Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ш. Малхасян, Псевдосимметрические уравнения
в свободном моноиде, *Матем. заметки*, 2014, том 95,
выпуск 4, 577–589

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10117>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 02:11:01

Псевдосимметрические уравнения в свободном моноиде

А. Ш. Малхасян

В 2011 г. Маканиным было найдено общее решение симметрического уравнения вида

$$x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n = x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1$$

в свободном моноиде. В настоящей работе дается некоторое обобщение этого результата. Именно, будет описано общее решение так называемых псевдосимметрических уравнений в свободном моноиде, которые получаются из симметрических уравнений в результате транспозиции одной (любой) пары соседних переменных.

Библиография: 2 названия.

DOI: 10.4213/mzm10117

В работе [1] было дано описание общего решения симметрического уравнения

$$x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n = x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1 \quad (1)$$

в свободном моноиде с образующими

$$a_1, a_2, \dots, a_m. \quad (2)$$

Настоящая статья посвящена описанию общего решения некоторого класса уравнений в свободном моноиде. Эти уравнения получаются из симметрических уравнений (1), которые рассматривались в статье Маканина [1] в результате транспозиции одной пары соседних переменных. Такие уравнения мы называем *псевдосимметрическими* уравнениями.

Напомним, что *параметрическими словами* называются все слова в алфавите $a_1, a_2, \dots, a_m, x_1, x_2, \dots, x_n$, а также все выражения, получающиеся из них последовательным применением операции умножения uv и операции возведение в степень $(u)^\lambda$, где λ – параметр, принимающий целые неотрицательные значения.

В работе [1] общее решение уравнения (1) было описано с помощью параметрической функции $Sm(x_1, x_2, \dots, x_n)_{i}^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s}$, зависящей от словарных переменных $x_1, x_2, \dots, x_k$ и натуральных параметров $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ (в качестве натуральных параметров в данной статье мы будем понимать переменные, принимающие целые неотрицательные значения).

Пусть $w_1, w_2, \dots, w_n$ – набор параметрических слов, зависящих от словарных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ и натуральных параметров $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$. Тогда набор

слов $W_1, W_2, \dots, W_n$ в алфавите (2), полученный подстановками некоторых слов $T_1, T_2, \dots, T_k$ вместо словарных переменных и, соответственно, целых неотрицательных чисел $n_1, n_2, \dots, n_s$ вместо параметров $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ называется *значением* этого набора для слов $T_1, T_2, \dots, T_k$ и чисел $n_1, n_2, \dots, n_s$.

Набор параметрических слов $w_1, w_2, \dots, w_n$ называется *общим решением* уравнения

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, если все значения этого набора параметрических слов и только они являются решениями данного уравнения.

В настоящей статье рассматриваются уравнения вида

$$x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n = \cdots x_j x_{j+1} \cdots, \quad (3)$$

где правая часть получена из правой части уравнения (1) единственной транспозицией пары соседних символов $x_{j+1} x_j$, при этом j может принимать значения $n-1, n-2, \dots, 2, 1$. Так как рассматриваемые нами уравнения определяются однозначно числом неизвестных n и парой соседних переменных $x_j x_{j+1}$, то будем обозначать их через $\Omega(n, j)$.

Мы докажем, что общее решение любого такого уравнения описывается с помощью некоторого набора из n параметрических слов w_i , $i = 1, 2, \dots, n$, каждое из которых определяется как рекурсивная функция

$$w_i = f_i(n, j; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s),$$

где через s мы обозначили общее число натуральных параметров всех параметрических слов данного набора, допуская, что многие из них могут быть фиктивными. При этом в результате всевозможных применений рекурсий возникает бесконечное число параметрических слов и число параметров s невозможно ограничить.

Функции

$$f_i(n, j; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

определяются следующим образом. Сначала определим их при $n = 2$ и $n = 3$.

I. При $n = 2$

$$\begin{aligned} f_1(2, 0; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s) &= x_1^{\lambda_1}, \\ f_2(2, 0; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s) &= x_1^{\lambda_2}, \\ f_1(2, 1; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s) &= x_1, \\ f_2(2, 1; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s) &= x_2, \end{aligned}$$

II. При $n = 3$

$$\begin{aligned} f_1(3, 0; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s) &= (x_1 x_2)^{\lambda_1} x_1, \\ f_2(3, 0; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s) &= x_2 (x_1 x_2)^{\lambda_2}, \\ f_3(3, 0; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s) &= (x_1 x_2)^{\lambda_3} x_1, \\ f_1(3, 1; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s) &= (x_1 x_2)^{\lambda_1} x_1, \\ f_2(3, 1; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s) &= x_2 (x_1 x_2)^{\lambda_2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3(3, 1; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s) &= (x_1 x_2)^{\lambda_3}, \\
f_1(3, 2; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s) &= (x_3 x_1)^{\lambda_1} x_3, \\
f_2(3, 2; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s) &= x_1 (x_3 x_1)^{\lambda_2}, \\
f_3(3, 2; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s) &= (x_3 x_1)^{\lambda_3}.
\end{aligned}$$

Определим также слова $f_i(n, j) = 1$, получающиеся из слов

$$f_i(n, j; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s)$$

при пустом наборе натуральных параметров.

Слова $f_i(n, j; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s)$ определяются дизъюнкцией следующих рекурсий.

Рекурсия 1:

$$\begin{aligned}
f_1(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= (f_{n-2}(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_{n-1}(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_n(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s))^{\lambda_1} \\
&\quad \times f_{n-2}(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s), \\
f_2(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= (f_{n-1}(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_n(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_{n-2}(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s))^{\lambda_2} \\
&\quad \times f_{n-1}(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s), \\
f_n(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= (f_{n-2}(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_{n-1}(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_n(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s))^{\lambda_1 + \lambda_2 + 1} \\
&\quad \times f_{n-2}(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_{n-1}(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s), \\
f_i(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= f_{i-2}(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) \quad \text{для } i = 3, \dots, n-1,
\end{aligned}$$

либо

$$\begin{aligned}
f_1(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= (f_{n-2}(n, n-1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) \times f_{n-1}(n, n-1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_n(n, n-1; \lambda_3, \dots, \lambda_s))^{\lambda_1} \\
&\quad \times f_{n-2}(n, n-1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_{n-1}(n, n-1; \lambda_3, \dots, \lambda_s), \\
f_2(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= (f_n(n, n-1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_{n-2}(n, n-1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_{n-1}(n, n-1; \lambda_3, \dots, \lambda_s))^{\lambda_2} \\
&\quad \times f_n(n, n-1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_{n-2}(n, n-1; \lambda_3, \dots, \lambda_s), \\
f_n(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= (f_{n-2}(n, n-1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_{n-1}(n, n-1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_n(n, n-1; \lambda_3, \dots, \lambda_s))^{\lambda_1 + \lambda_2 + 1} \\
&\quad \times f_{n-2}(n, n-1; \lambda_3, \dots, \lambda_s), \\
f_i(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= f_{i-2}(n, n-1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) \quad \text{для } i = 3, \dots, n-1.
\end{aligned}$$

Рекурсия 2:

$$\begin{aligned}
f_1(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= (f_3(n, 1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_1(n, 1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_2(n, 1; \lambda_3, \dots, \lambda_s))^{\lambda_1} \\
&\quad \times f_3(n, 1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_1(n, 1; \lambda_3, \dots, \lambda_s),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= (f_3(n, 1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_1(n, 1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_2(n, 1; \lambda_3, \dots, \lambda_s))^{\lambda_2} \\
&\quad \times f_2(n, 1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_3(n, 1; \lambda_3, \dots, \lambda_s), \\
f_n(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= (f_3(n, 1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_1(n, 1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_2(n, 1; \lambda_3, \dots, \lambda_s))^{\lambda_1 + \lambda_2} \\
&\quad \times f_3(n, 1; \lambda_3, \dots, \lambda_s), \\
f_i(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= f_{i+1}(n, 1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) \quad \text{для } i = 3, \dots, n-1,
\end{aligned}$$

либо

$$\begin{aligned}
f_1(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= f_2(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_3(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_1(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) \\
&\quad \times (f_2(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_3(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_1(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s))^{\lambda_1} \\
&\quad \times f_2(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s), \\
f_2(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= (f_3(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_1(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_2(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s))^{\lambda_2} \\
&\quad \times f_3(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s),
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
f_1(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= (f_2(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_3(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_1(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s))^{\lambda_1} \\
&\quad \times f_2(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s), \\
f_2(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= f_3(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_1(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_2(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) \\
&\quad \times (f_3(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_1(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_2(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s))^{\lambda_2} \\
&\quad \times f_3(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s), \\
f_n(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= (f_2(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_3(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_1(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s))^{\lambda_1 + \lambda_2} \\
&\quad \times f_2(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_3(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s), \\
f_i(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= f_{i+1}(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s)_{i+1}^2 \quad \text{для } i = 3, \dots, n-1.
\end{aligned}$$

Рекурсия 3:

$$\begin{aligned}
f_1(n, n-1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= (f_3(n, 1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_1(n, 1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_2(n, 1; \lambda_3, \dots, \lambda_s))^{\lambda_1 + \lambda_2 + 1} \\
&\quad \times f_3(n, 1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) \\
f_{n-1}(n, n-1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= (f_3(n, 1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_1(n, 1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_2(n, 1; \lambda_3, \dots, \lambda_s))^{\lambda_1} \\
&\quad \times f_3(n, 1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_1(n, 1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) \\
f_n(n, n-1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= (f_2(n, 1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_3(n, 1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_1(n, 1; \lambda_3, \dots, \lambda_s))^{\lambda_2} \\
&\quad \times f_2(n, 1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_3(n, 1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) \\
f_i(n, n-1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= f_{i+2}(n, 1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) \quad \text{для } i = 2, \dots, n-2,
\end{aligned}$$

либо

$$\begin{aligned}
 & f_1(n, n-1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) \\
 &= (f_2(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_3(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_1(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s))^{\lambda_1 + \lambda_2 + 1} \\
 &\quad \times f_2(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_3(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) \\
 & f_{n-1}(n, n-1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) \\
 &= (f_2(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_3(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_1(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s))^{\lambda_1} \\
 &\quad \times f_2(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) \\
 & f_n(n, n-1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) \\
 &= (f_3(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_1(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_2(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s))^{\lambda_2} \\
 &\quad \times f_3(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) \\
 & f_i(n, n-1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = f_{i+2}(n, 2; \lambda_1, \dots, \lambda_s) \quad \text{для } i = 2, \dots, n-2.
 \end{aligned}$$

Рекурсия 4:

$$\begin{aligned}
 & f_1(n, n-1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) \\
 &= (f_{n-2}(n, n-1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_{n-1}(n, n-1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_n(n, n-1; \lambda_3, \dots, \lambda_s))^{\lambda_1 + \lambda_2} \\
 &\quad \times f_{n-2}(n, n-1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) \\
 & f_{n-1}(n, n-1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) \\
 &= (f_{n-2}(n, n-1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_{n-1}(n, n-1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_n(n, n-1; \lambda_3, \dots, \lambda_s))^{\lambda_1} \\
 &\quad \times f_{n-2}(n, n-1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_{n-1}(n, n-1; \lambda_3, \dots, \lambda_s), \\
 & f_n(n, n-1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) \\
 &= (f_n(n, n-1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_{n-2}(n, n-1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_{n-1}(n, n-1; \lambda_3, \dots, \lambda_s))^{\lambda_2} \\
 &\quad \times f_n(n, n-1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_{n-2}(n, n-1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) \\
 & f_i(n, n-1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = f_{i-1}(n, n-1; \lambda_3, \dots, \lambda_s) \quad \text{для } i = 2, \dots, n-2,
 \end{aligned}$$

либо

$$\begin{aligned}
 & f_1(n, n-1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) \\
 &= (f_{n-2}(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_{n-1}(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_n(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s))^{\lambda_1 + \lambda_2} \\
 &\quad \times f_{n-2}(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_{n-1}(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s), \\
 & f_{n-1}(n, n-1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) \\
 &= (f_{n-2}(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_{n-1}(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_n(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s))^{\lambda_1} \\
 &\quad \times f_{n-2}(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_{n-1}(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_n(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) \\
 &\quad \times f_{n-2}(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s), \\
 & f_n(n, n-1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) \\
 &= (f_{n-1}(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_n(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_{n-2}(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s))^{\lambda_2} \\
 &\quad \times f_{n-1}(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s),
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
& f_{n-1}(n, n-1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) \\
&= (f_{n-2}(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_{n-1}(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_n(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s))^{\lambda_1} \\
&\quad \times f_{n-2}(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s), \\
& f_n(n, n-1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) \\
&= (f_{n-1}(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_n(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_{n-2}(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s))^{\lambda_2} \\
&\quad \times f_{n-1}(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_n(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_{n-2}(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) \\
&\quad \times f_{n-1}(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s), \\
& f_i(n, n-1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = f_{i-1}(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s) \quad \text{для } i = 2, \dots, n-2.
\end{aligned}$$

Рекурсия 5:

$$\begin{aligned}
& f_1(n, j; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = (f_2(n, j+1; \lambda_2, \dots, \lambda_s) f_1(n, j+1; \lambda_2, \dots, \lambda_s))^{\lambda_1+1} \\
&\quad \times f_2(n, j+1; \lambda_2, \dots, \lambda_s), \\
& f_n(n, j; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = (f_2(n, j+1; \lambda_2, \dots, \lambda_s) f_2(n, j+1; \lambda_2, \dots, \lambda_s))^{\lambda_1} \\
&\quad \times f_2(n, j+1; \lambda_2, \dots, \lambda_s), \\
& f_i(n, j; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = f_{i+1}(n, j+1, j+1; \lambda_2, \dots, \lambda_s) \\
&\quad \text{для } i = 2, \dots, n-1, \quad j = 2, \dots, n-1,
\end{aligned}$$

либо

$$\begin{aligned}
& f_1(n, j; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = (f_{n-1}(n, j-1; \lambda_2, \dots, \lambda_s) f_n(n, j-1; \lambda_2, \dots, \lambda_s))^{\lambda_1} \\
&\quad \times f_{n-1}(n, j-1; \lambda_2, \dots, \lambda_s), \\
& f_n(n, j; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = (f_{n-1}(n, j-1; \lambda_2, \dots, \lambda_s) f_n(n, j-1; \lambda_2, \dots, \lambda_s))^{\lambda_1+1} \\
&\quad \times f_{n-1}(n, j-1; \lambda_2, \dots, \lambda_s), \\
& f_i(n, j; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = f_{i-1}(n, j-1; \lambda_2, \dots, \lambda_s) \\
&\quad \text{для } i = 2, \dots, n-1, \quad j = 2, \dots, n-1.
\end{aligned}$$

Рекурсия 6:

$$\begin{aligned}
& f_1(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = x_{n-1}, \\
& f_2(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = x_n, \\
& f_n(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = x_{n-1} x_n, \\
& f_i(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = f_{i-2}(n-3, 0; \lambda_1, \dots, \lambda_s) \quad \text{для } i = 3, \dots, n-1,
\end{aligned}$$

либо

$$\begin{aligned}
& f_1(n, n-1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = x_{n-1} x_n, \\
& f_{n-1}(n, n-1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = x_{n-1} \\
& f_n(n, n-1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = x_n, \\
& f_i(n, n-1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = f_{i-1}(n-3, 0; \lambda_1, \dots, \lambda_s) \quad \text{для } i = 2, \dots, n-2.
\end{aligned}$$

Рекурсия 7:

$$f_j(n, j; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = 1,$$

и если $i < j$, то

$$f_i(n, j; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = f_i(n-1, 0; \lambda_1, \dots, \lambda_s),$$

если же $i > j$, то

$$f_i(n, j; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = f_{i-1}(n-1, 0; \lambda_1, \dots, \lambda_s);$$

либо

$$f_{j+1}(n, j; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = 1,$$

и если $i < j+1$, то

$$f_i(n, j; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = f_i(n-1, 0; \lambda_1, \dots, \lambda_s),$$

если же $i > j+1$, то

$$f_i(n, j; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = f_{i-1}(n-1, 0; \lambda_1, \dots, \lambda_s),$$

$$f_i(n, j; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = f_{i-1}(n-1, 0; \lambda_1, \dots, \lambda_s);$$

наконец, если

$$f_k(n, j; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = 1 \quad \text{для некоторого } k \neq j, \quad k \neq j+1,$$

то, если $i < k < j$

$$f_i(n, j; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = f_i(n-1, j-1; \lambda_1, \dots, \lambda_s),$$

и если $i > k$, то

$$f_i(n, j; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = f_{i-1}(n-1, j-1; \lambda_1, \dots, \lambda_s);$$

если же $i > k > j$, то

$$f_i(n, j; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = f_{i-1}(n, j-1; \lambda_1, \dots, \lambda_s),$$

и если $i < k$, то

$$f_i(n, j; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = f_{i-1}(n-1, j; \lambda_1, \dots, \lambda_s).$$

Рекурсия 8:

$$f_1(n, j; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = x_{n-1},$$

$$f_n(n, j; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = x_{n-1},$$

$$f_j(n, j; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = f_{i-1}(n-2, j-1; \lambda_1, \dots, \lambda_s),$$

$$\text{для } i = 2, \dots, n-2, \quad j = 2, \dots, n-2.$$

Обозначим через $f_i(n, 0; \lambda_1, \dots, \lambda_s)$ слова $S(x_1, x_2, \dots, x_n)_{i}^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s}$, рекурсивность которых была установлена в [1], и перепишем их в новых обозначениях.

Рекурсия 9:

$$\begin{aligned}
 f_1(n, 0; \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= (f_2(n, 0; \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_1(n, 0; \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s))^{\lambda_1+1} \\
 &\quad \times f_2(n, 0; \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s) \\
 f_i(n, 0; \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= f_{i+1}(n, 0; \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s) \quad \text{для } i = 2, \dots, n-1, \\
 f_n(n, 0; \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= (f_2(n, 0; \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_1(n, 0; \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s))^{\lambda_1} \\
 &\quad \times f_2(n, 0; \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s).
 \end{aligned}$$

Рекурсия 10:

$$\begin{aligned}
 f_1(n, 0; \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= (f_{n-1}(n, 0; \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_n(n, 0; \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s))^{\lambda_1} \\
 &\quad \times f_{n-1}(n, 0; \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s) \\
 f_i(n, 0; \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= f_{i-1}(n, 0; \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s) \quad \text{для } i = 2, \dots, n-1, \\
 f_n(n, 0; \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= (f_{n-1}(n, 0; \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s) f_n(n, 0; \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s))^{\lambda_1+1} \\
 &\quad \times f_{n-1}(n, 0; \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s).
 \end{aligned}$$

Рекурсия 11:

$$\begin{aligned}
 f_1(n, 0; \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= x_{n-1}, \\
 f_j(n, 0; \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= f_{j-1}(n-2, 0; \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s) \quad \text{для } j = 2, \dots, n-1, \\
 f_n(n, 0; \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= x_{n-1}.
 \end{aligned}$$

ЛЕММА 1. Если слово A есть собственное начало и конец слова B , то найдутся такие слова P и Q и такое целое неотрицательное число λ , что выполнены равенства

$$A = (PQ)^\lambda P, \quad B = (PQ)^{\lambda+1} P. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $B = AK$ и $\partial(A) \leq \partial(K)$, то $B = ACA$, $A = P$, $C = Q$. В случае $\partial(A) > \partial(K)$ доказательство проведем индукцией по длине слова B . Если $\partial(B) = 1$, то все очевидно. Пусть слово B имеет вид $AK = MA$, где M – начало слова A , а K – его конец. Но тогда $A = MA_1$ и $A = A_1K$, и слово A_1 есть собственное начало и конец слова A . По индуктивному предположению найдется такое целое неотрицательное число λ_1 и слова P и Q такие, что $A_1 = (PQ)^{\lambda_1} P$, $A = (PQ)^{\lambda_1+1} P$. Слово B имеет вид MA_1K , и так как $A = (PQ)^{\lambda_1+1} P$, то $MA_1 = (PQ)^{\lambda_1+1} P$ и $M = PQ$. Положим $\lambda = \lambda_1 + 1$, откуда немедленно следует справедливость формул (4).

ЛЕММА 2. Если слово AB есть начало и конец слова C , то найдутся такие слова P , Q , R и такие целые неотрицательные числа λ_1 и λ_2 , что выполнены равенства

$$A = (PQR)^{\lambda_1} P, \quad B = (QRP)^{\lambda_2} Q, \quad C = (PQR)^{\lambda_1+\lambda_2+1} PQ, \quad (5)$$

либо

$$A = (PQR)^{\lambda_1} PQ, \quad B = (RPQ)^{\lambda_2} RP, \quad C = (PQR)^{\lambda_1+\lambda_2+2} P. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко следует из леммы 1, если положить $AB = (ST)^\lambda S$, $C = (ST)^{\lambda+1}S$. Возможны два варианта: либо разрез слова AB на A и B происходит в слове S и получаются формулы (5), либо – в слове T , и тогда получаются, соответственно, формулы (6).

Аналогично доказывается и

ЛЕММА 3. Если слово C есть начало и конец слова AB , то найдутся такие слова P, Q, R и такие целые неотрицательные числа λ_1, λ_2 , что либо будут выполнены равенства

$$A = (PQR)^{\lambda_1}PQ, \quad B = (RPQ)^{\lambda_2}RP, \quad C = (PQR)^{\lambda_1+\lambda_2}P, \quad (7)$$

либо будет выполнена одна из следующих систем равенств:

$$A = PQR(PQR)^{\lambda_1}P, \quad B = Q(RPQ)^{\lambda_2}, \quad C = (PQR)^{\lambda_1+\lambda_2}PQ \quad (8)$$

или

$$A = (PQR)^{\lambda_1}P, \quad B = Q(RPQ)^{\lambda_2}RPQ, \quad C = (PQR)^{\lambda_1+\lambda_2}PQ. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует из леммы 1, если положить $AB = (ST)^{\lambda+1}S$, $C = (ST)^\lambda S$. В первом случае разрез слова AB проходит по слову S , во втором случае – по слову T .

ТЕОРЕМА 1. Упорядоченный набор параметрических слов

$$(f_1(n, j; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s), f_2(n, j; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s), \dots, f_n(n, j; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s))$$

есть общее решение уравнения

$$x_1x_2 \cdots x_{n-1}x_n = x_n \cdots x_jx_{j+1} \cdots x_1,$$

$j = 0, 1, \dots, n-1$ (см. (3)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала выпишем общие решения некоторых уравнений в свободном моноиде с алфавитом образующих (2), которые указаны в работе [2]: общее решение уравнения

$$x_1x_2 = x_2x_1$$

есть набор $x_1^{\lambda_1}, x_1^{\lambda_2}$; общее решение уравнения

$$x_1x_2x_3 = x_3x_2x_1$$

есть набор $x_1^{\lambda_1}, x_1^{\lambda_2}, x_1^{\lambda_3}$, либо набор $(x_1x_2)^{\lambda_1}x_1, x_2(x_1x_2)^{\lambda_2}, (x_1x_2)^{\lambda_3}x_1$; и, наконец, общее решение уравнения

$$x_1x_2x_3 = x_3x_1x_2$$

есть набор $(x_1x_2)^{\lambda_1}x_1, x_2(x_1x_2)^{\lambda_2}, (x_1x_2)^{\lambda_3}$. Это легко заметить, обозначая $x_1x_2 = y$ и затем записывая общее решение уравнения $yx_3 = x_3y$ в виде $y = z^{\lambda_1}, x_3 = z^{\lambda_2}$. Учитывая $x_1x_2 = y$, получаем требуемое представление. Легко заметить, что выписанные компоненты решений совпадают с соответствующими выражениями $f_k(n, j; \lambda_1, \dots, \lambda_s)$, $k = 1, 2, 3$, $j = 0, 1$.

Далее, проводим индукцию по количеству рекурсий в построении набора функций $f_i(n, j; \lambda_1, \dots, \lambda_s)$.

Покажем, что набор параметрических слов

$$(f_i(n, j; \lambda_1, \dots, \lambda_s)), \quad i = 1, \dots, n,$$

есть решение уравнения (3), т.е. что при соответствующей подстановке компонент этого набора вместо неизвестных в уравнение $\Omega(n, j)$, должно выполняться графическое равенство.

Пусть $j = 1$, тогда

$$f_1(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) \cdots f_n(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) = f_n(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s) \cdots f_2(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s),$$

но это непосредственно проверяется подстановками формул, возможных в данном случае рекурсий 1, 2, 6, 7. Действительно, в каждом из полученных после этих подстановок выражений в результате возникающих затем сокращений, получаем равенства, которые по индуктивному предположению являются тождественными.

Так, например, если последней в построении функции

$$f_k(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s)$$

была рекурсия 6, то по индуктивному предположению общее решение уравнения

$$x_1 x_2 \cdots x_{n-3} = x_{n-3} \cdots x_2 x_1$$

есть набор

$$f_k(n-3, 0; \lambda_1, \dots, \lambda_s), \quad k = 1, \dots, n-3,$$

после подстановки которого в уравнение припишем к обеим частям и слева, и справа параметрическое слово $x_{n-1}x_n$, и воспользуемся формулами рекурсии 6. Доказательство утверждения для уравнения $\Omega(n, n-1)$ проводится точно так же с помощью рекурсий 3, 4, 7, либо рекурсии 6.

Наконец, с помощью рекурсий 5, 7, 8 непосредственная подстановка показывает, что набор $(f_k(n, j; \lambda_1, \dots, \lambda_s))$ есть решение уравнения $\Omega(n, j)$, $j = 2, \dots, n-1$.

Докажем, что любое решение уравнения $\Omega(n, j)$ есть значение набора

$$(f_1(n, j; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s), f_2(n, j; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s), \dots, f_n(n, j; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)).$$

Доказательство проведем индукцией по $d+n$, где $d = \partial(Z_1 Z_2 \cdots Z_n)$ – параметр, называемый *длиной решения* $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ уравнения $\Omega(n, j)$. Рассмотрим уравнение

$$x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n = x_n x_{n-1} \cdots x_1 x_2,$$

и пусть

$$X_1, \quad X_2, \quad \dots, \quad X_{n-1}, \quad X_n$$

– его решение. Докажем, что оно является значением набора

$$(f_1(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s), f_2(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s), \dots, f_n(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s)).$$

Если какая-то из компонент этого решения, например, X_α пусто, тогда набор $(X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n)$ без X_α оказывается решением уравнения $\Omega(n-1, j)$, и утверждение следует по индукции с помощью рекурсии 7. Пусть все компоненты решения не пустые. Тогда возможны следующие случаи:

- 1) $\partial(X_n) > \partial(X_1 X_2)$,
- 2) $\partial(X_n) < \partial(X_1 X_2)$,
- 3) $\partial(X_n) = \partial(X_1 X_2)$.

Случай 1: По лемме 2 найдутся такие слова P, Q, R и такие числа λ_1, λ_2 , что имеет место какая-либо из формул (5) или (6). Рассмотрим, например, формулу (6). Подставим слова

$$X_1 = (PQR)^{\lambda_1} P, \quad X_2 = (QRP)^{\lambda_2} Q, \quad X_n = (PQR)^{\lambda_1 + \lambda_2 + 1} PQ, \\ X_3, \quad \dots, \quad X_{n-1}$$

в уравнение $\Omega(n, 1)$ и после сокращений получим равенство

$$X_3 \cdots X_{n-1} PQR = R P Q \cdots X_3.$$

Обозначим

$$Y_{n-2} = P, \quad Y_{n-1} = Q, \quad Y_n = R, \quad Y_i = X_{i+2}, \quad i = 1, \dots, n-3,$$

и, как легко видеть, набор

$$(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$

есть решение уравнения $\Omega(n, n-2)$, длина которого меньше, чем длина набора

$$(X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n).$$

По индуктивному предположению оно является значением набора

$$(f_1(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s), f_2(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s), \dots, f_n(n, n-2; \lambda_3, \dots, \lambda_s)),$$

но тогда по первым формулам рекурсии 1 получаем, что набор

$$(X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n)$$

есть значение набора параметрических слов

$$(f_1(n, 1; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s), f_2(n, 1; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s), \dots, f_n(n, 1; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)).$$

Точно так же с помощью вторых формул рекурсии 1 доказывается утверждение и в случае (6).

Случай 2: $\partial(X_n) < \partial(X_1 X_2)$. В этом случае в силу леммы 3 для слов X_1, X_2, X_n выполнена одна из формул (7), (8), (9). Рассмотрим, например, формулу (9) (остальные формулы схожи, и рассуждения аналогичны):

$$X_1 = (PQR)^{\lambda_1} P, \quad X_2 = Q(RPQ)^{\lambda_2} R P Q, \quad X_n = (PQR)^{\lambda_1 + \lambda_2} P Q.$$

Подставим эти выражения в уравнение $\Omega(n, 1)$. После сокращений получим равенство

$$R P Q X_3 \dots X_{n-1} = X_{n-1} \dots X_3 P Q R.$$

Обозначим

$$Y_1 = R, \quad Y_2 = P, \quad Y_3 = Q, \quad Y_{i+1} = X_i, \quad i = 3, \dots, n-1.$$

Легко видеть, что набор

$$(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$

есть решение уравнения $\Omega(n, 2)$, длина которого меньше, чем длина набора

$$(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

По индуктивному предположению это есть набор

$$(f_1(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s), f_2(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s), \dots, f_n(n, 2; \lambda_3, \dots, \lambda_s)).$$

Из первых формул рекурсии 2 следует, что набор $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ есть значение набора параметрических слов

$$(f_1(n, 1; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s), f_2(n, 1; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s), \dots, f_n(n, 1; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)).$$

Случай 3: $\partial(X_n) = \partial(X_1 X_2)$. После подстановки решения $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n$ в уравнение $\Omega(n, 1)$ и сокращений получаем равенство

$$Y_1 \cdots Y_{n-3} = Y_{n-3} \cdots Y_1, \quad Y_i = X_{i+2}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

По индуктивному предположению набор $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-3})$ есть значение набора

$$f_1(n-3, 0; \lambda_1, \dots, \lambda_s), \quad f_2(n-3, 0; \lambda_1, \dots, \lambda_s), \quad \dots, \quad f_{n-3}(n-3, 0; \lambda_1, \dots, \lambda_s),$$

а из него с помощью рекурсии 6 получается, что набор

$$(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

есть значение набора

$$(f_1(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s), f_2(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s), \dots, f_n(n, 1; \lambda_1, \dots, \lambda_s)).$$

С помощью формул рекурсий 3 и 4 точно таким же образом доказывается, что значение набора

$$(f_1(n, n-1; \lambda_1, \dots, \lambda_s), f_2(n, n-1; \lambda_1, \dots, \lambda_s), \dots, f_n(n, n-1; \lambda_1, \dots, \lambda_s)),$$

является решением уравнения $\Omega(n, n-1)$. Наконец, доказательство того, что всякое решение уравнения $\Omega(n, j)$ при $j = 2, \dots, n-2$ является значением набора

$$(f_1(n, j; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s), f_2(n, j; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s), \dots, f_n(n, j; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s))$$

проводится с помощью рекурсий 5, 6, 7, 8 так же, как для $j = 0$ в работе [1]. Теорема доказана.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность рецензенту за внимательное прочтение статьи и за многочисленные ценные замечания и советы, что, несомненно, позволило значительно улучшить изложение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. С. Маканин, “Параметризация решений уравнения $x_1x_2 \dots x_{n-1}x_n = x_nx_{n-1} \dots x_2x_1$ в свободном моноиде”, *Матем. заметки*, **89**:6 (2011), 879–884.
- [2] Ю. И. Хмелевский, “Уравнения в свободной полугруппе”, *Тр. МИАН СССР*, **107**, 1971, 3–288.

А. Ш. Малхасян

Ереванский государственный университет

E-mail: amalkhasyan@mail.ru

Поступило

30.08.2012

Исправленный вариант

10.12.2012