Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ф. Конограй, Оценки аппроксимативных характеристик классов $B_{p,\theta}^\Omega$ периодических функций многих переменных с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 5, 734–749

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10118>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:01:58

Оценки аппроксимативных характеристик классов $B_{p,\theta}^\Omega$ периодических функций многих переменных с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности

А. Ф. Конограй

В работе получены точные по порядку оценки ортопроекционных поперечников классов $B_{p,\theta}^\Omega$ периодических функций многих переменных, мажоранта смешанных модулей непрерывности которых содержит как степенные, так и логарифмические множители

Библиография: 23 названия.

DOI: 10.4213/mzm10118

1. Введение. В настоящей работе продолжают исследования аппроксимативных характеристик классов $B_{p,\theta}^\Omega$ периодических функций многих переменных с заданной функцией $\Omega(t)$ специального вида, которые изучались в работах [1], [2]. Более конкретно об этом будет идти речь в соответствующих частях работы, а сначала приведем необходимые обозначения и определения.

Пусть $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, обозначает d -мерное пространство с элементами

$$x = (x_1, \dots, x_d), \quad (x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$$

и

$$L_p(\pi_d), \quad \pi_d = \prod_{j=1}^d [0; 2\pi],$$

– пространство 2π -периодических по каждой переменной функций f , для которых

$$\|f\|_p := \left((2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)| < \infty.$$

Далее будем предполагать, что для функций $f \in L_p(\pi_d)$ выполнено дополнительное условие

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = 1, \dots, d.$$

Для $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, и $t = (t_1, \dots, t_d)$, $t_j \geq 0$, $j = 1, \dots, d$, рассмотрим смешанный модуль непрерывности порядка l

$$\Omega_l(f, t)_p = \sup_{\substack{|h_j| \leq t_j \\ j=1, \dots, d}} \|\Delta_h^l f(\cdot)\|_p,$$

где $l \in \mathbb{N}$, $\Delta_h^l f(x) = \Delta_{h_1}^l \dots \Delta_{h_d}^l f(x) = \Delta_{h_d}^l (\dots (\Delta_{h_1}^l f(x)))$ – смешанная разность порядка l с шагом h_j по переменной x_j и

$$\Delta_{h_j}^l f(x) = \sum_{n=0}^l (-1)^{l-n} C_l^n f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \dots, x_d).$$

Пусть $\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ – заданная функция типа смешанного модуля непрерывности порядка l , которая удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j = 1, \dots, d$; $\Omega(t) = 0$, $\prod_{j=1}^d t_j = 0$;
- 2) $\Omega(t)$ не убывает по каждой переменной;
- 3) $\Omega(m_1 t_1, \dots, m_d t_d) \leq (\prod_{j=1}^d m_j)^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, d$;
- 4) $\Omega(t)$ непрерывна при $t_j \geq 0$, $j = 1, \dots, d$.

Будем говорить, что $\Omega(t)$ удовлетворяет также условиям (S) и (S_l) , которые называют условиями Бари–Стечкина [3]. Это означает следующее.

Функция одной переменной $\varphi(\tau) \geq 0$ удовлетворяет условию (S) , если $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ почти возрастает при некотором $\alpha > 0$, т.е. существует независимая от τ_1 и τ_2 постоянная $C_1 > 0$, такая, что

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \leq C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1.$$

Функция $\varphi(\tau) \geq 0$ удовлетворяет условию (S_l) , если при некотором $0 < \gamma < l$, $\varphi(\tau)/\tau^\gamma$ почти убывает, т.е. существует независимая от τ_1 и τ_2 постоянная $C_2 > 0$, такая, что

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \geq C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\gamma}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1.$$

Будем считать, что $\Omega(t)$ удовлетворяет условиям (S) и (S_l) , если $\Omega(t)$ удовлетворяет эти условия по каждой переменной t_j при фиксированных t_i , $i \neq j$.

Итак, пусть $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, а $\Omega(t)$ – заданная функция типа смешанного модуля непрерывности порядка l , которая удовлетворяет условиям 1)–4). Тогда (см. [4])

$$B_{p,\theta}^\Omega := \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} = \left(\int_{\pi_d} \left(\frac{\Omega_l(f, t)_p}{\Omega(t)} \right)^\theta \prod_{j=1}^d \frac{dt_j}{t_j} \right)^{1/\theta} \leq 1 \right\}$$

при $1 \leq \theta < \infty$ и

$$B_{p,\infty}^\Omega := \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B_{p,\infty}^\Omega} = \sup_{t>0} \frac{\Omega_l(f, t)_p}{\Omega(t)} \leq 1 \right\},$$

(запись $t > 0$ для $t = (t_1, \dots, t_d)$ равносильна $t_j > 0$, $j = 1, \dots, d$).

Заметим, что при $\theta = \infty$ классы $B_{p,\theta}^\Omega$ совпадают с классами H_p^Ω , которые были рассмотрены Пустовойтовым в [5].

В последующих рассуждениях нам будет удобно пользоваться эквивалентным (с точностью до абсолютных постоянных) определением классов $B_{p,\theta}^\Omega$.

Каждому вектору $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, d$, поставим в соответствие множество

$$\rho(s) = \{k = (k_1, \dots, k_d) : 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, k_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, j = 1, \dots, d\}$$

и для $f \in L_p(\pi_d)$ обозначим

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{i(k, x)},$$

где

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k, t)} dt$$

– коэффициенты Фурье функции f .

Итак, пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ и $\Omega(t)$ – заданная функция типа смешанного модуля непрерывности порядка l , которая удовлетворяет условиям 1)–4), (S) и (S_l) ; тогда с точностью до абсолютных постоянных классы $B_{p,\theta}^\Omega$ можно определить следующим образом (см. [4]):

$$B_{p,\theta}^\Omega := \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} = \left(\sum_s \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|\delta_s(f, \cdot)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \leq 1 \right\} \quad (1.1)$$

при $1 \leq \theta < \infty$ и

$$B_{p,\infty}^\Omega := \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B_{p,\infty}^\Omega} = \sup_s \frac{\|\delta_s(f, \cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \leq 1 \right\}; \quad (1.2)$$

здесь и в дальнейшем $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, \dots, 2^{-s_d})$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, d$.

Отметим, что при $\Omega(t) = \prod_{j=1}^d t_j^{r_j}$, $0 < r_j < l$, классы $B_{p,\theta}^\Omega$ есть аналоги известных классов Бесова $B_{p,\theta}^r$ (см., например, [6]).

Приведенное определение классов $B_{p,\theta}^\Omega$ можно распространить и на крайние значения $p = 1, \infty$, видоизменив в (1.1) и (1.2) “блоки” $\delta_s(f, x)$.

Пусть $V_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, обозначает ядро Валле-Пуссена порядка $2n - 1$:

$$V_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kt + 2 \sum_{k=n+1}^{2n-1} \left(1 - \frac{k-n}{n} \right) \cos kt.$$

Сопоставим каждому вектору $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, d$, полином

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^d (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j))$$

и для $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, через $A_s(f, x)$ обозначим свертку

$$A_s(f, x) = f * A_s.$$

В принятых обозначениях (с точностью до абсолютных постоянных) классы $B_{p,\theta}^\Omega$, $1 \leq p \leq \infty$, определяются следующим образом (см., соответственно [7] и [5]):

$$B_{p,\theta}^\Omega := \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} = \left(\sum_s \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|A_s(f, \cdot)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \leq 1 \right\} \quad (1.3)$$

при $1 \leq \theta < \infty$ и

$$B_{p,\infty}^\Omega := \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B_{p,\infty}^\Omega} = \sup_s \frac{\|A_s(f, \cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \leq 1 \right\}. \quad (1.4)$$

Отметим, что при $1 < p < \infty$ определения норм функций классов $B_{p,\theta}^\Omega$ (1.1) и (1.2) эквивалентны к определениям норм (1.3) и (1.4) соответственно.

Ниже мы будем рассматривать классы $B_{p,\theta}^\Omega$, которые определяются функцией $\Omega(t)$ специального вида, а именно

$$\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d) = \begin{cases} \prod_{j=1}^d \frac{t_j^r}{(\log 1/t_j)_+^{b_j}}, & \text{если } t_j > 0, j = 1, \dots, d; \\ 0, & \text{если } \prod_{j=1}^d t_j = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Здесь

$$\left(\log \frac{1}{t_j} \right)_+ = \max \left\{ 1, \log \frac{1}{t_j} \right\},$$

причем логарифм, как и всюду ниже, берется по основанию 2.

Также полагаем, что $b_j < r$, $j = 1, \dots, d$, и $0 < r < l$, а значит функция $\Omega(t)$, заданная формулой (1.5), будет удовлетворять сформулированным выше условиям 1)–4), (S) и (S_l) .

В работе получены точные по порядку оценки ортопроекционных поперечников классов $B_{p,\theta}^\Omega$ в пространстве L_q при некоторых соотношениях между параметрами p и q , а также установлены порядки приближения этих же классов функций в пространстве L_q с помощью линейных операторов, которые подчинены определенным условиям. Соответствующие аппроксимативные характеристики связаны с ортопроекционными поперечниками классов $B_{p,\theta}^\Omega$, о чем более конкретно будет идти речь ниже.

Для формулировки и доказательства полученных результатов нам понадобятся соответствующие обозначения и определения.

Пусть $\{u_i(x)\}_{i=1}^M$ – ортонормированная система функций $u_i \in L_\infty(\pi_d)$. Каждой функции $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \leq q \leq \infty$, поставим в соответствие приближающий аппарат вида $\sum_{i=1}^M (f, u_i) u_i(x)$, т.е. ортогональную проекцию функции f на подпространство, порожденное системой функций $\{u_i(x)\}_{i=1}^M$. Если $F \subset L_q(\pi_d)$ – класс функций, то величина

$$d_M^\perp(F, L_q) = \inf_{\{u_i(x)\}_{i=1}^M} \sup_{f \in F} \left\| f(\cdot) - \sum_{i=1}^M (f, u_i) u_i(\cdot) \right\|_q \quad (1.6)$$

называется *ортопроекционным поперечником (Фурье-поперечником)* класса F в пространстве $L_q(\pi_d)$. Поперечник $d_M^\perp(F, L_q)$ введен Темляковым в работе [8], где также

рассмотрена величина

$$d_M^B(F, L_q) = \inf_{G \in L_M(B)_q} \sup_{f \in F \cap D(G)} \|f(\cdot) - Gf(\cdot)\|_q. \quad (1.7)$$

Здесь через $L_M(B)_q$ обозначено множество линейных операторов, удовлетворяющих условиям

- а) область определения $D(G)$ этих операторов содержит все тригонометрические полиномы, а их область значений содержится в подпространстве размерности M пространства $L_q(\pi_d)$;
- б) существует число $B \geq 1$ такое, что для всех векторов $k = (k_1, \dots, k_d)$, выполнено неравенство

$$\|Ge^{i(k, \cdot)}\|_2 \leq B.$$

Отметим, что к $L_M(1)_2$ принадлежат операторы ортогонального проектирования на пространства размерности M , а также операторы, которые задаются на ортонормированной системе функций с помощью мультипликатора, определяющегося последовательностью $\{\lambda_l\}$ такой, что $|\lambda_l| \leq 1$ для всех l . Легко видеть, что согласно определений

$$d_M^B(F, L_q) \leq d_M^\perp(F, L_q).$$

Следовательно, оценки снизу величин $d_M^B(F, L_q)$ могут служить оценками снизу ортопроеекционных поперечников $d_M^\perp(F, L_q)$, и оценки сверху поперечников $d_M^\perp(F, L_q)$ можно использовать для оценок сверху величин $d_M^B(F, L_q)$. Это обстоятельство будет нами использоваться при доказательстве соответствующих утверждений.

Отметим, что величины (1.6) и (1.7) некоторых классов функций исследовались в работах [9]–[16] (см. также монографии [17], [18], где можно ознакомиться и с соответствующей библиографией).

В процессе доказательства полученных результатов используются и развиваются методы, которые применялись при исследовании рассматриваемых аппроксимативных характеристик в работах [8], [10], [14]–[16], [18]. Более подробно об этом будет говориться в соответствующих комментариях.

2. Вспомогательные утверждения. Напомним несколько известных утверждений, которые нами будут систематически использоваться.

ТЕОРЕМА А (Литтлвуда–Пэли [19; с. 65]). Пусть задано $p \in (1, \infty)$. Существуют положительные константы $C_3(p)$ и $C_4(p)$ такие, что для каждой функции $f \in L_p(\pi_d)$ справедлива оценка

$$C_3(p)\|f\|_p \leq \left\| \left(\sum_s |\delta_s(f, \cdot)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq C_4(p)\|f\|_p.$$

Непосредственно из теоремы А легко получить следующее

СЛЕДСТВИЕ. Для $f \in L_p(\pi_d)$ при $1 < p < \infty$ имеет место следующее соотношение:

$$\|f\|_p \ll \left(\sum_s \|\delta_s(f, \cdot)\|_p^{p_0} \right)^{1/p_0},$$

где $p_0 = \min\{p; 2\}$.

Здесь и далее для положительных функций $\mu_1(N)$ и $\mu_2(N)$ запись $\mu_1 \ll \mu_2$ означает, что существует постоянная $C > 0$, не зависящая от N и такая, что $\mu_1(N) \leq C\mu_2(N)$. Соотношение $\mu_1 \asymp \mu_2$ равносильно тому, что $\mu_1 \ll \mu_2$ и $\mu_1 \gg \mu_2$. Отметим, что все постоянные C_i , $i = 1, 2, \dots$, которые будут встречаться в работе, могут зависеть только от тех параметров, которые содержатся в определениях классов, метрики и размерности пространства $\mathbb{R}^d$.

ТЕОРЕМА В [20]. Пусть $n = (n_1, \dots, n_d)$, n_j – целые неотрицательные числа, $j = 1, \dots, d$, и

$$t(x) = \sum_{|k_j| \leq n_j} c_k e^{i(k,x)}.$$

Тогда при $1 \leq q < p \leq \infty$ имеет место неравенство

$$\|t\|_p \leq 2^d \prod_{j=1}^d n_j^{1/q-1/p} \|t\|_q.$$

Это неравенство установлено С. М. Никольским и названо “неравенством разных метрик”. В одномерном случае и при $p = \infty$ соответствующее неравенство доказал Джексон [21].

ЛЕММА А [10]. Пусть линейный оператор A задан равенством

$$Ae^{i(k,x)} = \sum_{m=1}^L a_m^k \psi_m(x),$$

где $\{\psi_m(x)\}_{m=1}^L$ – набор функций, для которых

$$\|\psi_m(\cdot)\|_2 \leq 1, \quad m = 1, \dots, L.$$

Тогда для любого тригонометрического полинома t верно неравенство

$$\min_{y=x} \operatorname{Re} A(t(x-y)) \leq \left(L \sum_{m=1}^L \sum_k |a_m^k \hat{t}(k)|^2 \right)^{1/2}.$$

Для натурального N положим

$$\chi(N) = \left\{ s = (s_1, \dots, s_d) : s_j \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, d, \Omega(2^{-s}) \geq \frac{1}{N} \right\}.$$

С учетом определения (1.5) множество $\chi(N)$ можно определить следующим образом:

$$\chi(N) = \left\{ s : s_j \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, d, \prod_{j=1}^d 2^{rs_j} s_j^{bj} \leq N \right\}.$$

Далее, пусть

$$\chi^\perp(N) = \mathbb{N}^d \setminus \chi(N).$$

В качестве приближающих подпространств возьмем подпространства тригонометрических полиномов, спектр которых содержится во множествах

$$Q(N) = \bigcup_{s \in \chi(N)} \rho(s).$$

Также нам понадобятся множества

$$\Theta(N) = \left\{ s = (s_1, \dots, s_d) : s_j \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, d, \frac{1}{2^l N} \leq \Omega(2^{-s}) < \frac{1}{N} \right\}.$$

В принятых обозначениях имеют место следующие утверждения, которые получены Пустовойтовым.

ЛЕММА В [14]. Количество элементов множества $Q(N)$ по порядку равно

$$|Q(N)| \asymp N^{1/r} (\log N)^{-b_1/r - \dots - b_d/r + d - 1}.$$

ЛЕММА С [22]. Для количества элементов множества $\Theta(N)$ имеет место соотношение

$$|\Theta(N)| \asymp (\log N)^{d-1}.$$

ЛЕММА D [22]. Для $\Omega(t)$ из (1.5) с $r > 0$ при $0 < p < \infty$ верно соотношение

$$\sum_{s \in \chi^\perp(N)} (\Omega(2^{-s}))^p \ll \sum_{s \in \Theta(N)} (\Omega(2^{-s}))^p.$$

ЛЕММА E [22]. Для $\Omega(t)$ из (1.5) с $0 < \beta < r$ при $0 < p < \infty$ верно соотношение

$$\sum_{s \in \chi^\perp(N)} (\Omega(2^{-s}) 2^{\|s\|_1 \beta})^p \ll \sum_{s \in \Theta(N)} (\Omega(2^{-s}) 2^{\|s\|_1 \beta})^p,$$

где $\|s\|_1 = s_1 + \dots + s_d$, $s_j \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА F [14]. Пусть $\gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_d < 1$. Тогда

$$\sum_{s \in \Theta(N)} \prod_{j=1}^d s_j^{-\gamma_j} \asymp (\log N)^{-\gamma_1 - \dots - \gamma_d + d - 1}.$$

Далее положим $M = |Q(N)|$; тогда с учетом леммы В получим

$$M \asymp N^{1/r} (\log N)^{-b_1/r - \dots - b_d/r + d - 1}, \\ \log M \asymp \log N, \quad N \asymp M^r (\log M)^{b_1 + \dots + b_d - (d-1)r}.$$

3. Основные результаты. Имеет место

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $1 \leq q \leq p < \infty$, $p \geq 2$, $1 \leq \theta < \infty$, а $\Omega(t)$ задана формулой (1.5). Тогда при $0 < r < l$ справедливы порядковые соотношения

$$d_M^\perp(B_{p,\theta}^\Omega, L_q) \asymp d_M^B(B_{p,\theta}^\Omega, L_q) \asymp M^{-r} (\log M)^{-b_1 - \dots - b_d + (d-1)(r + (1/2 - 1/\theta)_+)}, \quad (3.1)$$

где $a_+ = \max\{a, 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для начала получим в (3.1) оценку сверху для поперечника $d_M^\perp(B_{p,\theta}^\Omega, L_q)$. С этой целью рассмотрим приближение функций $f \in B_{p,\theta}^\Omega$ тригонометрическими полиномами $t_{Q(N)}$ вида

$$t_{Q(N)}(x) = \sum_{s \in \chi(N)} \delta_s(f, x).$$

Воспользовавшись следствием из теоремы A, получим

$$\begin{aligned} \|f(\cdot) - t_{Q(N)}(\cdot)\|_q &\leq \|f(\cdot) - t_{Q(N)}(\cdot)\|_p \ll \left(\sum_{s \in \chi^\perp(N)} \|\delta_s(f, \cdot)\|_p^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{s \in \chi^\perp(N)} \Omega^{-2}(2^{-s}) \|\delta_s(f, \cdot)\|_p^2 \Omega^2(2^{-s}) \right)^{1/2} = I_1. \end{aligned}$$

Чтобы получить оценку I_1 , рассмотрим два случая.

Пусть сначала $1 \leq \theta \leq 2$. Тогда в силу неравенства [23; с. 43]

$$\left(\sum_k |a_k|^{\nu_2} \right)^{1/\nu_2} \leq \left(\sum_k |a_k|^{\nu_1} \right)^{1/\nu_1}, \quad 1 \leq \nu_1 \leq \nu_2 < \infty,$$

имеем

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \left(\sum_{s \in \chi^\perp(N)} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|\delta_s(f, \cdot)\|_p^\theta \Omega^\theta(2^{-s}) \right)^{1/\theta} \\ &\leq N^{-1} \left(\sum_{s \in \chi^\perp(N)} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|\delta_s(f, \cdot)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \\ &\ll N^{-1} \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} \asymp M^{-r} (\log M)^{-b_1 - \dots - b_d + (d-1)r}. \end{aligned}$$

Если же $2 < \theta < \infty$, то применив к I_1 неравенство Гёльдера с показателем $\theta/2$, получим

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \left(\sum_{s \in \chi^\perp(N)} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|\delta_s(f, \cdot)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \left(\sum_{s \in \chi^\perp(N)} (\Omega(2^{-s}))^{2\theta/(\theta-2)} \right)^{1/2-1/\theta} \\ &\ll \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} \left(\sum_{s \in \chi^\perp(N)} (\Omega(2^{-s}))^{2\theta/(\theta-2)} \right)^{1/2-1/\theta} \\ &\leq \left(\sum_{s \in \chi^\perp(N)} (\Omega(2^{-s}))^{2\theta/(\theta-2)} \right)^{1/2-1/\theta} = I_2. \end{aligned}$$

Далее, воспользовавшись сначала леммой D, а затем леммой C, продолжим оценку I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &\ll \left(\sum_{s \in \Theta(N)} (\Omega(2^{-s}))^{2\theta/(\theta-2)} \right)^{1/2-1/\theta} \ll N^{-1} \left(\sum_{s \in \Theta(N)} 1 \right)^{1/2-1/\theta} \\ &\asymp M^{-r} (\log M)^{-b_1 - \dots - b_d + (d-1)r} (\log M)^{(d-1)(1/2-1/\theta)} \\ &= M^{-r} (\log M)^{-b_1 - \dots - b_d + (d-1)(r+1/2-1/\theta)}. \end{aligned}$$

Оценка сверху в (3.1) установлена.

Перейдем к доказательству соответствующей оценки снизу, при этом мы будем придерживаться схемы, примененной Темляковым в работе [10]. Заметим, что поскольку полученная оценка сверху не зависит от параметра q , то для доказательства

оценки снизу величины $d_M^B(B_{p,\theta}^\Omega, L_q)$ достаточно рассмотреть случай $q = 1$. Доказательство разобьем на две части.

Пусть сначала $1 \leq \theta < 2$. В этом случае будем использовать пример 1 из [10]. Итак, пусть число M задано, $G \in \mathcal{L}_M(B)_1$. Тогда существует вектор $k^0 = (k_1^0, \dots, k_d^0) \in \tilde{Q}(N)$, где $\tilde{Q}(N) = \bigcup_{s \in \Theta(N)} \rho(s)$ такой, что

$$\|e^{i(k^0, \cdot)} - Ge^{i(k^0, \cdot)}\|_1 \gg 1. \quad (3.2)$$

Теперь рассмотрим функцию

$$g_1(x) = C_5 N^{-1} e^{i(k^0, x)}, \quad C_5 > 0,$$

которая при соответствующем выборе постоянной $C_5 > 0$ принадлежит классу $B_{p,\theta}^\Omega$, $1 \leq \theta < 2$.

Далее, воспользовавшись соотношением (3.2), получим

$$\begin{aligned} \|g_1(\cdot) - Gg_1(\cdot)\|_1 &\gg N^{-1} \|e^{i(k^0, \cdot)} - Ge^{i(k^0, \cdot)}\|_1 \\ &\gg N^{-1} \asymp M^{-r} (\log M)^{-b_1 - \dots - b_d + (d-1)r}. \end{aligned}$$

Для установления оценки снизу величины $d_M^B(B_{p,\theta}^\Omega, L_1)$ в случае $2 \leq \theta < \infty$, рассмотрим функцию, аналогичную функции из примера 6 работы [10].

С помощью тех же рассуждений, что и в [14; с. 200], можно показать, что существует множество $\Theta'(N) \subset \Theta(N)$ такое, что для $s = (s_1, \dots, s_d) \in \Theta'(N)$ будет

$$s_j \asymp \log N, \quad j = 1, \dots, d, \quad \text{и} \quad |\Theta'(N)| \asymp (\log N)^{d-1}.$$

Далее, для $G \in \mathcal{L}_M(B)_1$ найдутся N , $\Theta_1(N) \subset \Theta'(N)$ такие, что

$$|\Theta_1(N)| \geq \frac{1}{2} |\Theta'(N)|,$$

и в каждом $\rho(s)$, $s \in \Theta_1(N)$, найдутся векторы k^s такие, что для функции

$$g_2(x) = \sum_{s \in \Theta_1(N)} e^{i(k^s, x)}$$

найдется $y^* = (y_1^*, \dots, y_d^*)$ такой, что

$$\|g_2(x + y^*) - Gg_2(x + y^*)\|_1 \gg (\log M)^{(d-1)/2}. \quad (3.3)$$

Доказательство соотношения (3.3) проводится по той же схеме, что и доказательство примера 6 из [10].

Итак, рассмотрим функцию

$$g_3(x) = C_6 N^{-1} (\log N)^{-(d-1)/\theta} g_2(x), \quad C_6 > 0.$$

Легко убедиться, что при соответствующем выборе постоянной C_6 функция g_3 принадлежит классу $B_{p,\theta}^\Omega$, $2 \leq \theta < \infty$.

Действительно,

$$\begin{aligned}
 \|g_3\|_{B_{p,\theta}^\Omega} &= \left(\sum_s \Omega^{-\theta} (2^{-s}) \|\delta_s(g_3, \cdot)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \\
 &\ll N^{-1} (\log N)^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{s \in \Theta_1(N)} \Omega^{-\theta} (2^{-s}) \|\delta_s(g_2, \cdot)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \\
 &\ll N^{-1} (\log N)^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{s \in \Theta_1(N)} \Omega^{-\theta} (2^{-s}) \right)^{1/\theta} \\
 &\ll N^{-1} (\log N)^{-(d-1)/\theta} \cdot N \cdot |\Theta_1(N)|^{1/\theta} \asymp (\log N)^{-(d-1)/\theta} (\log N)^{(d-1)/\theta} = 1.
 \end{aligned}$$

Таким образом, воспользовавшись соотношением (3.3), будем иметь

$$\begin{aligned}
 \|g_3(x+y^*) - Gg_3(x+y^*)\|_q &\geq \|g_3(x+y^*) - Gg_3(x+y^*)\|_1 \\
 &\gg N^{-1} (\log N)^{-(d-1)/\theta} \|g_2(x+y^*) - Gg_2(x+y^*)\|_1 \\
 &\gg N^{-1} (\log N)^{-(d-1)/\theta} (\log M)^{(d-1)/2} \\
 &\asymp M^{-r} (\log M)^{-b_1 - \dots - b_d + (d-1)(r+1/2-1/\theta)}.
 \end{aligned}$$

Оценки снизу величины $d_M^B(B_{p,\theta}^\Omega, L_1)$ в обоих случаях установлены. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $1 \leq q \leq p \leq 2$, $(p, q) \neq (1, 1)$, $1 \leq \theta < \infty$, а $\Omega(t)$ задана формулой (1.5). Тогда при $0 < r < l$ справедливы оценки

$$d_M^{\perp}(B_{p,\theta}^\Omega, L_q) \asymp d_M^B(B_{p,\theta}^\Omega, L_q) \asymp M^{-r} (\log M)^{-b_1 - \dots - b_d + (d-1)(r+(1/p-1/\theta)_+)}. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху в соотношении (3.4) следует из рассуждений, аналогичных тем, которые проводились при получении оценки сверху в теореме 3.1.

Переходя к установлению оценки снизу для $d_M^B(B_{p,\theta}^\Omega, L_q)$, заметим, что ее достаточно установить для случая $q = 1$, $1 < p \leq 2$. Кроме того, если $\theta \in [1, p)$, то оценка снизу величины $d_M^B(B_{p,\theta}^\Omega, L_1)$ устанавливается с помощью тех же рассуждений, которые проводились при доказательстве оценки снизу в теореме 3.1 в случае $1 \leq \theta < 2$. Таким образом, остановимся на рассмотрении случая $p \leq \theta < \infty$.

Рассмотрим функцию, аналогичную функции из примера 7 работы [10].

Пусть N достаточно велико. Положим

$$v = \lceil |\Theta'(N)|^{1/d} \rceil,$$

где множество $\Theta'(N)$ определено выше, $[a]$ — целая часть числа a .

Далее, разобьем куб π_d на v^d кубов с длиной ребра $2\pi/v$. Установим взаимно однозначное соответствие между множеством $\bar{\Theta}(N) \subset \Theta'(N)$, $|\bar{\Theta}(N)| = v^d$ и получившимся множеством кубов. При этом через $x^s \in \pi_d$ обозначим центр куба, соответствующего вектору $s \in \bar{\Theta}(N)$, и положим

$$u = 2^{\lceil (1/d) \log |\Theta'(N)| \rceil} \asymp (\log N)^{(d-1)/d}.$$

Пусть далее $K_n(t)$ обозначает ядро Фейера порядка n , т.е.

$$K_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos kt.$$

Через k^s обозначим вектор $k^s = (k_1^{s_1}, \dots, k_d^{s_d})$, где

$$k_j^{s_j} = \begin{cases} 2^{s_j-1} + 2^{s_j-2}, & s_j \geq 2; \\ 1, & s_j = 1, \quad j = 1, \dots, d. \end{cases}$$

Пусть $G \in \mathcal{L}_M(B)_1$. Тогда существуют число N и множество $\Theta_2(N) \subset \overline{\Theta}(N)$ такие, что

$$|\Theta_2(N)| \geq \frac{1}{2} |\overline{\Theta}(N)|,$$

и в каждом $\rho(s)$, $s \in \Theta_2(N)$, найдутся кубы с центром в k^s и длинами ребер $2u$ такие, что для функции

$$g_4(x) = \sum_{s \in \Theta_2(N)} e^{i(k^s, x)} \prod_{j=1}^d K_u(x_j - x_j^s)$$

и некоторого вектора y^* имеет место оценка

$$\|g_4(x + y^*) - Gg_4(x + y^*)\|_1 \gg (\log M)^{d-1}. \quad (3.5)$$

Доказательство оценки (3.5) проводится с помощью тех же рассуждений, которые проводились при доказательстве соответствующей оценки в примере 7 из работы [10].

Теперь возвратимся непосредственно к оценке снизу величины $d_M^B(B_{p,\theta}^\Omega, L_1)$. Рассмотрим функцию

$$g_5(x) = C_7 N^{-1} (\log N)^{(d-1)(1/p-1-1/\theta)} g_4(x), \quad C_7 > 0,$$

и оценим $\|g_5\|_{B_{p,\theta}^\Omega}$.

Поскольку для $s \in \Theta_2(N)$ в силу выбора параметра u и свойства ядра Фейера справедливы соотношения (см. [10])

$$\|A_s(g_4, \cdot)\|_p \ll \|K_u(\cdot)\|_p \asymp u^{d(1-1/p)} \asymp (\log N)^{(d-1)(1-1/p)},$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \|g_5\|_{B_{p,\theta}^\Omega} &= \left(\sum_s \Omega^{-\theta} (2^{-s}) \|A_s(g_5, \cdot)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \\ &\ll N^{-1} (\log N)^{(d-1)(1/p-1-1/\theta)} \cdot \left(\sum_{s \in \Theta_2(N)} \Omega^{-\theta} (2^{-s}) \|A_s(g_4, \cdot)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \\ &\ll N^{-1} (\log N)^{(d-1)(1/p-1-1/\theta)} \cdot (\log N)^{(d-1)(1-1/p)} \cdot \left(\sum_{s \in \Theta_2(N)} \Omega^{-\theta} (2^{-s}) \right)^{1/\theta} \\ &\asymp (\log N)^{-(d-1)/\theta} \cdot |\Theta_2(N)|^{1/\theta} \asymp 1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Таким образом, из (3.6) заключаем, что функция $g_5 \in B_{p,\theta}^\Omega$, $p \leq \theta < \infty$, с соответствующей постоянной $C_7 > 0$.

Далее, согласно (3.5), существует вектор y^* такой, что

$$\begin{aligned} & \|g_5(x + y^*) - Gg_5(x + y^*)\|_1 \\ & \gg N^{-1}(\log N)^{(d-1)(1/p-1-1/\theta)} \|g_4(x + y^*) - Gg_4(x + y^*)\|_1 \\ & \gg N^{-1}(\log N)^{(d-1)(1/p-1/\theta)} \asymp M^{-r}(\log M)^{-b_1-\dots-b_d+(d-1)(r+1/p-1/\theta)}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $1 \leq p < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, функция $\Omega(t)$ задана формулой (1.5). Тогда при $1/p < r < l$ справедливы соотношения

$$d_M^\perp(B_{p,\theta}^\Omega, L_\infty) \asymp d_M^B(B_{p,\theta}^\Omega, L_\infty) \asymp M^{-r+1/p}(\log M)^{-b_1-\dots-b_d+(d-1)(r+1-1/p-1/\theta)}. \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала установим в (3.7) оценку сверху. Для этого достаточно получить соответствующую оценку сверху для величины $\|f(\cdot) - t_{Q(N)}(\cdot)\|_\infty$, где $f \in B_{p,\theta}^\Omega$, $t_{Q(N)}(x) = \sum_{s \in \chi(N)} \delta_s(f, x)$.

Итак, пусть q_0 – некоторое число, удовлетворяющее условию $p < q_0 < \infty$. Тогда, воспользовавшись неравенством Минковского и затем неравенством разных метрик Никольского, для $f \in B_{p,\theta}^\Omega$ будем иметь

$$\begin{aligned} \|f(\cdot) - t_{Q(N)}(\cdot)\|_\infty &= \left\| f(\cdot) - \sum_{s \in \chi(N)} \delta_s(f, \cdot) \right\|_\infty \leq \sum_{s \in \chi^\perp(N)} \|\delta_s(f, \cdot)\|_\infty \\ &\ll \sum_{s \in \chi^\perp(N)} 2^{\|s\|_1/q_0} \|\delta_s(f, \cdot)\|_{q_0} \asymp \sum_{s \in \chi^\perp(N)} 2^{\|s\|_1/q_0} \|A_s(f, \cdot)\|_{q_0} \\ &\ll \sum_{s \in \chi^\perp(N)} 2^{\|s\|_1/q_0} 2^{\|s\|_1(1/p-1/q_0)} \|A_s(f, \cdot)\|_p \\ &= \sum_{s \in \chi^\perp(N)} \Omega(2^{-s}) 2^{\|s\|_1/p} \Omega^{-1}(2^{-s}) \|A_s(f, \cdot)\|_p = I_3. \end{aligned}$$

Применив к последней сумме в I_3 неравенство Гёльдера с показателем θ (с естественной модификацией при $\theta = 1$) и воспользовавшись леммой Е, продолжим оценку I_3 :

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \left(\sum_{s \in \chi^\perp(N)} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|A_s(f, \cdot)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \left(\sum_{s \in \chi^\perp(N)} (\Omega(2^{-s}) 2^{\|s\|_1/p})^{\theta/(\theta-1)} \right)^{1-1/\theta} \\ &\ll \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} \left(\sum_{s \in \chi^\perp(N)} (\Omega(2^{-s}) 2^{\|s\|_1/p})^{\theta/(\theta-1)} \right)^{1-1/\theta} \\ &\ll \left(\sum_{s \in \Theta(N)} (\Omega(2^{-s}) 2^{\|s\|_1/p})^{\theta/(\theta-1)} \right)^{1-1/\theta} = I_4. \end{aligned}$$

Далее, учитывая тот факт, что для $s \in \Theta(N)$

$$2^{\|s\|_1} \asymp N^{1/r} \prod_{j=1}^d s_j^{-b_j/r},$$

а также воспользовавшись леммой F, продолжим оценку I_4 :

$$\begin{aligned} I_4 &\asymp N^{1/(pr)-1} \cdot (\log N)^{-b_1/(pr)-\dots-b_d/(pr)+(d-1)(1-1/\theta)} \\ &\asymp (M^r (\log M)^{b_1+\dots+b_d-(d-1)r})^{1/(pr)-1} \cdot (\log M)^{-b_1/(pr)-\dots-b_d/(pr)+(d-1)(1-1/\theta)} \\ &= M^{-r+1/p} (\log M)^{-b_1-\dots-b_d+(d-1)(r+1-1/p-1/\theta)}. \end{aligned}$$

Таким образом, оценка сверху в (3.7) установлена.

Переходя к оценке снизу, напомним, что ее достаточно получить для величины $d_M^B(B_{p,\theta}^\Omega, L_\infty)$, при этом мы будем придерживаться схемы, примененной в примере 2 из [10].

Рассмотрим функцию

$$g_6(x) = \sum_{s \in \Theta'(N)} \mathcal{K}^s(x),$$

где множество $\Theta'(N)$ – определено выше, а

$$\mathcal{K}^s(x) = e^{i(k^s, x)} \prod_{j=1}^d K_{2^{s_j-2}}(x_j),$$

$K_n(t)$ – ядро Фейера.

Предположим, что оператор G принадлежит $\mathcal{L}_M(B)_\infty$. Покажем, что существует вектор $y^* = (y_1^*, \dots, y_d^*)$ такой, что

$$\|g_6(x - y^*) - Gg_6(x - y^*)\|_\infty \gg M. \quad (3.8)$$

Очевидно,

$$\|g_6(x - y) - Gg_6(x - y)\|_\infty \geq g_6(0) - \min_{y=x} \operatorname{Re} Gg_6(x - y).$$

Воспользовавшись леммой A, будем иметь

$$\min_{y=x} \operatorname{Re} Gg_6(x - y) \leq M^{1/2} B \left(\sum_k |\widehat{g}_6(k)|^2 \right)^{1/2} \ll M^{1/2} B |\tilde{Q}'(N)|^{1/2}. \quad (3.9)$$

Здесь через $|\tilde{Q}'(N)|$ обозначено количество элементов множества

$$\tilde{Q}'(N) = \bigcup_{s \in \Theta'(N)} \rho(s).$$

Далее, учитывая, что $|\Theta'(N)| \asymp (\log N)^{d-1}$, а также соотношение

$$|\rho(s)| = 2^{\|s\|_1} \asymp N^{1/r} (\log N)^{-b_1/r-\dots-b_d/r},$$

будем иметь

$$|\tilde{Q}'(N)| \asymp N^{1/r} (\log N)^{-b_1/r-\dots-b_d/r+d-1}. \quad (3.10)$$

С другой стороны,

$$g_6(0) \asymp N^{1/r} (\log N)^{-b_1/r-\dots-b_d/r+d-1} \asymp |\tilde{Q}'(N)|. \quad (3.11)$$

С учетом (3.9) и (3.10) можно подобрать такое N , что $|\tilde{Q}'(N)| \asymp M$ и правая часть в (3.11) будет, по крайней мере, вдвое больше правой части (3.9). Для этого N при некотором y^* , будем иметь

$$\|g_6(x - y^*) - Gg_6(x - y^*)\|_\infty \gg M.$$

Таким образом оценка (3.8) доказана.

Рассмотрим функцию

$$g_7(x) = C_8 N^{-1} (N^{1/r} (\log N)^{-b_1/r - \dots - b_d/r})^{1/p-1} (\log N)^{-(d-1)/\theta} g_6(x), \quad C_8 > 0.$$

Покажем, что функция g_7 при надлежащем выборе постоянной C_8 принадлежит классу $B_{p,\theta}^\Omega$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$.

Действительно, поскольку в силу свойств ядра Фейера

$$\|\mathcal{K}^s\|_p \asymp 2^{\|s\|_1(1-1/p)}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

будем иметь (см., например, [10; с. 166]) (см. также [14; с. 200])

$$\begin{aligned} \|g_7\|_{B_{p,\theta}^\Omega} &= \left(\sum_s \Omega^{-\theta} (2^{-s}) \|A_s(g_7, \cdot)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \\ &\ll N^{-1} (N^{1/r} (\log N)^{-b_1/r - \dots - b_d/r})^{1/p-1} (\log N)^{-(d-1)/\theta} \\ &\quad \times \left(\sum_{s \in \Theta'(N)} \Omega^{-\theta} (2^{-s}) \|A_s(g_6, \cdot)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \\ &\asymp (N^{1/r} (\log N)^{-b_1/r - \dots - b_d/r})^{1/p-1} (\log N)^{-(d-1)/\theta} \\ &\quad \times \left(\sum_{s \in \Theta'(N)} 2^{\|s\|_1(1-1/p)\theta} \right)^{1/\theta} \\ &\asymp (N^{1/r} (\log N)^{-b_1/r - \dots - b_d/r})^{1/p-1} (\log N)^{-(d-1)/\theta} \\ &\quad \times (N^{1/r} (\log N)^{-b_1/r - \dots - b_d/r})^{1-1/p} |\Theta'(N)|^{1/\theta} \\ &\asymp (\log N)^{-(d-1)/\theta} (\log N)^{(d-1)/\theta} = 1. \end{aligned}$$

Теперь, воспользовавшись соотношением (3.8), получим

$$\begin{aligned} &\|g_7(x - y^*) - Gg_7(x - y^*)\|_\infty \\ &\gg N^{-1} (N^{1/r} (\log N)^{-b_1/r - \dots - b_d/r + d-1})^{1/p-1} (\log N)^{(d-1)(1-1/p-1/\theta)} \\ &\quad \times \|g_6(x - y^*) - Gg_6(x - y^*)\|_\infty \\ &\gg M^{-r} (\log M)^{-b_1 - \dots - b_d + (d-1)r} M^{1/p-1} (\log M)^{(d-1)(1-1/p-1/\theta)} M \\ &= M^{-r+1/p} (\log M)^{-b_1 - \dots - b_d + (d-1)(r+1-1/p-1/\theta)}. \end{aligned}$$

Оценка снизу для $d_M^B(B_{p,\theta}^\Omega, L_\infty)$, а также и для поперечника $d_M^\perp(B_{p,\theta}^\Omega, L_\infty)$ установлена. Теорема доказана.

Подытоживая полученные результаты, отметим, что оптимальными (в смысле порядка) подпространствами в теоремах 3.1–3.3 являются подпространства тригонометрических полиномов с “номерами” гармоник из множеств $Q(N)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. При $d = 2$ и соответствующих ограничениях на параметры p и q , результаты теорем 3.1–3.3 получены в [1], [2].

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. В случае, когда $\Omega(t) = \prod_{j=1}^d t_j^r$, результаты теорем 3.1–3.3 (для классов $B_{p,\theta}^r$, $1 \leq \theta < \infty$) получены Романюком в [15], [16].

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Порядки поперечников $d_M^\perp(H_p^\Omega, L_q)$ и величин $d_M^B(H_p^\Omega, L_q)$ при p и q , которые удовлетворяют условиям теорем 3.1–3.3 получены Пустовойтовым в [14].

В заключение выражаю благодарность проф. А.С.Романюку за внимание к работе и обсуждение рассматриваемых в ней вопросов, также выражаю искреннюю признательность рецензенту за сделанные им полезные замечания, которые способствовали улучшению изложения материала работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Ф. Конограй, “Оцінки апроксимативних характеристик класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій двох змінних з заданою мажорантою мішаних модулів неперервності”, *Укр. матем. журн.*, **63**:2 (2011), 176–186.
- [2] А. Ф. Конограй, “Оцінки апроксимативних характеристик класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій двох змінних з заданою мажорантою мішаних модулів неперервності в просторі L_∞ ”, *Теорія наближення функцій та суміжні питання*, Зб. праць Ін-ту матем. НАН України, **8**, № 1, Ін-т матем. НАН України, Київ, 2011, 97–110.
- [3] Н. К. Бари, С. Б. Стечкин, “Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций”, *Тр. ММО*, **5**, ГИТТЛ, М., 1956, 483–522.
- [4] S. Yongsheng, W. Heping, “Representation and Approximation of Multivariate Periodic Functions with Bounded Mixed Moduli of Smoothness”, *Теорія приближень. Гармонический анализ*, Тр. МИАН, **219**, Наука, М., 1997, 356–377.
- [5] Н. Н. Пустовойтов, “Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности”, *Anal. Math.*, **20**:1 (1994), 35–48.
- [6] П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, “Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Часть 13*, Тр. МИАН СССР, **187**, Наука, М., 1989, 143–161.
- [7] С. А. Стасюк, О. В. Федунук, “Апроксимативні характеристики класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних”, *Укр. матем. журн.*, **58**:5 (2006), 692–704.
- [8] В. Н. Темляков, “Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных”, *Докл. АН СССР*, **267**:2 (1982), 314–317.
- [9] Динь Зунг, “Приближение функций многих переменных на торе тригонометрическими полиномами”, *Матем. сб.*, **131**:2 (1986), 251–271.
- [10] В. Н. Темляков, “Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью”, *Сборник трудов Всесоюзной школы по теории функций*, Тр. МИАН СССР, **189**, Наука, М., 1989, 138–168.
- [11] Э. М. Галеев, “Порядки ортопроекционных поперечников классов периодических функций одной и нескольких переменных”, *Матем. заметки*, **43**:2 (1988), 197–211.
- [12] Э. М. Галеев, “Приближение классов периодических функций нескольких переменных ядерными операторами”, *Матем. заметки*, **47**:3 (1990), 32–41.
- [13] А. В. Андрианов, В. Н. Темляков, “О двух методах распространения свойств систем функций от одной переменной на их тензорное произведение”, *Теорія приближень. Гармонический анализ*, Тр. МИАН, **219**, Наука, М., 1997, 32–43.

- [14] Н. Н. Пустовойтов, “Ортопоперечники классов многомерных периодических функций, мажоранта смешанных модулей непрерывности которых содержит как степенные, так и логарифмические множители”, *Anal. Math.*, **34**:3 (2008), 187–224.
- [15] А. С. Романюк, “Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций многих переменных”, *Матем. сб.*, **199**:2 (2008), 93–114.
- [16] А. С. Романюк, “Поперечники и наилучшее приближение классов $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных”, *Anal. Math.*, **37** (2011), 181–213.
- [17] В. Н. Темляков, “Приближение функций с ограниченной смешанной производной”, *Тр. МИАН СССР*, **178**, 1986, 3–113.
- [18] V. N. Temlyakov, *Approximation of Periodic Functions*, Comput. Math. Anal. Ser., Nova Sci. Publ., Commack, NY, 1993.
- [19] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1969.
- [20] С. М. Никольский, “Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных”, *Тр. МИАН СССР*, **38**, Изд-во АН СССР, М., 1951, 244–278.
- [21] D. Jakson, “Certain problem of closest approximation”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **39**:12 (1933), 889–906.
- [22] Н. Н. Пустовойтов, “Приближение многомерных функций с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности”, *Матем. заметки*, **65**:1 (1999), 107–117.
- [23] Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтлвуд, Г. Поля, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948.

А. Ф. Конограй

Институт математики НАН Украины

E-mail: Konogray@i.ua

Поступило

13.07.2012

Исправленный вариант

20.10.2013