Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Устинов, К трехмерной теореме Валена, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 1, 154–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10110>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 16:08:02

К трехмерной теореме Валена

А. В. Устинов

1. Введение. Пусть $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(s)}$ – базисные узлы полной решетки

$$\Gamma = \{m_1\gamma^{(1)} + \dots + m_s\gamma^{(s)} : m_1, \dots, m_s \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^s.$$

Решетка всегда будет считаться решеткой «общего положения»: координатные гиперплоскости не содержат узлов решетки, отличных от начала координат. (Относительно общего случая см. [1].) Обозначим через G_s конечную группу, действующую на $GL_s(\mathbb{R})$, порожденную следующими элементарными преобразованиями: 1) изменение знаков у элементов строки или столбца; 2) перестановка строк или столбцов. Две матрицы назовем *эквивалентными*, если одна может быть получена из другой с помощью некоторого преобразования из G_s .

Предположим, что $\{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}\}$ – базис двумерной решетки Γ , для которого не существует ненулевых узлов $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma$ таких, что

$$|\gamma_1| < \max\{|\gamma_1^{(1)}|, |\gamma_1^{(2)}|\}, \quad |\gamma_2| < \max\{|\gamma_2^{(1)}|, |\gamma_2^{(2)}|\}.$$

Вороной доказал (см. [2]), что это возможно тогда и только тогда, когда для некоторого преобразования $\Phi \in G_2$

$$\Phi \begin{pmatrix} \gamma_1^{(1)} & \gamma_1^{(2)} \\ \gamma_2^{(1)} & \gamma_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad 0 \leq b_1 \leq a_1, \quad 0 \leq a_2 \leq b_2.$$

Базис решетки называется *базисом Вороного*, если соответствующая ему матрица эквивалентна матрице вида $\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$.

В статье [3] отмечено, что теорема Валена о приближении чисел подходящими дробями (см. [4], [5]) в терминах решеток имеет следующую интерпретацию: для любого базиса Вороного $\{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}\}$

$$\min\{|\gamma_1^{(1)}\gamma_2^{(1)}|, |\gamma_1^{(2)}\gamma_2^{(2)}|\} \leq \frac{1}{2} \det \Gamma.$$

В той же статье было предложено уточнение теоремы Валена

$$|\gamma_1^{(1)}\gamma_2^{(1)}| + |\gamma_1^{(2)}\gamma_2^{(2)}| \leq \det \Gamma, \tag{1}$$

следующее из неравенства

$$a_1b_2 + a_2b_1 - a_1a_2 - b_1b_2 = (a_1 - b_1)(b_2 - a_2) \geq 0.$$

В работе [3] Авдеевой и Быковским был доказан аналог неравенства (1) для базисов Минковского (трехмерных аналогов базисов Вороного). Ниже предлагается более простое и короткое доказательство теоремы Авдеевой и Быковского. Кроме того их результат распространяется на произвольные минимальные системы из трех векторов (см. определения ниже).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00628-а), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-1922.2012.1) и фонда «Династия».

DOI: 10.4213/mzm10110

© А. В. Устинов, 2014

2. Минимальные системы и базисы Минковского. Для непустого точечного множества $T \subset \mathbb{R}^3$ положим

$$|T|_i = \max\{|x_i| : x = (x_1, x_2, x_3) \in T\}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\Pi(T) = [-|T|_1, |T|_1] \times [-|T|_2, |T|_2] \times [-|T|_3, |T|_3].$$

Пусть Γ – полная решетка в $\mathbb{R}^3$. Системой узлов порядка t решетки Γ назовем любой конечный набор ненулевых узлов Γ вида $(\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(t)})$, где $\gamma^{(i)} \neq \pm\gamma^{(j)}$, $1 \leq i < j \leq t$. Система S решетки Γ называется *минимальной*, если не существует ненулевых узлов $\gamma \in \Gamma$, лежащих строго внутри $\Pi(S)$.

Минковским доказано (см. [6], [7; статья 109]), что всякая минимальная система из трех векторов $(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)})$ либо вырождена (и тогда для некоторой комбинации знаков $\gamma^{(1)} \pm \gamma^{(2)} \pm \gamma^{(3)} = 0$), либо образует базис решетки (*базис Минковского*). С помощью элементарных преобразований матрица любого базиса Минковского может быть приведена к одной из двух канонических форм (см. [6], [7], а также [8]–[10])

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & -c_1 \\ -a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & -b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ -a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & -b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

с неотрицательными a_i, b_i, c_i , $i = 1, 2, 3$, удовлетворяющими условиям:

- 1) $\max\{b_1, c_1\} \leq a_1$, $\max\{a_2, c_2\} \leq b_2$, $\max\{a_3, b_3\} \leq c_3$;
- 2) для матриц первого типа выполняется по крайней мере одно из неравенств $c_1 \leq b_1$, $a_2 \leq c_2$, $b_3 \leq c_3$;
- 3) для матриц второго типа выполняются неравенство $a_2 + c_2 \geq b_2$ и по крайней мере одно из неравенств $a_3 \leq b_3$, $c_1 \leq b_1$.

При этом за счет переобозначения координат и векторов можно добиться того, чтобы из трех (для матриц первого типа) или двух (для матриц второго типа) альтернативных неравенств выполнялось неравенство $c_1 \leq b_1$.

3. Трехмерная теорема Валена. Предыдущие результаты, связанные с трехмерной теоремой Валена, а также некоторые ее уточнения могут быть найдены в [10]–[12].

ТЕОРЕМА 1 (Авдеева, Быковский, 2006). Пусть узлы $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}$ составляют базис Минковского решетки Γ . Тогда

$$|\gamma_1^{(1)} \gamma_2^{(1)} \gamma_3^{(1)}| + |\gamma_1^{(2)} \gamma_2^{(2)} \gamma_3^{(2)}| + |\gamma_1^{(3)} \gamma_2^{(3)} \gamma_3^{(3)}| \leq \det \Gamma. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для матрицы M , столбцами которой являются векторы $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}$, докажем, что $\Delta(M) \geq 0$, где

$$\Delta(M) = \det M - |\gamma_1^{(1)} \gamma_2^{(1)} \gamma_3^{(1)}| - |\gamma_1^{(2)} \gamma_2^{(2)} \gamma_3^{(2)}| - |\gamma_1^{(3)} \gamma_2^{(3)} \gamma_3^{(3)}|.$$

Под действием преобразований из группы G_3 величина $\Delta(M)$ не меняется. Поэтому оценку $\Delta(M) \geq 0$ достаточно доказать для базисов, матрицы которых имеют вид (2) и удовлетворяют неравенству $c_1 \leq b_1 \leq a_1$.

Так как $b_2 c_3 \geq a_2 a_3$, то коэффициент при a_1 в разложении ($\varepsilon = -1$ для матриц первого типа и $\varepsilon = 1$ для матриц второго типа)

$$\Delta(M) = a_1(b_2 c_3 + c_2 b_3 - a_2 a_3) + b_1(a_2 c_3 + c_2 a_3 - b_2 b_3) + \varepsilon c_1(a_2 b_3 - b_2 a_3) - c_1 c_2 c_3,$$

неотрицателен, поэтому неравенство $\Delta(M) \geq 0$ достаточно проверить при $a_1 = b_1$. В этом случае

$$\Delta(M) = b_1(b_2(c_3 - b_3) + a_2(c_3 - a_3) + c_2(a_3 + b_3)) + \varepsilon c_1(a_2 b_3 - b_2 a_3) - c_1 c_2 c_3,$$

и коэффициент при b_1 неотрицателен. Значит, достаточно ограничиться случаем, когда $a_1 = b_1 = c_1$. Для матриц первого типа ($\varepsilon = -1$) и

$$\Delta(M) = c_1(a_3(b_2 - a_2) + a_2(c_3 - b_3) + (b_2 - c_2)(c_3 - b_3) + a_3c_2) \geq 0,$$

поскольку все слагаемые неотрицательны. Для матриц второго типа ($\varepsilon = 1$) и

$$\Delta(M) = c_1((b_2 - c_2)(c_3 - a_3) + a_2(c_3 - a_3) + b_3(a_2 + c_2 - b_2)) \geq 0,$$

поскольку выполняется дополнительное условие $a_2 + c_2 \geq b_2$.

4. Обобщение трехмерной теоремы Валена. Результат теоремы 1 допускает следующее уточнение.

ТЕОРЕМА 2. *Неравенство (3) выполняется для произвольной минимальной системы из трех векторов $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая теорему 1, доказательство достаточно провести для вырожденной минимальной тройки. Предположим, что $(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)})$ – вырожденная система из трех векторов, а их знаки выбраны так, что $\gamma^{(1)} + \gamma^{(2)} + \gamma^{(3)} = 0$. Тогда матрица вырожденной минимальной тройки путем элементарных преобразований может быть приведена к виду (см. [7; статья 109])

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & -c_1 \\ -a_2 & b_2 & -c_2 \\ -a_3 & -b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + c_1 & -b_1 & -c_1 \\ -a_2 & a_2 + c_2 & -c_2 \\ -a_3 & -b_3 & a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

с неотрицательными $a_i, b_i, c_i, i = 1, 2, 3$. Параллелепипед $[-a_1, a_1] \times [-b_2, b_2] \times [-c_3, c_3]$ не содержит внутри себя точек решетки Γ , отличных от начала координат. По теореме Минковского о выпуклом теле $\det \Gamma \geq a_1 b_2 c_3$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |\gamma_1^{(1)} \gamma_2^{(1)} \gamma_3^{(1)}| + |\gamma_1^{(2)} \gamma_2^{(2)} \gamma_3^{(2)}| + |\gamma_1^{(3)} \gamma_2^{(3)} \gamma_3^{(3)}| &= (b_1 + c_1)a_2a_3 + (a_2 + c_2)b_1b_3 + (a_3 + b_3)c_1c_2 \\ &\leq (b_1 + c_1)(a_2 + c_2)(a_3 + b_3) = a_1b_2c_3 \leq \det \Gamma. \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. В. Устинов, *Математика и информатика*, 1, К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы, Совр. пробл. матем., **16**, МИАН, М., 2012, 103–128.
 [2] Г. Ф. Вороной, *Собрание сочинений*, Т. 1, Изд-во АН УССР, Киев, 1952. [3] М. О. Авдеева, В. А. Быковский, *Матем. заметки*, **79**:2 (2006), 163–168. [4] К. Th. Vahlen, *J. für Math.*, **115**:3 (1895), 221–233. [5] А. Я. Хинчин, *Цепные дроби*, Наука, М., 1978. [6] Н. Minkowski, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **13** (1896), 41–60. [7] Н. Hancok, *Development of the Minkowski Geometry of Numbers*, Vol. 1, 2, Dover Publ., 1964. [8] О. А. Горкуша, *Матем. заметки*, **69**:3 (2001), 353–362. [9] В. А. Быковский, О. А. Горкуша, *Матем. сб.*, **192**:2 (2001), 57–66. [10] М. О. Авдеева, В. А. Быковский, *Матем. сб.*, **194**:7 (2003), 3–14. [11] В. А. Быковский, *Матем. заметки*, **66**:1 (1999), 30–37. [12] С. Гассан, *Чебышевский сб.*, **6**:3 (2005), 51–84.

А. В. Устинов

Хабаровское отделение

Института прикладной математики ДВО РАН

E-mail: ustinov.alexey@gmail.com

Поступило

08.08.2012

Исправленный вариант

31.07.2013