Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Карачик, Об арифметическом треугольнике, возникающем из условий разрешимости задачи Неймана, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 2, 228–238

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10114>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 12:48:19

Об арифметическом треугольнике, возникающем из условий разрешимости задачи Неймана

В. В. Карачик

Исследуется арифметический треугольник, возникающий из условий разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре. Получены рекуррентные соотношения для элементов этого треугольника.

Библиография: 8 названий.

DOI: 10.4213/mzm10114

1. Введение. Рассмотрим однородную задачу Неймана (см., например, [1]) для полигармонического уравнения в единичном шаре

$$\Delta^k u(x) = 0, \quad x \in S, \quad \frac{\partial^i u}{\partial \nu^i} \Big|_{\partial S} = f_i(s), \quad s \in \partial S, \quad i = 1, \dots, k, \quad (1)$$

где $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, а ν – единичный вектор внешней нормали к ∂S . В работе [2] рассмотрена более общая краевая задача, содержащая многочлены высокого порядка от нормальных производных в граничных условиях. Была доказана теорема о разрешимости этой краевой задачи и о представлении решения. Частным случаем теоремы из [2] является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Решение задачи Неймана (1) при $f_i \in C^{k-i}(\partial S)$, $i = 1, \dots, k$, существует тогда и только тогда, когда для любого вектора b_k – решения уравнения $N_k^T(0)b_k = 0$ выполнено условие*

$$\int_{\partial S} (b_k^1 f_1 + \dots + b_k^k f_k) ds = 0,$$

где $b_k = (b_k^1, \dots, b_k^k)$,

$$N_k(\lambda) = ((\lambda + 2j - 2)^{[i]})_{i,j=1,\dots,k} \cdot C,$$

$t^{[k]} = t(t-1)\dots(t-k+1)$ – факториальная степень, а $C = ((-1)^i \binom{j}{i})_{i,j=0,\dots,k-1}$, причем $\binom{j}{i} = 0$, когда $j < i$.

Исследование чисел b_k^s при $s = 1, \dots, k$ и $k \in \mathbb{N}$, нормированных так, что $b_k^1 > 0$ и $|b_k^k| = 1$, является предметом настоящей статьи. Например, при $k = 1, 2$ известно [1], [3], что $b_1^1 = 1$ и $b_2^1 = 1$ и $b_2^2 = -b_2^1 = 1$. Расположим числа b_k^s в виде треугольника на

Вычислим определители Δ_k^s . Рассмотрим более общий случай. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1} \in \mathbb{C}$. Обозначим

$$\Delta_k^s(\lambda) \equiv \Delta_k^s(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}) = \begin{vmatrix} \lambda_1^{[1]} & \dots & \lambda_{k-1}^{[1]} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{[s-1]} & \dots & \lambda_{k-1}^{[s-1]} \\ \lambda_1^{[k]} & \dots & \lambda_{k-1}^{[k]} \\ \lambda_1^{[s+1]} & \dots & \lambda_{k-1}^{[s+1]} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{[k-1]} & \dots & \lambda_{k-1}^{[k-1]} \end{vmatrix} = (-1)^{k-s-1} \begin{vmatrix} \lambda_1^{[1]} & \dots & \lambda_{k-1}^{[1]} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{[s-1]} & \dots & \lambda_{k-1}^{[s-1]} \\ \lambda_1^{[s+1]} & \dots & \lambda_{k-1}^{[s+1]} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{[k-1]} & \dots & \lambda_{k-1}^{[k-1]} \\ \lambda_1^{[k]} & \dots & \lambda_{k-1}^{[k]} \end{vmatrix} \quad (4)$$

и $\Delta_k^0(\lambda) = \det(\lambda_j^{[i]})_{i,j=1,\dots,k-1}$.

ЛЕММА 2. При s целом и таком, что $1 \leq s \leq k-1$, имеет место равенство

$$s^{[1]} \Delta_k^1(\lambda) + \dots + s^{[s]} \Delta_k^s(\lambda) = -\Delta_k^0(\lambda) s \prod_{i=1}^{k-1} (s - \lambda_i). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть s – целое и такое, что $1 \leq s \leq k-1$. Рассмотрим определитель вида

$$V(s; \lambda) = \begin{vmatrix} s^{[1]} & \lambda_1^{[1]} & \dots & \lambda_{k-1}^{[1]} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s^{[s]} & \lambda_1^{[s]} & \dots & \lambda_{k-1}^{[s]} \\ 0 & \lambda_1^{[s+1]} & \dots & \lambda_{k-1}^{[s+1]} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \lambda_1^{[k]} & \dots & \lambda_{k-1}^{[k]} \end{vmatrix}.$$

Раскроем его по первому столбцу. В соответствии с (4) и с учетом равенства $s^{[i]} = 0$, верного при $i > s$, имеем

$$\begin{aligned} V(s; \lambda) &= (-1)^{k-2} s^{[1]} \Delta_k^1(\lambda) - (-1)^{k-3} s^{[2]} \Delta_k^2(\lambda) + \dots + (-1)^{s-1} (-1)^{k-s-1} s^{[s]} \Delta_k^s(\lambda) \\ &= (-1)^{k-2} (s^{[1]} \Delta_k^1(\lambda) + \dots + s^{[s]} \Delta_k^s(\lambda)). \end{aligned}$$

Вычислим $V(s; \lambda)$ другим способом. Вынесем из первого столбца множитель s , а из i -го столбца при $i > 2$ – множитель λ_{i-1} . Нетрудно заметить, что получившийся определитель с помощью линейных действий над строками приводится к определителю Вандермонда $W[s, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}]$. Поэтому

$$\begin{aligned} V(s; \lambda) &= s \lambda_1 \dots \lambda_{k-1} W[s, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}] = s \prod_{i=1}^{k-1} \lambda_i (\lambda_i - s) W[\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}] \\ &= s \prod_{i=1}^{k-1} (\lambda_i - s) \Delta_k^0(\lambda) = (-1)^{k-1} s \prod_{i=1}^{k-1} (s - \lambda_i) \Delta_k^0(\lambda). \end{aligned}$$

Приравнявая вычисленные значения $V(s; \lambda)$, получим равенство

$$(-1)^{k-1} s \prod_{i=1}^{k-1} (s - \lambda_i) \Delta_k^0(\lambda) = (-1)^{k-2} (s^{[1]} \Delta_k^1(\lambda) + \dots + s^{[s]} \Delta_k^s(\lambda)).$$

Отсюда сразу следует (5).

3. Вспомогательные равенства для чисел b_k^s . Воспользуемся леммой 2 для определения b_k^s .

ЛЕММА 3. При всяких целых $k > 1$ и s таких, что $1 \leq s \leq k-1$, имеет место равенство

$$s^{[1]} b_k^1 + \dots + s^{[s]} b_k^s = (-1)^{k+1} 2^k \left(\frac{s}{2} \right)^{[k]}. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу сделанных выше обозначений $\Delta_k^s(2, \dots, 2k-2) = \Delta_k^s$ и, значит, по лемме 2 при $\lambda_i = 2i$ имеем

$$s^{[1]} \Delta_k^1 + \dots + s^{[s]} \Delta_k^s = -\Delta_k^0 \prod_{i=0}^{k-1} (s - 2i) = -2^k \left(\frac{s}{2} \right)^{[k]} \Delta_k^0. \quad (7)$$

Отсюда при $s = 1$ и $k > 1$ получим

$$\Delta_k^1 = -\Delta_k^0 2^k \left(\frac{1}{2} \right)^{[k]} = (-1)^k \Delta_k^0 (2k-3)!!.$$

Вспоминая систему (3), найдем $b_k^s = -b_k^k \Delta_k^s / \Delta_k^0$. При $s = 1$ будем иметь

$$b_k^1 = -b_k^k \frac{\Delta_k^1}{\Delta_k^0} = (-1)^{k+1} b_k^k (2k-3)!!$$

и, значит, $b_k^1 > 0$ при $b_k^k = (-1)^{k+1}$. Таким образом $b_k^s = (-1)^k \Delta_k^s / \Delta_k^0$. Следовательно, деля обе части равенства (7) на $\Delta_k^0 \neq 0$ и умножая на $(-1)^k$, получим (6).

Из доказательства леммы 3 следует, что

$$\begin{aligned} b_k^1 &= (2k-3)!! & \text{при } k > 1, \\ b_k^k &= (-1)^{k+1} & \text{при } k \geq 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом мы определили левую и правую стороны арифметического треугольника (2), состоящего из чисел b_k^s .

ЛЕММА 4. При $k \in \mathbb{N}$ и целом s таком, что $1 \leq s \leq k-1$, числа b_k^s определяются равенством

$$b_k^s = (-1)^{k+s} \frac{2^k}{s!} \sum_{j=1}^s (-1)^{j+1} \binom{s}{j} \left(\frac{j}{2} \right)^{[k]}. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\tilde{b}_k^s = s! b_k^s$ и будем считать, что $\binom{a}{b} = 0$ при $b > a$. Тогда (6) можно переписать в виде

$$\binom{s}{1} \tilde{b}_k^1 + \dots + \binom{s}{s} \tilde{b}_k^s + \dots + \binom{s}{k-1} \tilde{b}_k^{k-1} = (-1)^{k+1} 2^k \left(\frac{s}{2} \right)^{[k]}$$

и, значит, вектор $\tilde{b}_k = (\tilde{b}_k^1, \dots, \tilde{b}_k^{k-1})$ является решением системы

$$C\tilde{b}_k = (-1)^{k+1}2^k \left(\left(\frac{j}{2} \right)^{[k]} \right)_{j=1, \dots, k-1}$$

с матрицей $C = \left(\binom{i}{j} \right)_{i,j=1, \dots, k-1}$.

Нетрудно убедиться, что треугольная матрица C обратима и

$$C^{-1} = \left((-1)^{i+j} \binom{i}{j} \right)_{i,j=1, \dots, k-1}.$$

Это следует из равенства (при $i \geq j$)

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{k-1} (-1)^{s+j} \binom{i}{s} \binom{s}{j} &= (-1)^j \sum_{s=j}^i (-1)^s \binom{i}{s} \binom{s}{j} = (-1)^j \frac{j!}{j!} \sum_{k=0}^{i-j} \frac{(-1)^{k+j}}{(i-j-k)!k!} \\ &= \frac{i!}{(i-j)!j!} \sum_{k=0}^{i-j} (-1)^k \frac{(i-j)!}{(i-j-k)!k!} = \binom{i}{j} \delta_{i-j,0} = \delta_{i,j}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\tilde{b}_k = (-1)^{k+1}2^k \left(\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{i+j} \binom{i}{j} \left(\frac{j}{2} \right)^{[k]} \right)_{i=1, \dots, k-1}$$

и, значит, учитывая, что $\tilde{b}_k^s = s!b_k^s$, получим

$$b_k^s = (-1)^{k+s} \frac{2^k}{s!} \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} \binom{s}{j} \left(\frac{j}{2} \right)^{[k]}.$$

Отсюда сразу следует (9).

Проверим полученную формулу (9) при $s = 1$. Имеем

$$b_k^1 = (-1)^{k+1}2^k \left(\frac{1}{2} \right)^{[k]} = (2k-3)!!,$$

что совпадает с ранее найденным. Вычислим неизвестное число b_k^2 . При $k > 1$ из (9) найдем

$$b_k^2 = (-1)^{k+2}2^k \left(\frac{1}{2} \right)^{[k]} = -b_k^1 = -(2k-3)!!. \quad (10)$$

Итак, мы нашли значение первой строки параллельной левой стороне треугольника (2). При $k = 2$ имеем известное значение $b_2^2 = -1$. Попытаемся преобразовать формулу (9) к более компактному виду.

ЛЕММА 5. При $k \in \mathbb{N}$ и целом s таком, что $1 \leq s \leq k$, справедливо равенство

$$b_k^s = (-1)^{k+1} \frac{2^k}{s!} ((\sqrt{t}-1)^s)_{|t=1}^{(k)}. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно заметить, что

$$\left(\frac{j}{2}\right)^{[k]} = \frac{j}{2} \left(\frac{j}{2} - 1\right) \cdots \left(\frac{j}{2} - k + 1\right) = (t^{j/2})_{|t=1}^{(k)}.$$

Поэтому, при целых $k > 1$ и s таких, что $1 \leq s \leq k - 1$, в соответствии с (9) имеют место равенства

$$\begin{aligned} b_k^s &= (-1)^{k+s} \frac{2^k}{s!} \sum_{j=1}^s (-1)^{j+1} \binom{s}{j} \left(\frac{j}{2}\right)^{[k]} = (-1)^{k+1} \frac{2^k}{s!} \sum_{j=1}^s (-1)^{s-j} \binom{s}{j} ((\sqrt{t})^j)_{|t=1}^{(k)} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{2^k}{s!} \left(\sum_{j=1}^s (-1)^{s-j} \binom{s}{j} (\sqrt{t})^j \right)_{|t=1}^{(k)} = (-1)^{k+1} \frac{2^k}{s!} ((\sqrt{t} - 1)^s)_{|t=1}^{(k)}, \end{aligned}$$

т.е. (11) верна при указанных k и s . Формула (11) справедлива и при $s = k \geq 1$. Действительно, подставляя $s = k$ в (11), получим

$$\begin{aligned} b_k^k &= (-1)^{k+1} \frac{2^k}{k!} ((\sqrt{t} - 1)^k)_{|t=1}^{(k)} = (-1)^{k+1} \frac{2^k}{k!} \left(\frac{k}{2\sqrt{t}} (\sqrt{t} - 1)^{k-1} \right)_{|t=1}^{(k-1)} \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{t}} \frac{2^{k-1}}{(k-1)!} ((\sqrt{t} - 1)^{k-1})_{|t=1}^{(k-1)} = -b_{k-1}^{k-1} = (-1)^{k-1} b_1^1. \end{aligned}$$

Если подставить $s = k = 1$ в (11), то получим $b_1^1 = 1$ и, значит, $b_k^k = (-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$. Ранее было вычислено, что $b_k^k = (-1)^{k+1}$, и, значит, формула (11) верна при $s = k$.

Еще немного преобразуем формулу для записи чисел b_k^s . Докажем вспомогательную лемму.

ЛЕММА 6. Пусть $f \in C^k(a, b)$. Тогда

$$(f^s(t))^{(k)} = \sum_{i_1 + \dots + i_s = k} \binom{k}{i_1 \dots i_s} f^{(i_1)}(t) \cdots f^{(i_s)}(t), \quad t \in (a, b). \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $k = 0$ формула очевидна. При $k = 1$ имеем $(f^s(t))' = s f^{s-1}(t) f'(t)$, а по формуле (12) получим

$$\begin{aligned} &\sum_{i_1 + \dots + i_s = 1} \binom{1}{i_1 \dots i_s} f^{(i_1)}(t) \cdots f^{(i_s)}(t) \\ &= f'(t) (f^{(0)}(t))^{s-1} + \dots + (f^{(0)}(t))^{s-1} f'(t) = s f^{s-1}(t) f'(t), \end{aligned}$$

и, значит, формула (12) верна при $k = 1$. Пусть теперь (12) верна при некотором $k \in \mathbb{N}$. Докажем ее верность и при $k + 1$. Имеем

$$\begin{aligned} (f^s(t))^{(k+1)} &= ((f^s(t))^{(k)})' = \left(\sum_{i_1 + \dots + i_s = k} \binom{k}{i_1 \dots i_s} f^{(i_1)}(t) \cdots f^{(i_s)}(t) \right)' \\ &= \sum_{i_1 + \dots + i_s = k} \binom{k}{i_1 \dots i_s} (f^{(i_1+1)}(t) \cdots f^{(i_s)}(t) + \dots + f^{(i_1)}(t) \cdots f^{(i_s+1)}(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i_1 + \dots + i_s - 1 = k} \left(\binom{k}{i_1 - 1 \dots i_s} + \dots + \binom{k}{i_1 \dots i_s - 1} \right) f^{(i_1)}(t) \dots f^{(i_s)}(t) \\
&= \sum_{i_1 + \dots + i_s = k+1} \binom{k}{i_1 \dots i_s} (i_1 + \dots + i_s) f^{(i_1)}(t) \dots f^{(i_s)}(t) \\
&= \sum_{i_1 + \dots + i_s = k+1} \binom{k+1}{i_1 \dots i_s} f^{(i_1)}(t) \dots f^{(i_s)}(t),
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

4. Рекуррентное уравнение. Для $k, s \in \mathbb{N}$ введем обозначение

$$a_k^s = ((\sqrt{t} - 1)^s)^{(k)}_{|t=1}. \quad (13)$$

Исследуем треугольник A , аналогичный треугольнику (2), но состоящий из чисел a_k^s при $k, s \in \mathbb{N}$ и $s \leq k$. Если $s = 0$ или $k = 0$, то значение a_k^s тоже может быть вычислено: $a_k^0 = a_0^s = 0$. Кроме этого, по (13) $a_1^1 = 1/2$ и $a_0^0 = 1$.

ЛЕММА 7. Для чисел a_k^s верно рекуррентное равенство

$$a_{k+1}^s = \left(\frac{s}{2} - k \right) a_k^s + \frac{s}{2} a_k^{s-1}, \quad (14)$$

причем $a_k^s = 0$ при $s > k$ и $a_k^0 = 0$, $k \in \mathbb{N}$, но $a_0^0 = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно заметить, что если степень s выше порядка производной k , то из (13) следует, что $a_k^s = 0$. Значения a_1^1 и a_0^0 вычислены по формуле (13) перед леммой. Воспользуемся формулой (12) из леммы 6 при $f(t) = \sqrt{t} - 1$. Поскольку

$$(\sqrt{t} - 1)^{(m)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{2} - m + 1 \right) t^{1/2-m} = \frac{(-1)^{m-1}}{2^m} (2m-3)!! t^{1/2-m},$$

то можем записать

$$\begin{aligned}
&((\sqrt{t} - 1)^s)^{(k)} \\
&= \sum_{i_1 + \dots + i_s = k, i_j > 0} \binom{k}{i_1 \dots i_s} (-1)^{k-s} \frac{(2i_1 - 3)!! \dots (2i_s - 3)!!}{2^k} t^{s/2-k} \\
&\quad + s \sum_{i_1 + \dots + i_{s-1} = k, i_j > 0} \binom{k}{i_1 \dots i_{s-1}} (-1)^{k-s+1} \frac{(2i_1 - 3)!! \dots (2i_{s-1} - 3)!!}{2^k} \\
&\quad \times t^{(s-1)/2-k} (\sqrt{t} - 1) \\
&\quad + s(s-1) \sum_{i_1 + \dots + i_{s-2} = k, i_j > 0} \binom{k}{i_1 \dots i_{s-2}} (-1)^{k-s+2} \frac{(2i_1 - 3)!! \dots (2i_{s-2} - 3)!!}{2^k} \\
&\quad \times t^{(s-2)/2-k} (\sqrt{t} - 1)^2 \\
&\quad + \dots \\
&= a_k^s t^{s/2-k} + s a_k^{s-1} t^{(s-1)/2-k} (\sqrt{t} - 1) + s(s-1) a_k^{s-2} t^{(s-2)/2-k} (\sqrt{t} - 1)^2 + \dots.
\end{aligned} \quad (15)$$

Поэтому

$$((\sqrt{t}-1)^s)^{(k+1)} = a_{k+1}^s t^{s/2-k-1} + s a_{k+1}^{s-1} t^{(s-1)/2-k-1} (\sqrt{t}-1) + \dots$$

С другой стороны, дифференцируя (15), получим

$$((\sqrt{t}-1)^s)^{(k+1)} = \left(\frac{s}{2} - k\right) a_k^s t^{s/2-k-1} + \frac{s}{2} a_k^{s-1} t^{(s-2)/2-k} + (\sqrt{t}-1) F(t).$$

Полагая в предыдущих равенствах $t = 1$, будем иметь

$$a_{k+1}^s = \left(\frac{s}{2} - k\right) a_k^s + \frac{s}{2} a_k^{s-1},$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что уравнение, похожее на (14), –

$$a_{k+1}^s = (k - 2s + 1) a_k^s + \frac{1}{2} a_k^{s-1}$$

– применялось в [5] при построении специальных полиномов. Значения a_k^s с помощью формулы (14) были вычислены для нескольких строк треугольника A , параллельных боковым сторонам, и по полученным формулам было сделано предположение о значениях a_k^s . Пропуская эти выкладки, докажем получившуюся формулу.

ЛЕММА 8. *Решение рекуррентного уравнения (14) при граничных условиях $a_k^0 = a_k^{k+1} = 0$, $k \in \mathbb{N}$, и $a_0^0 = 1$ единственно и имеет вид*

$$a_k^s = (-1)^{k+s} \frac{(2k-s-1)!s}{2^k(2k-2s)!!}, \quad (16)$$

где $s, k \in \mathbb{N}$ и $s \leq k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем существование и единственность решения уравнения (14) при указанных граничных условиях:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 0 & & \\ & & & 0 & & a_1^1 & & 0 \\ & 0 & & a_2^1 & & a_2^2 & & 0 & 0 \\ 0 & & a_3^1 & & a_3^2 & & a_3^3 & & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Шаг 1. Полагая в формуле (14) $k = 0$ и $s = 1$, в силу граничных условий получим

$$a_1^1 = \frac{1}{2} a_0^1 + \frac{1}{2} a_0^0 = \frac{1}{2}.$$

Формула (16) дает это же значение.

Шаг 2. Вычислим значение a_k^1 с использованием формулы (14). Учитывая, что $a_k^0 = 0$, найдем

$$\begin{aligned} a_k^1 &= \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) a_{k-1}^1 + \frac{1}{2} a_{k-1}^0 = -\frac{2k-3}{2} a_{k-1}^1 = (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)!!}{2^{k-1}} a_1^1 \\ &= (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)!!}{2^k} = (-1)^{k+1} \frac{(2k-1)!!}{2^k(2k-1)}. \end{aligned}$$

Эта формула выведена при $k > 1$, но верна и при $k = 1$. По формуле (16) получим это же значение:

$$a_k^1 = (-1)^{k+1} \frac{(2k-2)!}{2^k(2k-2)!!} = (-1)^{k+1} \frac{(2k-3)!!}{2^k}.$$

Шаг 3. Вычислим значение a_k^k с использованием формулы (14). Учитывая, что $a_k^{k+1} = 0$, найдем

$$a_k^k = \left(\frac{k}{2} - k + 1\right) a_{k-1}^k + \frac{k}{2} a_{k-1}^{k-1} = \frac{k}{2} a_{k-1}^{k-1} = \frac{k!}{2^{k-1}} a_1^1 = \frac{k!}{2^k}.$$

Эта формула получена при $k > 1$, но учитывая, что $a_1^1 = 1/2$, получаем, что она будет верна и при $k \geq 1$. По формуле (16) получим это же значение:

$$a_k^k = \frac{(2k-k-1)!k}{2^k(2k-2k)!!} = \frac{k!}{2^k}.$$

Итак, значения a_k^s на боковых сторонах треугольника A вычислены и формула (16) задает решение уравнения (14) на сторонах треугольника A . Структура уравнения (14) такова, что по известным значениям a_k^s на боковых сторонах треугольника A все значения a_k^s внутри треугольника A определяются из уравнения (14) однозначно. Поэтому, если числа a_k^s , задаваемые формулой (16), удовлетворяют уравнению (14) внутри треугольника A , то формула (16) задает решение уравнения (14). Докажем это. Пусть a_k^s найдены из (16). Подставим их в правую часть формулы (14). Имеем

$$\begin{aligned} a_{k+1}^s &= \left(\frac{s}{2} - k\right) a_k^s + \frac{s}{2} a_k^{s-1} \\ &= (-1)^{k+s} \left(\frac{s}{2} - k\right) \frac{(2k-s-1)!s}{2^k(2k-2s)!!} + (-1)^{k+s-1} \frac{s}{2} \frac{(2k-s)!(s-1)}{2^k(2k-2s+2)!!} \\ &= (-1)^{k+s-1} \frac{(2k-s)!s}{2^{k+1}(2k-2s+2)!!} ((2k-2s+2) + (s-1)) \\ &= (-1)^{k+s+1} \frac{(2k-s+1)!s}{2^{k+1}(2k-2s+2)!!}, \end{aligned}$$

т.е. a_{k+1}^s тоже находится из (16). Лемма доказана.

5. Треугольник B и задача Неймана. Вернемся к треугольнику B .

ЛЕММА 9. Числа b_k^s , $s, k \in \mathbb{N}$, определяются формулой

$$b_k^s = (-1)^{s+1} \binom{2k-s-1}{s-1} \frac{(2k-2s+1)!!}{(2k-2s+1)} \quad (17)$$

и являются единственным решением рекуррентного уравнения

$$b_{k+1}^s = (2k-s)b_k^s - b_k^{s-1} \quad (18)$$

при граничных условиях

$$b_k^1 = \frac{(2k-1)!!}{(2k-1)} \quad \text{и} \quad b_k^k = (-1)^{k+1}, \quad k \in \mathbb{N},$$

в соответствии с (8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формулам (11), (13) и (16) запишем

$$\begin{aligned} b_k^s &= (-1)^{k+1} \frac{2^k}{s!} a_k^s = (-1)^{s+1} \frac{(2k-s-1)!}{(2k-2s)!!(s-1)!} \\ &= (-1)^{s+1} \binom{2k-s-1}{s-1} \frac{(2k-2s+1)!!}{(2k-2s+1)!}, \end{aligned}$$

т.е. формула (17) задает треугольник B . На боковых сторонах треугольника B формула (17) дает

$$\begin{aligned} b_k^1 &= \binom{2k-2}{0} \frac{(2k-1)!!}{(2k-1)!} = (2k-3)!!, \\ b_k^k &= (-1)^{k+1} \binom{2k-k-1}{k-1} \frac{(2k-2k+1)!!}{(2k-2k+1)!} = (-1)^{k+1}, \end{aligned}$$

что совпадает с граничными условиями. Подставим значение

$$a_k^s = (-1)^{k+1} \frac{s!}{2^k} b_k^s$$

в уравнение (14). Имеем

$$(-1)^{k+2} \frac{s!}{2^{k+1}} b_{k+1}^s = \left(\frac{s}{2} - k \right) (-1)^{k+1} \frac{s!}{2^k} b_k^s + \frac{s}{2} (-1)^{k+1} \frac{(s-1)!}{2^k} b_k^{s-1}.$$

После сокращения на $(-1)^{k+2} s! / 2^{k+1}$ получаем уравнение (18).

Лемма доказана.

Уравнение вида (18) задает арифметический треугольник наподобие треугольков Паскаля, Эйлера или Стирлинга [6]. Такие треугольники изучают по модулю простых чисел, например, [7]. Вычислим значение b_k^s для первых строк, параллельных боковым сторонам треугольника B . Имеем

$$b_k^2 = - \binom{2k-3}{1} \frac{(2k-3)!!}{(2k-3)!} = -(2k-3)!! = -b_k^1, \quad k \geq 2,$$

что соответствует (10),

$$b_k^{k-1} = (-1)^k \binom{k}{k-2} \frac{3!!}{3} = (-1)^k \binom{k}{2}, \quad k \geq 2,$$

$$b_k^{k-2} = (-1)^{k-1} \binom{k+1}{k-3} \frac{5!!}{5} = (-1)^{k-1} 3 \binom{k+1}{4}, \quad k \geq 3.$$

Вычисляя b_k^s по формуле (17), расширим треугольник B из (2) до шести строк

$$B = \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & -1 & & \\ & & 3 & & -3 & & 1 & & \\ & 15 & & -15 & & 6 & & -1 & \\ 105 & & -105 & & 45 & & -10 & & 1 \\ 945 & & -945 & & 420 & & -105 & & 15 & & -1 \\ \dots & & & & b_{k+1}^s = (2k-s)b_k^s - b_k^{s-1} & & & & \dots \end{array} \quad (19)$$

С учетом проделанных исследований теорема 1 переписывается в виде.

ТЕОРЕМА 10. Решение задачи Неймана (1) при $f_i \in C^{k-i}(\partial S)$, $i = 1, \dots, k$, существует тогда и только тогда, когда вектор $b_k = (b_k^1, \dots, b_k^k)$, равный k -й строке треугольника B из (19), ортогонален вектору

$$F_k = \left(\int_{\partial S} f_1(s) ds, \dots, \int_{\partial S} f_k(s) ds \right),$$

т.е.

$$(b_k, F_k) = \int_{\partial S} \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \binom{2k-j-1}{j-1} (2k-2j-1)!! f_j(s) ds = 0.$$

Например, для 4-гармонического уравнения условия разрешимости задачи Неймана имеют вид

$$\int_{\partial S} (15f_1(s) - 15f_2(s) + 6f_3(s) - f_4(s)) ds = 0.$$

Решение задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре при полиномиальных данных приведено в [8].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. В. Бицадзе, “О некоторых свойствах полигармонических функций”, *Дифференц. уравнения*, **24**:5 (1988), 825–831.
- [2] В. В. Карачик, “Об одной задаче для полигармонического уравнения в шаре”, *Сиб. матем. журн.*, **32**:55 (1991), 51–58.
- [3] А. В. Бицадзе, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1976.
- [4] Б. А. Бондаренко, *Обобщенные треугольники и пирамиды Паскаля, их фракталы, графы и приложения*, Фан, Ташкент, 1990.
- [5] V. V. Karachik, “On some special polynomials”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **132**:4 (2004), 1049–1058.
- [6] B. A. Bondarenko, V. V. Karachik, R. B. Tulyaganov, “Distribution of Eulerian and Stirling numbers mod p in arithmetical triangles”, *Вопросы вычислительной и прикладной математики*, **102**, Изд-во АН РУз, Ташкент, 1996, 133–140.
- [7] V. V. Karachik, “ P -Latin matrices and Pascal’s triangle modulo a prime”, *Fibonacci Quart.*, **34**:4 (1996), 362–372.
- [8] В. В. Карачик, “Полиномиальные решения задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре”, *Журн. СВУ. Сер. Матем. и физ.*, **5**:4 (2012), 527–546.

В. В. Карачик

Южно-Уральский государственный университет,
г. Челябинск
E-mail: karachik@susu.ru

Поступило

04.07.2012

Исправленный вариант

12.08.2013