Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Миронов, Некоторые классы уравнений Бианки третьего порядка, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 3, 389–400

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10113>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 11:32:47

Некоторые классы уравнений Бианки третьего порядка

А. Н. Миронов

На основе определяющих уравнений, записанных в терминах инвариантов Лапласа, выделены некоторые классы уравнений Бианки третьего порядка, аналогичные известным классам гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными.

Библиография: 10 названий.

DOI: 10.4213/mzm10113

Уравнением Бианки ряд авторов (см., например, [1] и предисловие к книге [2]) называют уравнение со старшей частной производной вида

$$(D_1 + D_2)u = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где $D_1 = \partial^n / \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n$, D_2 – линейный дифференциальный оператор с переменными коэффициентами, содержащий лишь производные, получаемые из D_1 отбрасыванием по крайней мере одного дифференцирования.

Однородное уравнение Бианки порядка $n = 3$ может быть представлено в виде

$$u_{xyz} + au_{xy} + bu_{yz} + cu_{xz} + du_x + eu_y + fu_z + gu = 0. \quad (1)$$

Совокупность преобразований эквивалентности для (1)

$$\bar{x} = \alpha(x), \quad \bar{y} = \beta(y), \quad \bar{z} = \gamma(z), \quad u = \omega(x, y, z)\bar{u}. \quad (2)$$

Два уравнения вида (1) называются *эквивалентными по функции* [3; с. 117], если они переходят друг в друга при преобразованиях (2), в которых

$$\alpha(x) = x, \quad \beta(y) = y, \quad \gamma(z) = z.$$

В статье [4] было показано, что два уравнения вида (1) эквивалентны по функции тогда и только тогда, когда инварианты Лапласа

$$\begin{aligned} H_1 &= a_y + ac - d, & H_2 &= a_x + ab - e, & H_3 &= c_x + bc - f, \\ H_4 &= b_z + ab - e, & H_5 &= b_y + bc - f, & H_6 &= c_z + ac - d, \\ H_7 &= a_{xy} + bd + ce + af - 2abc - g, \\ H_8 &= b_{yz} + bd + ce + af - 2abc - g, \\ H_9 &= c_{xz} + bd + ce + af - 2abc - g \end{aligned} \quad (3)$$

одинаковы для обоих уравнений.

Отметим, что конструкции $H_1, \dots, H_9$ использовались в статьях [5]–[7] при построении явных формул для функции Римана уравнения (1) и решений уравнения (1) в квадратурах.

Хорошо известна [8; с. 175–186] роль инвариантов Лапласа в теории уравнения

$$u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0 \quad (4)$$

(которое может рассматриваться как двумерный аналог уравнения (1)). В частности, они играют определяющую роль в классификации уравнений вида (4) с точки зрения группового анализа. Напомним основной классификационный результат для уравнений (4) [3; с. 116–125], [9; с. 123–124]. Два уравнения (4) эквивалентны по функции тогда и только тогда, когда инварианты Лапласа

$$h = a_x + ab - c, \quad k = b_y + ab - c$$

имеют для обоих уравнений одинаковые значения. Алгебра Ли уравнения (4) есть $L = L^r \oplus L^\infty$, где L^r образована операторами вида

$$X = \xi^1(x, y) \partial_x + \xi^2(x, y) \partial_y + \sigma(x, y)u \partial_u, \quad (5)$$

а L^∞ – подалгебра с оператором $\omega(x, y)u \partial_u$, ω – решение (4). Оператор $u \partial_u$ допускается любым уравнением (4), поэтому указанный оператор можно включить в L^∞ и считать, что $\sigma(x, y)$ определяется в (5) с точностью до постоянного слагаемого.

Если $h = k \equiv 0$, то уравнение (4) эквивалентно уравнению $u_{xy} = 0$ и допускает бесконечномерную алгебру Ли операторов $X = \xi^1(x) \partial_x + \xi^2(y) \partial_y$ с произвольными функциями $\xi^1(x)$, $\xi^2(y)$. Если $h \neq 0$, то справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Уравнение (4) допускает более чем одномерную алгебру Ли операторов (5) тогда и только тогда, когда функции*

$$p = \frac{k}{h}, \quad q = \frac{(\ln h)_{xy}}{h}$$

тождественно постоянны. Если p и q постоянны, то уравнение (4) равносильно либо уравнению Эйлера–Пуассона ($q \neq 0$)

$$u_{xy} - \frac{2/q}{x+y} u_x - \frac{2p/q}{x+y} u_y + \frac{4p/q^2}{(x+y)^2} u = 0,$$

либо уравнению ($q = 0$)

$$u_{xy} + xu_x + pyu_y + pxu = 0,$$

причем его алгебра Ли операторов (5) трехмерна.

Дальнейшее изложение опирается на схему рассуждений из [3; с. 116–125].

1. Построение определяющих уравнений. Если искать допускаемый уравнением (1) оператор

$$\alpha \partial_x + \beta \partial_y + \gamma \partial_z + \tau \partial_u,$$

то оказывается, что часть системы определяющих уравнений составят

$$\partial_u \alpha = \partial_u \beta = \partial_u \gamma = 0, \quad \partial_u^2 \tau = 0.$$

Известно [3; с. 99–100], что в таком случае алгебра Ли уравнения (1) есть $L = L^r \oplus L^\infty$, где алгебра L^r размерности r образована операторами вида

$$X = \xi^1(x, y, z) \partial_x + \xi^2(x, y, z) \partial_y + \xi^3(x, y, z) \partial_z + \sigma(x, y, z) u \partial_u, \quad (6)$$

а L^∞ – это типичная для линейных уравнений абелева подалгебра с оператором $\omega(x, y, z) \partial_u$, где ω – решение уравнения (1). Ясно, что оператор $u \partial_u$ допускается любым уравнением (1), поэтому указанный оператор можно включить в L^∞ и считать, что $\sigma(x, y, z)$ определяется в (6) с точностью до постоянного слагаемого.

Применение трижды продолженного оператора X к уравнению (1) и расщепление относительно свободных параметров приводит к определяющим уравнениям, которые могут быть записаны с использованием инвариантов Лапласа (3) в виде

$$\begin{aligned} \xi_y^1 &= \xi_z^1 = \xi_x^2 = \xi_z^2 = \xi_x^3 = \xi_y^3 = 0, \\ (\sigma + b\xi^1 + c\xi^2 + a\xi^3)_x &= (H_3 - H_5)\xi^2 + (H_2 - H_4)\xi^3, \\ (\sigma + b\xi^1 + c\xi^2 + a\xi^3)_y &= (H_5 - H_3)\xi^1 + (H_1 - H_6)\xi^3, \\ (\sigma + b\xi^1 + c\xi^2 + a\xi^3)_z &= (H_4 - H_2)\xi^1 + (H_6 - H_1)\xi^2, \\ H_{1x}\xi^1 + (H_1\xi^2)_y + (H_1\xi^3)_z &= 0, \\ H_{6x}\xi^1 + (H_6\xi^2)_y + (H_6\xi^3)_z &= 0, \\ (H_2\xi^1)_x + H_{2y}\xi^2 + (H_2\xi^3)_z &= 0, \\ (H_4\xi^1)_x + H_{4y}\xi^2 + (H_4\xi^3)_z &= 0, \\ (H_3\xi^1)_x + (H_3\xi^2)_y + H_{3z}\xi^3 &= 0, \\ (H_5\xi^1)_x + (H_5\xi^2)_y + H_{5z}\xi^3 &= 0, \\ (H_7\xi^1)_x + (H_7\xi^2)_y + (H_7\xi^3)_z &= 0, \\ (H_8\xi^1)_x + (H_8\xi^2)_y + (H_8\xi^3)_z &= 0, \\ (H_9\xi^1)_x + (H_9\xi^2)_y + (H_9\xi^3)_z &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Первая строка в (7) показывает, что

$$\xi^i = \xi^i(x_i), \quad i = 1, \dots, 3.$$

Вторая, третья и четвертая строки из (7) представляют собой дифференциальные уравнения для определения функции σ , после того как найдены ξ^1 , ξ^2 , ξ^3 . Ответственными за результаты групповой классификации оказываются уравнения, записанные, начиная с пятой строки.

Выведем уравнения (8). Находим трижды продолженный оператор (6)

$$\begin{aligned} X_3 &= \xi^1 \partial_x + \xi^2 \partial_y + \xi^3 \partial_z + \sigma u \partial_u \\ &+ \tau^1 \partial_{u_1} + \tau^2 \partial_{u_2} + \tau^3 \partial_{u_3} \\ &+ \tau^{11} \partial_{u_{11}} + \tau^{12} \partial_{u_{12}} + \tau^{13} \partial_{u_{13}} + \tau^{22} \partial_{u_{22}} + \tau^{23} \partial_{u_{23}} + \tau^{33} \partial_{u_{33}} \\ &+ \tau^{111} \partial_{u_{111}} + \tau^{112} \partial_{u_{112}} + \tau^{113} \partial_{u_{113}} + \tau^{122} \partial_{u_{122}} + \tau^{123} \partial_{u_{123}} + \tau^{133} \partial_{u_{133}} \\ &+ \tau^{222} \partial_{u_{222}} + \tau^{223} \partial_{u_{223}} + \tau^{233} \partial_{u_{233}} + \tau^{333} \partial_{u_{333}}, \end{aligned}$$

где $u_1 = u_x, \dots, u_{333} = u_{zzz}$. Нам требуются коэффициенты

$$\begin{aligned}
 \tau^1 &= \sigma_x u + (\sigma - \xi_x^1) u_1 - \xi_x^2 u_2 - \xi_x^3 u_3, \\
 \tau^2 &= \sigma_y u - \xi_y^1 u_1 + (\sigma - \xi_y^2) u_2 - \xi_y^3 u_3, \\
 \tau^3 &= \sigma_z u - \xi_z^1 u_1 - \xi_z^2 u_2 + (\sigma - \xi_z^3) u_3, \\
 \tau^{12} &= \sigma_{xy} u + (\sigma_y - \xi_{xy}^1) u_1 + (\sigma_x - \xi_{xy}^2) u_2 - \xi_{xy}^3 u_3 \\
 &\quad - \xi_y^1 u_{11} + (\sigma - \xi_x^1 - \xi_y^2) u_{12} - \xi_y^3 u_{13} - \xi_x^2 u_{22} - \xi_x^3 u_{23}, \\
 \tau^{13} &= \sigma_{xz} u + (\sigma_z - \xi_{xz}^1) u_1 - \xi_{xz}^2 u_2 + (\sigma_x - \xi_{xz}^3) u_3 \\
 &\quad - \xi_z^1 u_{11} - \xi_z^2 u_{12} + (\sigma - \xi_x^1 - \xi_z^3) u_{13} - \xi_x^2 u_{23} - \xi_x^3 u_{33}, \\
 \tau^{23} &= \sigma_{yz} u - \xi_{yz}^1 u_1 + (\sigma_z - \xi_{yz}^2) u_2 + (\sigma_y - \xi_{yz}^3) u_3 \\
 &\quad - \xi_z^1 u_{12} - \xi_y^1 u_{13} - \xi_z^2 u_{22} + (\sigma - \xi_y^1 - \xi_z^3) u_{23} - \xi_y^3 u_{33}, \\
 \tau^{123} &= \sigma_{xyz} u + (\sigma_{yz} - \xi_{xyz}^1) u_1 + (\sigma_{xz} - \xi_{xyz}^2) u_2 + (\sigma_{xy} - \xi_{xyz}^3) u_3 \\
 &\quad - \xi_{yz}^1 u_{11} + (\sigma_z - \xi_{yz}^2 - \xi_{xz}^1) u_{12} + (\sigma_y - \xi_{xy}^1 - \xi_{yz}^3) u_{13} \\
 &\quad - \xi_{xz}^2 u_{22} + (\sigma_x - \xi_{xz}^3 - \xi_{xy}^2) u_{23} - \xi_{xy}^3 u_{33} - \xi_z^1 u_{112} - \xi_y^1 u_{113} \\
 &\quad - \xi_z^2 u_{122} + (\sigma - \xi_x^1 - \xi_y^2 - \xi_z^3) u_{123} - \xi_y^3 u_{133} - \xi_x^2 u_{223} - \xi_x^3 u_{233}.
 \end{aligned}$$

Применение оператора X_3 к уравнению (1) и расщепление относительно свободных параметров $u, u_1, \dots, u_{233}$ приводит к определяющим уравнениям в форме

$$\begin{aligned}
 \xi_y^1 &= \xi_z^1 = \xi_x^2 = \xi_z^2 = \xi_x^3 = \xi_y^3 = 0, \\
 \sigma_x + (b\xi^1)_x + b_y \xi^2 + b_z \xi^3 &= 0, \\
 \sigma_y + c_x \xi^1 + (c\xi^2)_y + c_z \xi^3 &= 0, \\
 \sigma_z + a_x \xi^1 + a_y \xi^2 + (a\xi^3)_z &= 0, \\
 \sigma_{xy} + c\sigma_x + b\sigma_y + (f\xi^1)_x + (f\xi^2)_y + f_z \xi^3 &= 0, \\
 \sigma_{xz} + a\sigma_x + b\sigma_z + (e\xi^1)_x + e_y \xi^2 + (e\xi^3)_z &= 0, \\
 \sigma_{yz} + a\sigma_y + c\sigma_z + d_x \xi^1 + (d\xi^2)_y + (d\xi^3)_z &= 0, \\
 \sigma_{xyz} + a\sigma_{xy} + b\sigma_{yz} + c\sigma_{xz} + d\sigma_x + e\sigma_y + f\sigma_z + (g\xi^1)_x + (g\xi^2)_y + (g\xi^3)_z &= 0.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Соотношения (7) и (8) эквивалентны. Действительно, рассмотрим вторую строку из (8)

$$\sigma_x + (b\xi^1)_x + b_y \xi^2 + b_z \xi^3 = 0.$$

Очевидно, что ее можно переписать в виде

$$(\sigma + b\xi^1 + c\xi^2 + a\xi^3)_x = (H_3 - H_5)\xi^2 + (H_2 - H_4)\xi^3.$$

Аналогично из третьей и четвертой строк (8) получаем

$$\begin{aligned}
 (\sigma + b\xi^1 + c\xi^2 + a\xi^3)_y &= (H_5 - H_3)\xi^1 + (H_1 - H_6)\xi^3, \\
 (\sigma + b\xi^1 + c\xi^2 + a\xi^3)_z &= (H_4 - H_2)\xi^1 + (H_6 - H_1)\xi^2.
 \end{aligned}$$

Перейдем к уравнению

$$\sigma_{xy} + c\sigma_x + b\sigma_y + (f\xi^1)_x + (f\xi^2)_y + f_z \xi^3 = 0. \tag{9}$$

Из (8) имеем

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -(b\xi^1)_x - b_y\xi^2 - b_z\xi^3, & \sigma_y &= -c_x\xi^1 - (c\xi^2)_y - c_z\xi^3, \\ \sigma_{xy} &= -(b_y\xi^1)_x - (b_y\xi^2)_y - b_{yz}\xi^3, & \sigma_{xy} &= -(c_x\xi^1)_x - (c_x\xi^2)_y - c_{xz}\xi^3.\end{aligned}\quad (10)$$

Подставив производные σ из первых трех равенств (10) в (9), получим

$$(H_5\xi^1)_x + (H_5\xi^2)_y + H_{5z}\xi^3 = 0.$$

Если вместо третьего равенства в (10) взять четвертое, то придем к еще одному соотношению

$$(H_3\xi^1)_x + (H_3\xi^2)_y + H_{3z}\xi^3 = 0.$$

Аналогично получаются оставшиеся уравнения из (7).

Из результатов статьи [4] непосредственно следует

ТЕОРЕМА 2. *Два уравнения вида (1) с наборами инвариантов Лапласа $H_1, H_2, \dots, H_9$ и $\bar{H}_1, \bar{H}_2, \dots, \bar{H}_9$ соответственно эквивалентны тогда и только тогда, когда выполняются равенства*

$$\begin{aligned}H_1 &= \beta'(y)\gamma'(z)\bar{H}_1, & H_2 &= \alpha'(x)\gamma'(z)\bar{H}_2, & H_3 &= \alpha'(x)\beta'(y)\bar{H}_3, \\ H_4 &= \alpha'(x)\gamma'(z)\bar{H}_4, & H_5 &= \alpha'(x)\beta'(y)\bar{H}_5, & H_6 &= \beta'(y)\gamma'(z)\bar{H}_6, \\ H_i &= \alpha'(x)\beta'(y)\gamma'(z)\bar{H}_i, & i &= 7, 8, 9.\end{aligned}\quad (11)$$

2. Выделение некоторых классов уравнений вида (1). Перейдем к анализу определяющих уравнений (7). Если все H_i , $i = 1, \dots, 9$, тождественно равны нулю, то уравнение (1) равносильно уравнению $u_{xyz} = 0$ и допускает бесконечномерную алгебру Ли операторов вида

$$\xi^1(x)\partial_x + \xi^2(y)\partial_y + \xi^3(z)\partial_z$$

с произвольными $\xi^1(x)$, $\xi^2(y)$, $\xi^3(z)$.

Введем в рассмотрение отношения

$$p_{12} = \frac{H_3}{H_5}, \quad p_{13} = \frac{H_2}{H_4}, \quad p_{23} = \frac{H_1}{H_6}, \quad (12)$$

а также конструкции

$$\begin{aligned}q_1 &= \frac{(\ln H_1)_{yz}}{H_1}, & q_2 &= \frac{(\ln H_2)_{xz}}{H_2}, & q_3 &= \frac{(\ln H_3)_{xy}}{H_3}, \\ q_4 &= \frac{(\ln H_4)_{xz}}{H_4}, & q_5 &= \frac{(\ln H_5)_{xy}}{H_5}, & q_6 &= \frac{(\ln H_6)_{yz}}{H_6}, \\ q_i &= \frac{(\ln H_i)_{xyz}}{H_i}, & i &= 7, 8, 9.\end{aligned}\quad (13)$$

Подставляем $H_1 = p_{23}H_6$, $H_6 \neq 0$, в пятую строку (7):

$$p_{23}(H_{6x}\xi^1 + (H_6\xi^2)_y + (H_6\xi^3)_z) + p_{23x}H_6\xi^1 + p_{23y}H_6\xi^2 + p_{23z}H_6\xi^3 = 0.$$

Так как слагаемое в скобках обращается в нуль, отсюда следует

$$\xi^1 p_{23x} + \xi^2 p_{23y} + \xi^3 p_{23z} = 0. \quad (14)$$

Тождество (14) означает, что либо $p_{23} = \text{const}$, либо p_{23} является инвариантом группы G с оператором (6).

Если $p_{23} = \text{const}$, то из пятой и шестой строк (7) остается только одна (шестая), которая может быть записана в виде

$$\xi^1 (\ln H_6)_x + \xi^2 (\ln H_6)_y + \xi^3 (\ln H_6)_z + \xi_y^2 + \xi_z^3 = 0. \quad (15)$$

Дифференцируя по y, z , получаем

$$\xi^1 \frac{((\ln H_6)_{yz})_x}{(\ln H_6)_{yz}} + \xi^2 \frac{((\ln H_6)_{yz})_y}{(\ln H_6)_{yz}} + \xi^3 \frac{((\ln H_6)_{yz})_z}{(\ln H_6)_{yz}} + \xi_y^2 + \xi_z^3 = 0. \quad (16)$$

Вычитая (15) из (16) и умножая затем на $(\ln H_6)_{yz}/H_6$, получим

$$\xi^1 q_{6x} + \xi^2 q_{6y} + \xi^3 q_{6z} = 0. \quad (17)$$

То есть снова либо $q_6 = \text{const}$, либо q_6 является инвариантом группы G с оператором (6).

Совершенно аналогично могут быть получены тождества, аналогичные (14), (17) для $p_{12}, p_{13}, q_i, i = 1, \dots, 5$.

Подобные тождества можно получить и для отношений

$$P_1 = \frac{H_7}{H_8}, \quad P_2 = \frac{H_7}{H_9}, \quad P_3 = \frac{H_8}{H_9}. \quad (18)$$

Например, рассматривая отношение P_1 , приходим к тождеству

$$\xi^1 P_{1x} + \xi^2 P_{1y} + \xi^3 P_{1z} = 0.$$

То есть опять, либо $P_1 = \text{const}$, либо P_1 является инвариантом группы G с оператором (6). Если же $P_1 = \text{const}$, то 12 строка (7) дает

$$\xi^1 (\ln H_8)_x + \xi^2 (\ln H_8)_y + \xi^3 (\ln H_8)_z + \xi_x^1 + \xi_y^2 + \xi_z^3 = 0. \quad (19)$$

Дифференцируя по x, y, z , получаем

$$\xi^1 \frac{((\ln H_8)_{xyz})_x}{(\ln H_8)_{xyz}} + \xi^2 \frac{((\ln H_8)_{xyz})_y}{(\ln H_8)_{xyz}} + \xi^3 \frac{((\ln H_8)_{xyz})_z}{(\ln H_8)_{xyz}} + \xi_x^1 + \xi_y^2 + \xi_z^3 = 0. \quad (20)$$

Вычитая (19) из (20) и умножая затем на $(\ln H_8)_{xyz}/H_8$, получим

$$\xi^1 q_{8x} + \xi^2 q_{8y} + \xi^3 q_{8z} = 0. \quad (21)$$

Таким образом, либо $q_8 = \text{const}$, либо q_8 является инвариантом группы G с оператором (6) (то же самое справедливо и для P_2, P_3, q_7, q_9).

Укажем теперь некоторые классы уравнений вида (1), аналогичные указанным в теореме 1, для которых p_{12}, p_{13}, p_{23} и q_4, q_5, q_6 постоянны. При этом ограничимся случаями с H_7, H_8, H_9 , тождественно равными нулю. Отметим, что переход

от уравнений с конструкциями H_7, H_8, H_9 , тождественно равными нулю, к уравнениям с ненулевыми H_7, H_8, H_9 , приводит, вообще говоря, к уменьшению размерности r допускаемой уравнением алгебры Ли L^r (соответствующие примеры легко построить). Так что с точки зрения отыскания уравнений, допускающих алгебры Ли L^r наиболее высокой размерности, достаточно ограничиться случаями, когда H_7, H_8, H_9 тождественно равны нулю. Кроме того, ясно, что в случае трехмерного пространства независимых переменных x, y, z , соотношения (12), (13) приводят к инвариантам $H_i, i = 1, \dots, 9$, определяемым с точностью до произвольных функций. В связи с этим, указываются не все, а только некоторые возможности, наиболее близкие к указанным в теореме 1.

Теорема 2 позволяет рассматривать по одному конкретному уравнению в каждом классе эквивалентности. Кроме того, очевидно, что перестановки переменных позволяют не рассматривать конструкции

$$p_{21} = \frac{H_5}{H_3}, \quad p_{31} = \frac{H_4}{H_2}, \quad p_{32} = \frac{H_6}{H_1}, \quad q_1, \quad q_2, \quad q_3.$$

Перейдем к рассмотрению возможных вариантов уравнений (1) с указанными выше постоянными инвариантами преобразования (6). Анализ определяющих уравнений всюду проводится аналогично изложенному в [3; с. 124–125].

Сначала перечислим варианты (их три), которые характеризуются условиями: если $H_i \neq 0$, то $q_i = 0, i = 1, \dots, 6$.

1. $H_2 = H_3 = H_4 = H_5 = 0, H_1 = p_{23}, H_6 = 1$. Постоянная p_{23} может быть равна нулю. Соответствующее уравнение имеет вид

$$u_{xyz} + p_{23}yu_{xy} + zu_{xz} + p_{23}yzu_x = 0.$$

и допускает алгебру Ли операторов

$$X = \xi^1(x) \partial_x + (Cy + C_1) \partial_y - (Cz - C_2) \partial_z - (C_2y + C_1p_{23}z)u \partial_u,$$

где коэффициент $\xi^1(x)$ произволен. Таким образом, допускаемая данным уравнением алгебра L^r бесконечномерна, $r = \infty$.

2. $H_3 = H_5 = 0, H_1 = p_{23}, H_2 = p_{13}, H_4 = H_6 = 1$. Уравнение имеет вид

$$u_{xyz} + (p_{13}x + p_{23}y)u_{xy} + zu_{yz} + zu_{xz} + (p_{13}x + p_{23}y)zu_x + (p_{13}x + p_{23}y)zu_y + z^2u_z + (p_{13}x + p_{23}y)z^2u = 0$$

и допускает алгебру L^4 , образованную операторами

$$\begin{aligned} X_1 &= x \partial_x + y \partial_y - z \partial_z, & X_2 &= \partial_x - p_{13}zu \partial_u, \\ X_3 &= \partial_y - p_{23}zu \partial_u, & X_4 &= \partial_z - (x + y)u \partial_u. \end{aligned}$$

3. $H_1 = p_{23}, H_2 = p_{13}, H_3 = p_{12}, H_4 = H_5 = H_6 = 1$. Уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} u_{xyz} &+ (p_{13}x + p_{23}y)u_{xy} + (y + z)u_{yz} + (p_{12}x + z)u_{xz} + (p_{13}x + p_{23}y)(p_{12}x + z)u_x \\ &+ (p_{13}x + p_{23}y)(y + z)u_y + (p_{12}x + z)(y + z)u_z \\ &+ (p_{13}x + p_{23}y)(p_{12}x + z)(y + z)u = 0 \end{aligned}$$

и допускает алгебру L^3 , образованную операторами

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x - (p_{12}y + p_{13}z)u \partial_u, & X_2 &= \partial_y - (x + p_{23}z)u \partial_u, \\ X_3 &= \partial_z - (x + y)u \partial_u. \end{aligned}$$

Следующие 3 варианта характеризуются условиями: если $H_i \neq 0$, то $q_i \neq 0$, $i = 1, \dots, 6$.

4. В случае

$$H_2 = H_3 = H_4 = H_5 = 0, \quad H_1 = \frac{2p_{23}/q_6}{(y+z)^2}, \quad H_6 = \frac{2/q_6}{(y+z)^2}.$$

Уравнение имеет вид

$$u_{xyz} - \frac{2p_{23}/q_6}{y+z} u_{xy} - \frac{2/q_6}{y+z} u_{xz} + \frac{4p_{23}}{q_6^2(y+z)^2} u_x = 0 \quad (22)$$

и допускает алгебру Ли операторов

$$X = \xi^1(x) \partial_x + (Cy^2 + C_1y + C_2) \partial_y - (Cz^2 - C_1z + C_2) \partial_z + \frac{2C}{q_6}(y - p_{23}z)u \partial_u,$$

где коэффициент $\xi^1(x)$ произволен. Таким образом, допускаемая данным уравнением алгебра L^r бесконечномерна, $r = \infty$.

5. В случае

$$\begin{aligned} H_3 = H_5 = 0, \quad H_1 &= \frac{2p_{23}/q_6}{(y+z)^2}, \quad H_2 = \frac{2p_{13}/q_4}{(x+z)^2}, \\ H_4 &= \frac{2/q_4}{(x+z)^2}, \quad H_6 = \frac{2/q_6}{(y+z)^2}. \end{aligned}$$

Уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} u_{xyz} - \left(\frac{2p_{23}/q_6}{y+z} + \frac{2p_{13}/q_4}{x+z} \right) u_{xy} - \frac{2/q_4}{x+z} u_{yz} - \frac{2/q_6}{y+z} u_{xz} \\ + \frac{2/q_6}{y+z} \left(\frac{2p_{23}/q_6}{y+z} + \frac{2p_{13}/q_4}{x+z} \right) u_x + \frac{2/q_4}{x+z} \left(\frac{2p_{23}/q_6}{y+z} + \frac{2p_{13}/q_4}{x+z} \right) u_y \\ + \frac{4}{q_4q_6(x+z)(y+z)} u_z - \frac{4}{q_4q_6(x+z)(y+z)} \left(\frac{2p_{23}/q_6}{y+z} + \frac{2p_{13}/q_4}{x+z} \right) u = 0 \end{aligned}$$

и допускает алгебру L^3 , образованную операторами

$$\begin{aligned} X_1 &= x^2 \partial_x + y^2 \partial_y - z^2 \partial_z + 2 \left(\frac{x}{q_4} + \frac{y}{q_6} - \left(\frac{p_{23}}{q_6} + \frac{p_{13}}{q_4} \right) z \right) u \partial_u, \\ X_2 &= x \partial_x + y \partial_y + z \partial_z, \quad X_3 = \partial_x + \partial_y - \partial_z. \end{aligned}$$

6. В случае

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{2p_{23}/q_6}{(y+z)^2}, \quad H_2 = \frac{2p_{13}/q_4}{(x+z)^2}, \quad H_3 = \frac{2p_{12}/q_5}{(x+y)^2}, \\ H_4 &= \frac{2/q_4}{(x+z)^2}, \quad H_5 = \frac{2/q_5}{(x+y)^2}, \quad H_6 = \frac{2/q_6}{(y+z)^2}. \end{aligned}$$

Уравнение имеет вид

$$\begin{aligned}
 & u_{xyz} - \left(\frac{2p_{23}/q_6}{y+z} + \frac{2p_{13}/q_4}{x+z} \right) u_{xy} - \left(\frac{2/q_4}{x+z} + \frac{2/q_5}{x+y} \right) u_{yz} - \left(\frac{2/q_6}{y+z} + \frac{2p_{12}/q_5}{x+y} \right) u_{xz} \\
 & + \left(\frac{2p_{23}/q_6}{y+z} + \frac{2p_{13}/q_4}{x+z} \right) \left(\frac{2/q_6}{y+z} + \frac{2p_{12}/q_5}{x+y} \right) u_x \\
 & + \left(\frac{2p_{23}/q_6}{y+z} + \frac{2p_{13}/q_4}{x+z} \right) \left(\frac{2/q_4}{x+z} + \frac{2/q_5}{x+y} \right) u_y \\
 & + \left(\frac{2/q_4}{x+z} + \frac{2/q_5}{x+y} \right) \left(\frac{2/q_6}{y+z} + \frac{2p_{12}/q_5}{x+y} \right) u_z \\
 & - \left(\frac{2/q_4}{x+z} + \frac{2/q_5}{x+y} \right) \left(\frac{2/q_6}{y+z} + \frac{2p_{12}/q_5}{x+y} \right) \left(\frac{2p_{23}/q_6}{y+z} + \frac{2p_{13}/q_4}{x+z} \right) u = 0
 \end{aligned}$$

и допускает алгебру L^1 , образованную оператором

$$X_1 = x \partial_x + y \partial_y + z \partial_z.$$

Оставшиеся варианты носят “смешанный” характер: имеются как $q_i \neq 0$, так и $q_i = 0$.

7. В случае

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \frac{2p_{23}/q_6}{(y+z)^2}, & H_2 &= p_{13}, & H_3 &= p_{12}, \\
 H_4 &= s_1 = \text{const}, & H_5 &= s_2 = \text{const}, & H_6 &= \frac{2/q_6}{(y+z)^2},
 \end{aligned}$$

где постоянные $p_{12}, p_{13}, p_{23}, s_1, s_2$ могут равняться нулю, но при этом либо одна из постоянных s_1, s_2 равна 1, либо обе. Соответствующее уравнение имеет вид

$$\begin{aligned}
 & u_{xyz} - \left(\frac{2p_{23}/q_6}{y+z} - p_{13}x \right) u_{xy} + (s_2y + s_1z) u_{yz} \\
 & - \left(\frac{2/q_6}{y+z} - p_{12}x \right) u_{xz} + \left(\frac{2p_{23}/q_6}{y+z} - p_{13}x \right) \left(\frac{2/q_6}{y+z} - p_{12}x \right) u_x \\
 & - \left(\frac{2p_{23}/q_6}{y+z} - p_{13}x \right) (s_2y + s_1z) u_y - (s_2y + s_1z) \left(\frac{2/q_6}{y+z} - p_{12}x \right) u_z \\
 & + (s_2y + s_1z) \left(\frac{2p_{23}/q_6}{y+z} - p_{13}x \right) \left(\frac{2/q_6}{y+z} - p_{12}x \right) u = 0
 \end{aligned}$$

и допускает алгебру L^3 , образованную операторами

$$\begin{aligned}
 X_1 &= x \partial_x - y \partial_y - z \partial_z, & X_2 &= \partial_y - \partial_z + (s_1 - s_2)xu \partial_u, \\
 X_3 &= \partial_x - (p_{12}y + p_{13}z)u \partial_u.
 \end{aligned}$$

8. В случае

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \frac{2p_{23}/q_6}{(y+z)^2}, & H_2 &= p_{13}, & H_3 &= \frac{2p_{12}/q_5}{(x+y)^2}, \\
 H_4 &= 1, & H_5 &= \frac{2/q_5}{(x+y)^2}, & H_6 &= \frac{2/q_6}{(y+z)^2},
 \end{aligned}$$

(снова постоянные p_{12} , p_{13} , p_{23} могут равняться нулю). Соответствующее уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} u_{xyz} - \left(\frac{2p_{23}/q_6}{y+z} - s_1x \right) u_{xy} - \left(\frac{2/q_5}{x+y} - s_2z \right) u_{yz} - \left(\frac{2/q_6}{y+z} + \frac{2p_{12}/q_5}{x+y} \right) u_{xz} \\ + \left(\frac{2p_{23}/q_6}{y+z} - s_1x \right) \left(\frac{2/q_6}{y+z} + \frac{2p_{12}/q_5}{x+y} \right) u_x + \left(\frac{2p_{23}/q_6}{y+z} - s_1x \right) \left(\frac{2/q_5}{x+z} - s_2z \right) u_y \\ + \left(\frac{2/q_5}{x+z} - s_2z \right) \left(\frac{2/q_6}{y+z} + \frac{2p_{12}/q_5}{x+y} \right) u_z \\ - \left(\frac{2p_{23}/q_6}{y+z} - s_1x \right) \left(\frac{2/q_5}{x+z} - s_2z \right) \left(\frac{2/q_6}{y+z} + \frac{2p_{12}/q_5}{x+y} \right) u = 0 \end{aligned}$$

и допускает алгебру L^1 , образованную оператором

$$X_1 = \partial_x - \partial_y + \partial_z - (x + p_{13}z)u \partial_u.$$

3. Построение трехмерного аналога уравнения Эйлера–Пуассона. Отметим, что в случае постоянных q_i , $i = 1, \dots, 6$, инвариант H_i является решением уравнения Лиувилля (см. (13)), формула общего решения которого известна [3; с. 123]. Аналогично, если какая-либо из конструкций q_i , $i = 7, \dots, 9$, постоянна, то соответствующий инвариант H_i является решением уравнения

$$(\ln H_i)_{xyz} = q_i H_i. \quad (23)$$

Рассмотрим сначала уравнение

$$u_{xyz} = e^u. \quad (24)$$

Построим в явном виде решение уравнения (24), зависящее от трех произвольных функций.

Стандартная процедура отыскания допускаемой уравнением (24) группы точечных преобразований приводит к допускаемой алгебре Ли операторов

$$X = \xi(x) \partial_x + \eta(y) \partial_y + \zeta(z) \partial_z - (\xi'(x) + \eta'(y) + \zeta'(z)) \partial_u,$$

где $\xi(x)$, $\eta(y)$, $\zeta(z)$ – произвольные функции.

Найдем инварианты допускаемой уравнением (24) группы. Для определения инвариантов получаем систему

$$\frac{dx}{\xi(x)} = \frac{dy}{\eta(y)} = \frac{dz}{\zeta(z)} = \frac{du}{-\xi'(x) - \eta'(y) - \zeta'(z)}. \quad (25)$$

Находим первые интегралы системы (25)

$$\begin{aligned} u - \ln |\xi(x)\eta(y)\zeta(z)| &= C_1, \\ \varphi(x) - \psi(y) &= C_2, \quad \varphi(x) - \chi(z) = C_3, \\ \varphi'(x) &= \frac{1}{\xi(x)}, \quad \psi'(y) = \frac{1}{\eta(y)}, \quad \chi'(z) = \frac{1}{\zeta(z)}. \end{aligned}$$

Левые части первых интегралов и являются искомыми инвариантами.

Введем новые переменные

$$v = u - \ln |\xi(x)\eta(y)\zeta(z)|, \quad t = \varphi(x) - \psi(y), \quad \tau = \varphi(x) - \chi(z).$$

Инвариантное относительно допускаемой уравнением (24) группы точечных преобразований решение имеет вид $v = w(t, \tau)$. Получаем редуцированное уравнение для определения функции w

$$w_{tt\tau} + w_{t\tau\tau} = e^w. \quad (26)$$

Уравнение (26) относится к одному из канонических видов, указанных в [10].

Непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнение (26) имеет решение

$$w = \ln \frac{-12}{(t + \tau)^3}.$$

Тогда (считаем $\xi(x)\eta(y)\zeta(z) > 0$)

$$u = -\ln(\xi(x)\eta(y)\zeta(z)) + \ln \frac{-12}{(2\varphi(x) - \psi(y) - \chi(z))^3} = \ln \frac{-12(1/\xi(x))(1/\eta(y))(1/\zeta(z))}{(2\varphi(x) - \psi(y) - \chi(z))^3}.$$

Обозначив $\lambda(x) = 2\varphi(x)$, $\mu(y) = -\psi(y)$, $\nu(z) = -\chi(z)$, приходим к формуле, дающей точное решение уравнения (24), зависящее от трех произвольных функций

$$u = \ln \frac{-6\lambda'(x)\mu'(y)\nu'(z)}{(\lambda(x) + \mu(y) + \nu(z))^3}.$$

Очевидно, что уравнение (23) имеет точное решение

$$H_i = -\frac{6\lambda'(x)\mu'(y)\nu'(z)}{q_i(\lambda(x) + \mu(y) + \nu(z))^3}.$$

Возникает вопрос: какое уравнение вида (1) может рассматриваться в качестве трехмерного аналога уравнения Эйлера–Пуассона (т.е. имеет близкие групповые свойства)?

Уравнение Эйлера–Пуассона согласно теореме 1 характеризуется условиями: p и q постоянны, $q \neq 0$. В качестве критерия отбора следует принять, что трехмерный аналог

- 1) должен допускать алгебру L^r наибольшей конечной размерности,
- 2) имеет конструкции q_i , $i = 7, 8, 9$, отличные от нуля,
- 3) коэффициенты уравнения должны иметь достаточно простую структуру, сходную со структурой коэффициентов уравнения Эйлера–Пуассона.

Уравнение, являющееся, в соответствии с требованиями 1)–3) трехмерным аналогом уравнения Эйлера–Пуассона, имеет вид

$$u_{xyz} - \frac{2p_{23}/q_6}{y+z} u_{xy} - \frac{2/q_6}{y+z} u_{xz} + \frac{4p_{23}}{q_6^2(y+z)^2} u_x + \frac{6}{q_7(x+y+z)^3} u = 0. \quad (27)$$

Оно отличается от уравнения (22) только последним членом. Непосредственное вычисление коэффициента $\xi^1(x)$ из определяющих уравнений (7) (последние три строки) приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\xi_1(x)}{(x+y+z)^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Cy^2 + C_1y + C_2}{(x+y+z)^3} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Cz^2 - C_1z + C_2}{(x+y+z)^3} \right) = 0.$$

Интегрируя это уравнение, приходим к допускаемому уравнением (27) оператору группы

$$X = C_1 x \partial_x + (C_1 y + C_2) \partial_y + (C_1 z - C_2) \partial_z.$$

Таким образом, уравнение (27) допускает алгебру L^2 , образованную операторами

$$X_1 = x \partial_x + y \partial_y + z \partial_z, \quad X_2 = \partial_y - \partial_z.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. К. Фаге, “Задача Коши для уравнения Бианки”, *Матем. сб.*, **45(87)**:3 (1958), 281–322.
- [2] В. И. Жегалов, А. Н. Миронов, *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными*, Изд-во Казанского матем. об-ва, Казань, 2001.
- [3] Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978.
- [4] О. М. Джохадзе, “Об инвариантах Лапласа для некоторых классов линейных дифференциальных уравнений в частных производных”, *Дифференц. уравнения*, **40**:1 (2004), 58–68.
- [5] В. И. Жегалов, “О трехмерной функции Римана”, *Сиб. матем. журн.*, **38**:5 (1997), 1074–1079.
- [6] В. И. Жегалов, “О случаях разрешимости гиперболических уравнений в квадратах”, *Изв. вузов. Матем.*, 2004, № 7, 47–52.
- [7] О. А. Кощеева, “О построении функции Римана для уравнения Бианки в n -мерном пространстве”, *Изв. вузов. Матем.*, 2008, № 9, 40–46.
- [8] Ф. Трикоми, *Лекции по уравнениям в частных производных*, ИЛ, М., 1957.
- [9] Н. Х. Ибрагимов, “Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике (к 150-летию со дня рождения Софуса Ли)”, *УМН*, **47**:4(286) (1992), 83–144.
- [10] Т. Д. Джураев, Я. Попёлек, “О канонических видах уравнений с частными производными третьего порядка”, *УМН*, **44**:4(268) (1989), 237–238.

А. Н. Миронов

Елабужский филиал Казанского (Приволжского)
федерального университета
E-mail: lbmironova@yandex.ru

Поступило

02.07.2012