqrt{g} dy^1 \dots dy^k. \quad (4)$$

Такую меру естественно называть *мерой Лебега–Стилтьеса* (сужение ее на 0-мерные страты – это сосредоточенная мера единичной массы).

2.2. Дивергенция и оператор Лапласа–Бельтрамина Ω_0 . Здесь нам потребуется еще пространство $C^m_\sigma(\Omega_0)$ – множество функций, имеющих непрерывные производные m -го порядка по локальным координатам в каждом σ_{ki} , допускающие продолжение по непрерывности в точки стратов $\sigma_{k-1,j} \not\subset \partial\Omega_0$, примыкающих к σ_{ki} . Мы допускаем, тем самым, “порчу” функций из $C^m_\sigma(\Omega_0)$ на границе, приспособивая это пространство к рассмотрению задачи Дирихле.

Пусть $\vec{F}$ – векторное поле на Ω_0 ; включения типа $\vec{F} \in C^m_\sigma(\Omega_0)$ имеют для нас поординатный смысл. Векторное поле $\vec{F}$ будем называть *касательным* к Ω_0 , если для любого $x \in \Omega_0$ вектор $\vec{F}(x)$ касается страта σ_{ki} , содержащего x , в этой точке, т.е. $\vec{F}(x) \in T_x\sigma_{ki}$ (в нульмерных стратах $\vec{F}$ всегда считается нулевым). В дальнейшем по повторяющимся греческим индексам предполагается суммирование, суммирование по иным индексам всегда будет указываться явно.

Далее запись $f|_{ki}$ означает сужение функции f на σ_{ki} , а для $f \in C_\sigma(\Omega_0)$ запись $f|_{\overline{ki}}$ означает продолжение по непрерывности функции $f|_{ki}$ на замыкание σ_{ki} . Для непрерывных f функция $f|_{\overline{ki}}$ совпадает с сужением f на $\overline{\sigma_{ki}}$.

Пусть $\vec{F} \in C^1_\sigma(\Omega_0)$ – касательное векторное поле на Ω_0 и $x \in \sigma_{k-1,i}$. Дивергенция $\vec{F}$ в точке x определяется формулой

$$(\nabla \vec{F})(x) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} (\sqrt{g} g^{\alpha\beta} F_\beta)(x) + \sum_{\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1,i}} \frac{1}{\sqrt{g^{kk}}} g^{k\gamma} F_\gamma|_{\overline{kj}}(x). \quad (5)$$

Здесь $g^{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta \leq k-1$) – контравариантные компоненты римановой метрики. Индекс γ меняется от 1 до k . Сумма в (5) состоит из двух частей, первая из которых – классическая $(k-1)$ -мерная дивергенция поля $\vec{F}$ на $\sigma_{k-1,i}$; будем обозначать ее $\nabla_{k-1} \vec{F}$. Каждое слагаемое второй суммы является проекцией $\vec{F}|_{\overline{kj}}(x)$ на направление внутренней по отношению к σ_{kj} нормали к $\sigma_{k-1,i}$ в точке x . Нормаль к $(k-1)$ -мерному страту, направленная в k -мерный страт, выражается через риманову метрику следующим образом:

$$\vec{\nu} = \frac{g^{k\alpha}}{\sqrt{g^{kk}}} \vec{r}_{y^\alpha}, \quad \alpha \leq k.$$

Следовательно, (5) можно переписать в виде

$$(\nabla \vec{F})(x) = (\nabla_{k-1} \vec{F})(x) + \sum_{\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1,i}} (\vec{F} \cdot \vec{\nu})|_{\overline{kj}}(x). \quad (6)$$

Если примыкание $\sigma_{k-1,i}$ к σ_{kj} кратное, то страт σ_{kj} участвует в сумме (5) дважды. Отметим, что дивергенция в нульмерном страте совсем не содержит дифференцирований; естественно считать $\nabla_0 \vec{F} = 0$, поэтому $\nabla \vec{F}$ сводится в данном случае ко второму слагаемому в (6).

Взяв в качестве F_α компоненты градиента функции $u \in C^2_\sigma(\Omega_0)$ (в силу соответствующего соглашения об $\vec{F}$ в нульмерных стратах нульмерный градиент считается нулевым), получаем аналог оператора Лапласа–Бельтрами на Ω_0 ; в точке $x \in \sigma_{k-1,i}$ он имеет вид

$$(\Delta u)(x) = (\Delta_{k-1} u)(x) + (\nabla u)_{\vec{\nu}}(x),$$

где Δ_{k-1} – классический $(k-1)$ -мерный оператор Лапласа–Бельтрами

$$(\Delta_{k-1} u)(x) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \left(\sqrt{g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial y^\beta} \right)(x),$$

а

$$(\nabla u)_{\vec{\nu}}(x) = \sum_{\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1,i}} (\nabla u \cdot \vec{\nu})|_{\overline{kj}}(x) = \sum_{\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1,i}} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\overline{kj}} \right)(x).$$

Если $x \in \sigma_{1i} = \gamma_i$ ($i = \overline{5,8}$) на рис. 1, то $(\Delta_{k-1} u)(x) = u''_\tau(x)$, а $(\nabla u)_{\vec{\nu}}(x) = u'_\nu(x)$. Тем самым, уравнение (II) имеет вид $-\Delta u = f$. Подобным образом можно убедиться, что и уравнения (I), (IV) записываются в таком же виде. Лапласиан в уравнении (III), очевидно, совпадает с “новым” лапласианом.

Наряду с Δ мы будем рассматривать оператор $\Delta_p = \nabla(p \nabla)$ при $p \in C^1_\sigma(\Omega_0)$, т.е.

$$(\Delta_p u)(x) = \nabla_{k-1}(p \nabla u)(x) + (p \nabla u)_{\vec{\nu}}(x),$$

где

$$(p \nabla u)_{\vec{\nu}}(x) = \sum_{\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1,i}} \left(p \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\overline{kj}} \right)(x).$$

Заметим, что значок ∇ теперь несет двойную нагрузку. Для векторных полей – это дивергенция, для скалярнозначных функций (скалярных полей) – это градиент.

Основной интерес для нас представляет оператор $L_q u = \Delta_p u - qu$, где $q \in \overline{C}_\sigma(\Omega_0)$, а p – строго положительная на Ω_0 функция.

3. Вспомогательные аналитические приемы. Через $\overline{C}_\sigma^m(\Omega_0)$ будем обозначать множество функций из $C_\sigma^m(\Omega_0)$, производные которых допускают продолжение по непрерывности и в точки из $\partial\Omega_0$.

Всюду далее замыкания стратов считаются ориентируемыми многообразиями, допускающими введение глобальных координат.

Нам потребуются следующие факты.

ТЕОРЕМА 1 (формула Остроградского–Гаусса). Пусть $\vec{F} \in \overline{C}_\sigma^1(\Omega_0)$. Тогда

$$\int_{\Omega_0} \nabla \vec{F} d\mu = - \int_{\partial\Omega_0} \vec{F}_{\vec{\nu}} d\mu, \quad \partial\Omega_0 \neq \emptyset, \quad (7)$$

где $\vec{F}_{\vec{\nu}}$ на $\partial\Omega_0$ определяется следующим образом:

$$\vec{F}_{\vec{\nu}}(x) = \sum (\vec{F} \cdot \vec{\nu})|_{\overline{kj}}(x), \quad x \in \sigma_{k-1,i},$$

суммирование проводится по всем j таким, что $\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1,i}$ и $\sigma_{kj} \not\subset \partial\Omega_0$.

Обозначим через $C(\Omega_0)$ множество непрерывных на Ω_0 функций и положим $C^m(\Omega_0) = C_\sigma^m(\Omega_0) \cap C(\Omega_0)$.

Из (7) вытекает аналог первой формулы Грина.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $u \in \overline{C}_\sigma^2(\Omega_0)$, $v \in \overline{C}_\sigma^1(\Omega_0)$. Тогда выполняется соотношение

$$\int_{\Omega_0} v \Delta_q u d\mu = - \int_{\Omega_0} q \nabla v \nabla u d\mu - \int_{\partial\Omega_0} v (q \nabla u)_{\vec{\nu}} d\mu.$$

Из теоремы 2 немедленно следует аналог второй формулы Грина.

ТЕОРЕМА 3. Если $u, v \in \overline{C}_\sigma^2(\Omega_0)$, то выполняется соотношение

$$\int_{\Omega_0} (v L_q u - u L_q v) d\mu = \int_{\partial\Omega_0} (u (q \nabla v)_{\vec{\nu}} - v (q \nabla u)_{\vec{\nu}}) d\mu.$$

Теоремы 1 и 2 вместе с доказательствами можно найти, например, в [9]. В следующем пункте нам понадобится известный, по-видимому, факт (см. следующую лемму), однако нам не удалось найти его в литературе. В силу этого мы приводим его с доказательством.

ЛЕММА 1. Пусть $G \in \mathbb{R}^k$ – область с кусочно-гладкой границей ∂G , ограниченная поверхностями $y = \psi(x)$, $y = \varphi(x)$ ($x \in \mathbb{R}^{k-1}$, $y \in \mathbb{R}^1$), где $\psi(x) \geq \varphi(x)$. Тогда существует положительная константа $\overline{C}$ такая, что

$$\int_G u^2 dV \leq \overline{C} \left(\int_{\partial G} u^2 dS + \int_G (\nabla u)^2 dV \right), \quad (8)$$

где dV – элемент объема, а dS – элемент площади границы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле Ньютона–Лейбница для $(x, y) \in G$ имеем

$$u(x, y) = u(x, \varphi(x)) + \int_{\varphi(x)}^y \frac{\partial u}{\partial y}(x, l) dl.$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат и используя неравенство Шварца, получаем

$$u^2(x, y) \leq 2u^2(x, \varphi(x)) + 2 \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2(x, l) dl.$$

Проинтегрируем теперь получившееся неравенство по y в пределах от $\varphi(x)$ до $\psi(x)$:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} u^2(x, y) dy &\leq 2(\psi(x) - \varphi(x)) u^2(x, \varphi(x)) + 2(\psi(x) - \varphi(x)) \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2(x, l) dl \\ &\leq 2d \cdot u^2(x, \varphi(x)) + d \cdot \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2(x, l) dl, \end{aligned}$$

где d – диаметр области G . Затем, интегрируя последовательно по x^i в пределах от a_i до b_i , получаем

$$\begin{aligned} \int_G u^2(x, y) dy dx &\leq 2d \left(\int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_{k-1}}^{b_{k-1}} u^2(x, \varphi(x)) dx^1 \dots dx^{k-1} + d \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2(x, l) dl dx \right). \end{aligned}$$

Пользуясь далее тем, что

$$dx = dx^1 \dots dx^{k-1} \leq \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x^1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial x^{k-1}} \right)^2} dx^1 \dots dx^{k-1} = dS,$$

закключаем, что

$$\int_G u^2 dV \leq 2d \max\{1, d\} \left(\int_{\partial G} u^2 dS + \int_G (\nabla u)^2 dV \right).$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Эта лемма верна для любых односвязных областей, не обязательно выпуклых, поскольку всегда можно “диффеоморфировать” последние в выпуклые (от диффеоморфизма будет зависеть лишь константа $\bar{C}$ в (8)). Кроме того, в силу аддитивности неравенства по области она верна и для конечносвязных областей. Нужные изменения в доказательстве здесь очевидны.

Положим $\Gamma = \bigcup_i \bar{\sigma}_{1i}$, $\partial\Gamma = \{\sigma_{0k} \in \partial\Omega_0; \sigma_{0k} \prec \sigma_{1i} \in \Gamma\}$. Следующая теорема дает неравенство Пуанкаре (через $\hat{C}^1(\Omega_0)$ обозначены функции, определенные на Ω , обращающиеся в нуль на $\partial\Omega_0$, сужения которых на Ω_0 принадлежат $C^1(\Omega_0)$).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $u \in \hat{C}^1(\Omega_0)$. Тогда существует константа $\hat{C}$ такая, что¹

$$\int_{\Gamma} qu^2 d\mu \leq \hat{C} \int_{\Gamma} pu'^2 d\mu.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим путь в Γ , соединяющий $x \in \Gamma$ с $a \in \partial\Gamma$, и ориентируем его от a к x . Пусть $a_1, a_2, \dots, a_k$ – последовательность 0-мерных стратов, проходящих вдоль пути от a к x . Тогда

$$u(x) = \int_{a_1}^{a_2} u' dl + \dots + \int_{a_{k-1}}^{a_k} u' dl + \int_{a_k}^x u' dl;$$

здесь мы воспользовались непрерывностью u и тем, что $u(a_k) = 0$. Из неравенства Шварца для сумм получаем

$$u^2(x) \leq k \left(\left(\int_{a_1}^{a_2} u' dl \right)^2 + \dots + \left(\int_{a_k}^x u' dl \right)^2 \right).$$

Обозначая через l_0 максимальную из длин 1-мерных стратов в Γ и используя неравенство Шварца для интегралов, получим (с очевидными огрублениями)

$$u^2(x) \leq kl_0 \left(\int_{a_1}^{a_2} u'^2 dl + \dots + \int_{a_k}^{a_{k+1}} u'^2 dl \right),$$

где a_{k+1} является еще одним концом (помимо a_k) 1-мерного страта, содержащего x . Отсюда следует оценка

$$u^2(x) \leq Ml_0 \int_{\Gamma} u'^2 d\mu, \quad (9)$$

где M – число 0-мерных стратов в Γ . Правая часть неравенства (9) не зависит от x , поэтому, в частности,

$$u^2(b) \leq Ml_0 \int_{\Gamma} u'^2 d\mu \quad (10)$$

для любого 0-мерного страта $\{b\}$ из Γ . Интегрируя (9) по каждому 1-мерному страту и суммируя, получим

$$\sum \int_{\sigma_{1i}} u^2(x) dl \leq N M l_0 \int_{\Gamma} u'^2 d\mu,$$

¹Напомним еще раз, что 0-мерный градиент мы считаем нулевым, так что вклад в правую часть неравенства от 0-мерных стратов нулевой.

где через N обозначается число одномерных стратов в Γ . Добавляя к обеим частям последнего выражения неравенство (10), выводим

$$\int_{\Gamma} u^2 d\mu = \sum \int_{\sigma_{1i}} u^2(x) dl + \sum u^2(b) \leq (N + M) M l_0 \int_{\Gamma} u'^2 d\mu = \hat{C} \int_{\Gamma} u'^2 d\mu.$$

Теорема доказана.

Конечно, огрубления, проведенные в ходе доказательства, слишком сильны и константа в итоговом неравенстве далека от оптимальной. Но для рассмотрения наших вопросов это не имеет значения. Кроме того, в качественном отношении приведенное неравенство “сильнее” неравенства Пуанкаре. В самом деле, в случае, когда Γ состоит из двух отрезков $[a, \xi]$, $[\xi, b]$, наше неравенство дает

$$\int_{\Gamma} u^2 d\mu = \int_a^b u^2 dl + u^2(\xi) \leq \hat{C} \int_a^b u'^2 dl,$$

в то время как обычное неравенство Пуанкаре выглядит так:

$$\int_a^b u^2 dl \leq \hat{C} \int_a^b u'^2 dl.$$

4. Задача Дирихле. Нас будет интересовать краевая задача

$$L_q u = f, \quad u|_{\partial\Omega_0} = 0 \quad (11)$$

с квадратично-суммируемыми на замыкании каждого страта коэффициентами p, q и правой частью f . При этом q предполагается неотрицательной.

Слабым решением задачи (11), как обычно, будем называть функции из пространства $\dot{H}^1(\Omega_0)$ (см. ниже), удовлетворяющие для любой $\varphi \in \dot{H}^1(\Omega_0)$ тождеству

$$- \int_{\Omega_0} (p \nabla u \nabla \varphi + q u \varphi) d\mu = \int_{\Omega_0} f \varphi d\mu. \quad (12)$$

Разумеется, под ∇u понимается слабый градиент.

Пространство $\dot{H}^1(\Omega_0)$ получается пополнением $\dot{C}^1(\Omega_0)$ по норме

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}, \quad (13)$$

порожденной скалярным произведением

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega_0} (p \nabla u \nabla v + q u v) d\mu.$$

Рассмотрим аддитивный, однородный функционал

$$\Phi_f(\phi) = \int_{\Omega_0} f \phi d\mu, \quad \phi \in \dot{C}^1(\Omega_0).$$

ЛЕММА 2. Функционал Φ_f непрерывен на $\dot{C}^1(\Omega_0)$ по норме (13).

Для доказательства этой леммы нам потребуется аналог неравенства Пуанкаре, а именно

ЛЕММА 3. Для любой функции $u \in \dot{C}^1(\Omega_0)$ выполняется соотношение

$$\int_{\Omega_0} u^2(x) d\mu \leq C \int_{\Omega_0} p(\nabla u)^2(x) d\mu$$

с не зависящей от u константой C .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу замечания к лемме 1 имеем (применяя его к каждому страту)

$$\int_{\sigma_{kj}} u^2 d\mu \leq C_{kj} \left(\sum_{\sigma_{k-1,j} \prec \sigma_{kj}} \int_{\sigma_{k-1,i}} u^2 d\mu + \int_{\sigma_{kj}} (\nabla u)^2 d\mu \right). \quad (14)$$

Поскольку $u|_{\partial\Omega_0} = 0$, интегралы по $(k-1)$ -мерным стратам, входящим в $\partial\Omega_0$, обращаются в нуль. К остальным же $(k-1)$ -мерным стратам вновь применим упомянутое замечание. Для каждого из них получим неравенство типа (14) со своими константами. Обозначая через C_{kj}^1 наибольшую из них и подставляя эти неравенства в правую часть (14), будем иметь

$$\int_{\sigma_{kj}} u^2 d\mu \leq C_{kj} \left(C_{kj}^1 \sum \sum \int_{\sigma_{k-2,j_2}} u^2 d\mu + C_{kj}^1 \sum \int_{\sigma_{k-1,j_1}} (\nabla u)^2 d\mu + \int_{\sigma_{kj}} (\nabla u)^2 d\mu \right).$$

Продолжая этот процесс индуктивно вплоть до 1-мерных стратов, получим в итоге неравенство вида

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_{kj}} u^2 d\mu &\leq C_{kj} \left(C_{kj}^{k-1} \dots C_{kj}^1 \sum \dots \sum \int_{\sigma_{1j_{k-1}}} u^2 d\mu \right. \\ &\quad + C_{kj}^{k-2} \dots C_{kj}^1 \sum \dots \sum \int_{\sigma_{2j_{k-2}}} (\nabla u)^2 d\mu + \dots \\ &\quad \left. + C_{kj}^1 \sum \int_{\sigma_{k-1,j_1}} (\nabla u)^2 d\mu + \int_{\sigma_{kj}} (\nabla u)^2 d\mu \right). \end{aligned} \quad (15)$$

В правой части (15) фигурируют интегралы от $(\nabla u)^2$ по всем стратам σ_{mi} ($m \geq 2$), входящим в $\overline{\sigma}_{kj}$, кроме граничных, и интегралы от u^2 по одномерным стратам (одномерному “остову” σ_{kj}), вновь не включенным в $\partial\Omega_0$. Неравенство (15) очевидным образом огрубляется до следующего:

$$\int_{\sigma_{kj}} u^2 d\mu \leq \overline{C}_{kj} \left(\int_{\Gamma} u^2 d\mu + \int_{\Omega_0} (\nabla u)^2 d\mu \right),$$

где

$$\overline{C}_{kj} = C_{kj} \cdot \max \left(\prod_{i=1}^{k-1} C_{kj}^i, \prod_{i=1}^{k-2} C_{kj}^i, \dots, C_{kj}^1 \right).$$

Последнее в силу теоремы 4 оценивается выражением

$$\overline{C}_{kj} \left(\widehat{C} \int_{\Gamma} u^2 d\mu + \int_{\Omega_0} (\nabla u)^2 d\mu \right) \leq \tilde{C}_{kj} \int_{\Omega_0} (\nabla u)^2 d\mu.$$

Суммируя по всем стратам из Ω_0 , заключаем, что

$$\int_{\Omega_0} u^2 d\mu \leq C \int_{\Omega_0} (\nabla u)^2 d\mu.$$

Поскольку

$$\int_{\Omega_0} p(\nabla u)^2 d\mu \geq \alpha \int_{\Omega_0} (\nabla u)^2 d\mu,$$

окончательно имеем

$$\int_{\Omega_0} u^2 d\mu \leq \tilde{C} \int_{\Omega_0} p(\nabla u)^2 d\mu,$$

где константа $\tilde{C} = C/\alpha$ не зависит от функции u .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. В силу неравенства Шварца

$$\begin{aligned} |\Phi_f(\phi)| &\leq \left(\int_{\Omega_0} f^2 d\mu \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_0} \phi^2 d\mu \right)^{1/2} \leq C \left(\int_{\Omega_0} f^2 d\mu \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_0} p(\nabla \phi)^2 d\mu \right)^{1/2} \\ &\leq C \left(\int_{\Omega_0} f^2 d\mu \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_0} [p(\nabla \phi)^2 d\mu + q\phi^2] \right)^{1/2} = \tilde{C} \|\phi\|_{\dot{H}^1(\Omega_0)}. \end{aligned}$$

Второе от начала неравенство обеспечивается леммой 3.

Таким образом, мы доказали ограниченность функционала Φ_f по норме $\dot{H}^1(\Omega_0)$ на множестве функций из $\dot{C}^1(\Omega_0)$, а следовательно, и непрерывность его по этой норме.

Лемма доказана.

Поскольку $\dot{C}^1(\Omega_0)$ плотно в $\dot{H}^1(\Omega_0)$, функционал Φ_f в силу доказанной леммы допускает продолжение до непрерывного функционала $\tilde{\Phi}_f$ в $\dot{H}^1(\Omega_0)$, который по теореме о представлении функционала в гильбертовом пространстве при некотором однозначно определяемом $u \in \dot{H}^1(\Omega_0)$ имеет вид

$$\tilde{\Phi}_f(\psi) = \langle u, \psi \rangle, \quad \psi \in \dot{H}^1(\Omega_0). \quad (16)$$

С другой стороны, имеет место представление

$$\tilde{\Phi}_f = \int_{\Omega_0} f \psi d\mu. \quad (17)$$

Из (16), (17) получаем

$$\langle u, \psi \rangle = \int_{\Omega_0} f \psi d\mu,$$

что эквивалентно равенству (12). Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 5. При перечисленных выше условиях на p, q, f задача (11) имеет единственное слабое решение $u \in \dot{H}^1(\Omega_0)$.

Заметим, что из определения $\dot{H}^1(\Omega_0)$ следует существование последовательности $\{u_j\}$ функций из $\dot{C}^1(\Omega_0)$ такой, что при $j \rightarrow \infty$ $u_j \rightarrow u$ в $\dot{H}^1(\Omega_0)$. Тогда для любой $\psi \in \dot{C}^2(\Omega_0)$ имеем в силу первой и второй формул Грина

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} f \psi \, d\mu &= \langle u, \psi \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle u^j, \psi \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega_0} (p \nabla u^j \nabla \psi + q u^j \psi) \, d\mu \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega_0} \psi L_q u^j \, d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega_0} u^j L_q \psi \, d\mu = \int_{\Omega_0} u L_q \psi \, d\mu, \end{aligned}$$

тем самым, если p слабо дифференцируемо, то u является и обобщенным решением (11).

5. Задача Дирихле для эллиптического оператора четвертого порядка. Как видим, использование дивергенции по мере позволяет в некоторой степени следовать классическому образцу при обсуждении разрешимости задачи Дирихле для уравнения второго порядка. Естественность такого подхода подтверждается еще и тем, что итерация описываемого дифференциального оператора, которую было бы разумным назвать бигармоническим оператором на стратифицированных множествах, возникает (см. [12]) при описании деформации систем, составленных из стержней и пластин. Рассмотрим на $\overline{C}^4(\Omega_0)$ дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}u = (\Delta_p(r\Delta_p) - \Delta_q + k)u,$$

$k(x) \geq 0$ – локально интегрируемая на Ω_0 функция, $r \in \overline{C}_\sigma^2(\Omega_0)$, $q \in C_\sigma^1(\Omega_0)$ строго положительны. Рассмотрим также задачу

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u(x) &= f(x), \quad x \in \Omega_0, \\ u(x) &= \frac{\partial u(x)}{\partial y^\alpha} = 0, \quad x \in \partial\Omega_0, \end{aligned} \quad (18)$$

где $f(x)$ – локально интегрируемая на Ω_0 функция.

Краевой задачей вида (18) описываются, в частности, малые деформации натянутой системы, состоящей из шарнирно сочлененных между собой пластинок и стержней, помещенной на упругое основание. Требование положительности q было введено во избежание эффекта “прощелкивания”.

Слабое решение (18) ищется по той же схеме, что и для оператора второго порядка. При этом скалярное произведение имеет вид

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega_0} (\Delta_p u r \Delta_p v + q \nabla u \nabla v + k u v) \, d\mu, \quad (19)$$

а формулы Грина немного более громоздки.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $w \in \overline{C}_\sigma^4(\Omega_0)$, $v \in \overline{C}^2(\Omega_0)$. Тогда имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} v \mathcal{L}w \, d\mu &= \int_{\Omega_0} (k v w + q \nabla v \nabla w + r \Delta_p v \Delta_p w) \, d\mu + \int_{\partial\Omega_0} v (q \nabla w)_\vec{\nu} \, d\mu \\ &\quad - \int_{\partial\Omega_0} [v (p \nabla (r \Delta_p w))_\vec{\nu} - r \Delta_p w (p \nabla v)_\vec{\nu}] \, d\mu. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 7. Если $u, v \in \overline{C}^4(\Omega_0)$, то

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} (v \mathcal{L} w - w \mathcal{L} v) d\mu &= \int_{\partial\Omega_0} [v(q \nabla w)_{\vec{\nu}} - v(p \nabla(r \Delta_p w))_{\vec{\nu}} + r \Delta_p w (p \nabla v)_{\vec{\nu}}] d\mu \\ &\quad - \int_{\partial\Omega_0} [w(q \nabla v)_{\vec{\nu}} - w(p \nabla(r \Delta_p v))_{\vec{\nu}} + r \Delta_p v (p \nabla w)_{\vec{\nu}}] d\mu. \end{aligned}$$

Аналог неравенства Пуанкаре

$$\int_{\Omega_0} u^2(x) d\mu \leq C \int_{\Omega_0} (\Delta_p u)^2(x) d\mu,$$

получаемый в данном случае итерацией уже доказанного неравенства, позволяет применить теорему о представлении в пространстве $\dot{H}^2(\Omega_0)$, вводящемся пополнением $\dot{C}^2(\Omega_0)$ по норме, порожденной скалярным произведением (19).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Nicaise S. Estimatees du spectre du laplacian sur un reseau topologique fini // C. R. Acad. Sci. 1986. V. 303. P. 343–346.
- [2] Павлов Б.С., Фаддеев М.Д. Модель свободных электронов и задача рассеяния // ТМФ. 1983. Т. 55. №2. С. 257–269.
- [3] Пенкин О.М., Покорный Ю.В., Провоторова Е.Н. Об одной векторной краевой задаче // Сб. “Краевые задачи”. Пермь: Изд-во ППИ, 1983. С. 64–70.
- [4] Ali Mehmeti F. Nonlinear Waves in Networks. Berlin: Academie-Verlag, 1994.
- [5] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуи Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. М.: Наука, 1989.
- [6] Жиков В.В. Связность и усреднение. Примеры фрактальной проводимости // Матем. сб. 1996. Т. 187. №8. С. 3–40.
- [7] Покорный Ю.В., Пенкин О.М. О теоремах сравнения для уравнений на графах // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. №7. С. 1141–1150.
- [8] Пенкин О.М. О принципе максимума для эллиптического уравнения на двумерном клеточном комплексе // Докл. РАН. 1997. Т. 352. №4. С. 462–465.
- [9] Пенкин О.М., Покорный Ю.В. О дифференциальных неравенствах для эллиптических уравнений на сложных многообразиях // Докл. РАН. 1998. Т. 360. №4. С. 456–458.
- [10] Пенкин О.М., Покорный Ю.В. О несовместных неравенствах для эллиптических уравнений на стратифицированных множествах // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. №8. С. 1107–1113.
- [11] Пенкин О.М., Богатов Е.М., Кашкаров Ю.М. О разрешимости эллиптических краевых задач на стратифицированных множествах // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. №9. С. 1289–1290.
- [12] Богатов Е.М. О разрешимости одной задачи линейной теории упругости // Сб. статей аспирантов и студентов математического факультета ВГУ. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1999. С. 9–15.

Воронежский государственный университет
E-mail: bogatov@kma.vsu.ru, embogatov@mail.ru

Поступило
02.11.1998
Исправленный вариант
01.02.2000