Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Петроградский, О функциях сложности для T -идеалов ассоциативных алгебр, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 6, 887–897

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1012>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 13:55:12

УДК 512.55

О ФУНКЦИЯХ СЛОЖНОСТИ ДЛЯ T -ИДЕАЛОВ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР

В. М. Петроградский

Пусть $c_n(\mathbf{V})$ – последовательность роста коразмерностей для многообразия ассоциативных алгебр $\mathbf{V}$. Изучается функция сложности $\mathcal{C}(\mathbf{V}, z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\mathbf{V}) z^n / n!$. Это экспоненциальная производящая функция для последовательности коразмерностей. Ранее функции сложности использовались для изучения многообразий алгебр Ли. Цель заметки – начать систематическое изучение функций сложности в ассоциативном случае. Эти функции оказываются удобным инструментом для изучения роста многообразий над полем произвольной характеристики. В настоящей заметке найдена формула Шрайера для функций сложности односторонних идеалов свободной ассоциативной алгебры. Она применена для изучения произведений T -идеалов. Получена точная формула функции сложности для многообразия $\mathbf{U}_c$ ассоциативных алгебр, порожденного алгеброй верхнетреугольных матриц. Доказано, что функция $c_n(\mathbf{U}_c)$ является квазиполиномом. Изучаются функции сложности для собственных тождеств. Результаты о функциях сложности применены для изучения асимптотики роста коразмерностей. Прослеживаются аналогии между функциями сложности многообразий и рядами Гильберта–Пуанкаре конечно порожденных алгебр.

Библиография: 20 названий.

1. Введение: рост коразмерностей и функции сложности. Пусть K обозначает основное поле, которое, если специально не оговорено, считаем произвольным. Рассмотрим многообразие (ассоциативных) алгебр $\mathbf{V}$, т. е. класс всех алгебр, удовлетворяющих некоторому множеству тождественных соотношений. Пусть $F(\mathbf{V}, X)$ – его свободная алгебра, порожденная счетным множеством свободных порождающих $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Обозначим через $P_n(\mathbf{V}) \subset F(\mathbf{V}, X)$ подпространство всех полилинейных элементов степени n на множестве $\{x_1, \dots, x_n\}$ и рассмотрим размерность этого подпространства

$$c_n(\mathbf{V}) = c_n(F(\mathbf{V}, X), X) = \dim_K P_n(\mathbf{V}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Возникает последовательность коразмерностей $c_n(\mathbf{V})$, $n = 0, 1, 2, \dots$, которая является важной характеристикой многообразия $\mathbf{V}$. Многообразие, заданное тождествами алгебры B , обозначаем $\text{var } B$; через $T(\mathbf{V})$ обозначаем идеал тождеств многообразия $\mathbf{V}$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-01-20, программы “Университеты России”, грант № 1357, и гранта Минобразования России.

В случае нетривиального многообразия ассоциативных алгебр последовательность $c_n(\mathbf{V})$ ограничена некоторой экспонентой; этот факт был существенно использован Регевым для доказательства того, что тензорное произведение PI-алгебр всегда является PI-алгеброй [1]. Размыслов предложил рассматривать в случае многообразий алгебр Ли $\mathbf{V}$ *функцию сложности*

$$\mathcal{C}(\mathbf{V}, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(\mathbf{V})}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Если $\mathbf{V}$ – нетривиальное многообразие алгебр Ли, то $\mathcal{C}(\mathbf{V}, z)$ является целой функцией комплексного переменного [2]. В отличие от ассоциативного случая, рост в этом случае может быть сверхэкспоненциальным [3]. Применение функций сложности для многообразий алгебр Ли оказалось плодотворным и привело к классификации типов роста [4], [5].

Главным образом, результаты о росте ассоциативных многообразий относятся к полю характеристики нуль, например известны точные асимптотики для так называемых первичных многообразий [6]. Основным подходом при этом является использование теории представлений симметрической группы. О росте же над полем положительной характеристики известно мало.

Функции сложности для изучения роста ассоциативных многообразий фактически не применялись. Цель заметки – начать систематическое изучение функций сложности в ассоциативном случае. Эти функции оказываются удобным инструментом для изучения роста многообразий над полем произвольной характеристики. Основные результаты работы состоят в следующем. Найдена формула Шрайера для функций сложности односторонних идеалов свободной ассоциативной алгебры (теорема 2.1); она применяется для изучения произведений T -идеалов. В качестве приложения получена точная формула функции сложности для многообразия ассоциативных алгебр $\mathbf{U}_c$, порожденного алгеброй верхнетреугольных матриц над произвольным полем (теорема 3.1). Это позволило доказать, что функция $c_n(\mathbf{U}_c)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, является квазиполиномом. Изучаются функции сложности для собственных тождеств. Показано приложение функций сложности для изучения асимптотики роста коразмерностей. На протяжении всей заметки прослеживаются четкие аналогии между функциями сложности многообразий и рядами Гильберта–Пуанкаре для конечнопорожденных алгебр.

Напомним сначала основные свойства функций сложности. Функция сложности это один из примеров *экспоненциальных производящих функций*, которые широко используются в комбинаторике [7]. Мы будем их рассматривать в несколько более общей ситуации, а именно для подмножеств счетно порожденной алгебры (группоида).

Пусть дана алгебра (группоид), порожденная множеством $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Пусть A – подпространство (подмножество) в этой алгебре. Для любого множества различных элементов $\tilde{X} = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\} \subset X$ мы обозначим через $P_n(A, \tilde{X})$ линейную оболочку (подмножество) всех полилинейных элементов степени n из элементов $\tilde{X}$ в A . Допустим, что размерность этой линейной оболочки (число элементов) $c_n(A, \tilde{X})$ не зависит от $\tilde{X}$, а зависит только от n . В этом случае мы пишем $c_n(A) = c_n(A, \tilde{X})$ и говорим, что A является X -*равномерным*, или мы говорим, что для A *определена функция сложности по отношению к X* , которая записывается так:

$$\mathcal{C}(A, z) = \mathcal{C}_X(A, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(A)}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Отметим, что A не обязательно должно состоять из однородных элементов.

Следующая лемма объясняет применение функций сложности [7], [4] и [5].

ЛЕММА 1.1 [5]. Пусть Γ – группоид (алгебра), порожденная множеством $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, с умножением, обозначаемым $*$. Предположим, что подмножества (подпространства) $A \subset \Gamma$, $B \subset \Gamma$ являются X -равномерными.

- 1) Пусть $C = A \cup B$, причем пересечение пусто ($C = A \oplus B$ – прямая сумма). Тогда C является X -равномерным и $\mathcal{C}(C, z) = \mathcal{C}(A, z) + \mathcal{C}(B, z)$.
- 2) Допустим что все полилинейные элементы множества $a * b$, $a \in A$, $b \in B$, различны (все полилинейные элементы среди $\{a_i * b_j \mid i \in I, j \in J\}$ линейно независимы при условии, что взяты линейно независимые множества $\{a_i \mid i \in I\} \subset A$ и $\{b_j \mid j \in J\} \subset B$). Тогда $A * B$ также X -равномерно, причем $\mathcal{C}(A * B, z) = \mathcal{C}(A, z) \cdot \mathcal{C}(B, z)$.

Пусть $f(z)$ – целая функция. Обозначим $M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Если $M_f(r) \leq \exp(\mu r)$ при достаточно больших $r > 0$, то говорят, что $f(z)$ экспоненциального типа. По теореме Регева [1] таковы функции сложности для ассоциативных многообразий. По определению экспоненты $\exp(\alpha z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^n / n!$ аналогично получается следующий факт.

ЛЕММА 1.2 [8]. Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$$

– целая функция экспоненциального типа. Тогда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M_f(r)}{r}.$$

Определим (верхнюю) экспоненту и нижнюю экспоненту многообразия формулами

$$\text{Exp } \mathbf{V} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})}, \quad \underline{\text{Exp}} \mathbf{V} = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})}.$$

Если $f(z)$ – функция сложности, то ее коэффициенты неотрицательны и $M_f(r) = f(r)$ для $r > 0$. Получаем

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть $\mathbf{V}$ – многообразие ассоциативных алгебр. Тогда

$$\text{Exp } \mathbf{V} = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathcal{C}(\mathbf{V}, r)}{r}.$$

Предостережем, что замена в лемме $\overline{\lim}$ на $\underline{\lim}$ даст неверную формулу и аналогичное выражение для $\underline{\text{Exp}} \mathbf{V}$ мы записать не можем.

2. Применение функций сложности для Т-идеалов. В теории свободных групп имеет место следующая формула Шрайера. Пусть G – свободная группа ранга n , любая подгруппа H в ней свободна, причем если $|G : H| < \infty$ и m – ранг для H , то $m - 1 = (n - 1)|G : H|$.

Известно, что свободная ассоциативная алгебра является FI -кольцом, т. е. кольцом, где каждый односторонний идеал является свободным модулем [9]. Пусть $A = K\langle x_1, \dots$

$\dots, x_k\rangle$ – свободная ассоциативная алгебра ранга k и J – односторонний идеал такой, что $\dim A/J < \infty$. Обозначим через m ранг идеала J . Тогда имеет место аналог формулы Шрайера [10]: $m - 1 = (k - 1) \dim A/J$.

Имеет место обобщение этой формулы в терминах рядов. Определим степень элемента $\deg a$, $a \in A$, как максимум степеней мономов, входящих в его запись. Для подмножества $V \subset A$ будем использовать обозначения $V_n = \{a \in V \mid \deg a = n\}$, $V^n = \{a \in V \mid \deg a \leq n\}$, $n \geq 0$. Пусть теперь свободное порождающее множество Y для ${}_A J$ бесконечно. Рассмотрим ряды Гильберта–Пуанкаре:

$$\mathcal{H}(Y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} |Y_n| t^n, \quad \mathcal{H}(J, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim(J^n/J^{n-1}) t^n,$$

$$\mathcal{H}(A/J, t) = \mathcal{H}(A, t) - \mathcal{H}(J, t) = \frac{1}{(1-t)^k} - \mathcal{H}(J, t).$$

Обобщение состоит в следующем [9]:

$$\mathcal{H}(Y, t) - 1 = (kt - 1) \mathcal{H}(A/J, t).$$

Через $A = K\langle X \rangle$, $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, обозначаем свободную ассоциативную алгебру счетного ранга. Далее без дополнительных упоминаний будем использовать равенство $\mathcal{C}_X(A, z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = (1 - z)^{-1}$. Докажем “экспоненциальную формулу Шрайера” для функций сложности.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $A = K\langle X \rangle$, $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Произвольный X -равномерный левый (или правый) идеал J является свободным A -модулем ${}_A J = \bigoplus_{y \in Y} Ay$, где множество Y можно выбрать X -равномерным, причем

$$\mathcal{C}(Y, z) - 1 = (z - 1) \mathcal{C}(A/J, z).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что в A каждый односторонний идеал J является свободным [9]. Напомним построение свободного порождающего множества Y . Пусть компоненты Y_i , $i < n$, уже построены. Тогда в качестве компоненты Y_n берем базис дополнения векторного пространства:

$$J^n = (AY^{n-1} \cap J^n) \oplus \langle Y_n \rangle_K, \quad Y^{n-1} = \bigcup_{i < n} Y_i. \quad (1)$$

Согласно “слабому алгоритму” [9] множество $Y = \bigcup_{i \geq 0} Y_i$ является свободным порождающим для модуля ${}_A J$.

Покажем по индукции, что Y можно построить X -равномерным. Пусть Y^{n-1} равномерно; так как модуль AY^{n-1} свободен, то по лемме 1.1 этот модуль также равномерен. Остается заметить, что базис дополнения в (1) также можно выбрать равномерным.

Дополним J до равномерного базиса всей алгебры $A = \bigoplus_{y \in Y} Ay \oplus \langle b_i \mid i \in I \rangle_K$ и, используя лемму 1.1, вычислим функцию сложности

$$\mathcal{C}(A, z) = \mathcal{C}(A, z) \mathcal{C}(Y, z) + \mathcal{C}(I, z),$$

$$\mathcal{C}(Y, z) = 1 + (z - 1) \mathcal{C}(A/J, z),$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 2.1. Пусть I, J – T -идеалы в $A = K\langle X \rangle$, $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Положим $C_1(z) = \mathcal{C}(A/I, z)$, $C_2(z) = \mathcal{C}(A/J, z)$. Тогда

$$\mathcal{C}(A/IJ, z) = C_1(z) + C_2(z) + (z - 1)C_1(z)C_2(z). \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 2.1 идеал ${}_A J$ обладает X -равномерным свободным порождающим множеством ${}_A J = \bigoplus_{y \in Y} Ay$, причем

$$\mathcal{C}(Y, z) = 1 + (z - 1)\mathcal{C}(A/J, z) = 1 + (z - 1)C_2(z).$$

Тогда $I \cdot J = \bigoplus_{y \in Y} Iy$; вычислим соответствующие функции сложности

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(IJ, z) &= \mathcal{C}(I, z) \cdot \mathcal{C}(Y, z), \\ \mathcal{C}(A/IJ, z) &= \frac{1}{1 - z} - \mathcal{C}(IJ, z) = \frac{1}{1 - z} - \mathcal{C}(I, z)\mathcal{C}(Y, z) \\ &= \frac{1}{1 - z} - \left(\frac{1}{1 - z} - C_1(z) \right) (1 + (z - 1)C_2(z)) \\ &= C_1(z) + C_2(z) + (z - 1)C_1(z)C_2(z). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть I_i , $i = 1, \dots, c$, – T -идеалы в $A = K\langle X \rangle$, причем $C_i = C_i(z) = \mathcal{C}(A/I_i, z)$. Тогда имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(A/(I_1 \cdots I_c), z) &= C_1 + \cdots + C_c + \cdots \\ &\quad + (z - 1)^{j-1} \sum_{i_1 < \cdots < i_j} C_{i_1} \cdots C_{i_j} + \cdots + (z - 1)^{c-1} C_1 \cdots C_c \\ &= \frac{(1 + (z - 1)C_1) \cdots (1 + (z - 1)C_c) - 1}{z - 1}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО по индукции выводится из предыдущей леммы.

Через N_c мы обозначим многообразие всех нильпотентных алгебр степени c , т.е. совокупность всех алгебр B таких, что $B^c = 0$. Если U, V – многообразия, то UV обозначает их произведение.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть M – многообразие ассоциативных алгебр с функцией сложности $f(z) = \mathcal{C}(M, z)$. Тогда

$$\mathcal{C}(N_c M, z) = \frac{(1 + (z - 1)f(z))^c - 1}{z - 1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим T -идеал $I = T(M) \subset K\langle X \rangle$. Тогда $T(N_c M) = I^c$ и по следствию 2.1 выполняется требуемое равенство.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть I, J – T -идеалы в $A = K\langle X \rangle$, $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, задающие многообразия $\mathbf{A}, \mathbf{B}$, и $a_n = c_n(\mathbf{A})$, $b_n = c_n(\mathbf{B})$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Тогда

1) имеет место соотношение

$$c_n(A/IJ) = a_n + b_n + n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} a_i b_{n-1-i} - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i b_{n-i};$$

2) если $a_n \approx \lambda n^a \alpha^n$, $b_n \approx \mu n^b \beta^n$, $\lambda, \mu, a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c_n(A/IJ) \approx \lambda \mu \frac{\alpha^a \beta^b}{(\alpha + \beta)^{a+b+1}} n^{a+b+1} (\alpha + \beta)^n;$$

3) имеет место оценка $\text{Exp}(A/IJ) \leq \text{Exp } \mathbf{A} + \text{Exp } \mathbf{B}$;

4) если $\underline{\text{Exp}} \mathbf{A} = \text{Exp } \mathbf{A}$ и $\underline{\text{Exp}} \mathbf{B} = \text{Exp } \mathbf{B}$, то

$$\text{Exp}(A/IJ) = \underline{\text{Exp}}(A/IJ) = \text{Exp } \mathbf{A} + \text{Exp } \mathbf{B}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Перемножаем производящие функции (2) и приравниваем коэффициенты в левой и правой части.

2) Рассмотрим вспомогательную последовательность

$$d_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i b_{n-i}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Известно [11], [6], что при заданных условиях имеет место асимптотика

$$d_n \approx \lambda \mu \frac{\alpha^a \beta^b}{(\alpha + \beta)^{a+b}} n^{a+b} (\alpha + \beta)^n.$$

Тогда $c_n(A/IJ) = a_n + b_n + n d_{n-1} - d_n$, $n \in \mathbb{N}$, и несложные вычисления дают требуемый результат.

3) Рост функции сложности $\mathcal{C}(A/IJ, z)$ определяется последним слагаемым в (2). Используя следствие 1.1, получаем

$$\text{Exp}(A/IJ) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathcal{C}(A/IJ, r)}{r} = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln((r-1)\mathcal{C}(\mathbf{A}, r)\mathcal{C}(\mathbf{B}, r))}{r} \leq \text{Exp } \mathbf{A} + \text{Exp } \mathbf{B}.$$

4) Требуемое соотношение выводится несложными рассуждениями из 1), см., например, [11], [6].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В нулевой характеристике утверждение следствия 2.3 известно [11], [6], оно основано на явной формуле для характера $\chi_n(A/IJ)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Формула (2) является аналогом следующей хорошо известной формулы [12]. Пусть I, J – T -идеалы в конечно-порожденной свободной ассоциативной алгебре $A = K\langle x_1, \dots, x_k \rangle$. Тогда для рядов Гильберта–Пуанкаре выполнено соотношение

$$\mathcal{H}(A/IJ, t) = \mathcal{H}(A/I, t) + \mathcal{H}(A/J, t) + (kt - 1)\mathcal{H}(A/I, t)\mathcal{H}(A/J, t). \quad (3)$$

3. Производящие функции для алгебры верхнетреугольных матриц.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть U_c – многообразие ассоциативных алгебр, порожденное алгеброй верхнетреугольных матриц размера $c \times c$. Тогда функция сложности этого многообразия равна

$$\mathcal{C}(U_c, z) = \frac{(1 + (z - 1) \exp z)^c - 1}{z - 1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многообразие U_c над полем нулевой характеристики задается одним тождеством [13]

$$[X_1, X_2] \cdot [X_3, X_4] \cdots [X_{2c-1}, X_{2c}] \equiv 0.$$

Над произвольным полем K имеет место соотношение $T(U_c) = (T(K))^c$, где $T(K)$ – идеал тождеств многообразия $\text{var } K$. В случае бесконечного поля он порождается тождеством $[X, Y] \equiv 0$; если же $|K| = q$, то добавляется тождество $X^q - X \equiv 0$ [14]. В любом случае $P_n(K) = \langle x_1 x_2 \cdots x_n \rangle_K$, $c_n(K) = 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и, следовательно, $\mathcal{C}(\text{var } K, z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n / n! = \exp(z)$. Осталось применить следствие 2.2 к $U_c = N_c \text{ var } K$.

В пространстве многочленов вместо базиса n^i , $i = 0, 1, 2, \dots$, рассмотрим следующий базис $(n)_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$:

$$(n)_0 = 1, \quad (n)_i = n(n-1) \cdots (n-i+1), \quad i = 1, 2, \dots$$

Назовем функции вида $f(n) = \lambda^n n^a$, $\lambda, a \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и их линейные комбинации *квазиполиномами*.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Функция роста коразмерностей для алгебры верхнетреугольных матриц является следующим квазиполиномом:

$$c_n(U_c) = \sum_{s=1}^c s^n \sum_{i=0}^{s-1} \lambda_{si}(n)_i, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где коэффициенты равны

$$\lambda_{si} = \binom{c}{s} \binom{s-1}{i} s^{-i} (-1)^{s-i-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим функцию сложности в виде

$$\mathcal{C}(U_c, z) = \sum_{s=1}^c \binom{c}{s} (z-1)^{s-1} \exp(sz) \quad (4)$$

и разложим

$$\begin{aligned}
 (z-1)^{s-1} \exp(sz) &= \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s-1}{i} z^i (-1)^{s-1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n s^n}{n!} = (n+i=m) \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \sum_{i=0}^{\min\{m, s-1\}} \binom{s-1}{i} (-1)^{s-1-i} s^{m-i} \frac{m!}{(m-i)!} \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} s^m \left(\sum_{i=0}^{s-1} \binom{s-1}{i} (-1)^{s-1-i} s^{-i} \cdot (m)_i \right).
 \end{aligned}$$

Подставляя это в (4), имеем

$$\mathcal{C}(\mathbf{U}_c, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \left(\sum_{s=1}^c s^m \sum_{i=0}^{s-1} \binom{c}{s} \binom{s-1}{i} (-1)^{s-1-i} s^{-i} \cdot (m)_i \right).$$

Мы использовали, что $(m)_i = 0$ при $i \geq m+1$. Коэффициенты в скобках и есть искомые $c_m(\mathbf{U}_c)$.

Рассмотрим также обычную производящую функцию для последовательности коразмерностей $\mathcal{H}(c_n(\mathbf{V}), t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\mathbf{V}) t^n$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Обычная производящая функция $\mathcal{H}(c_n(\mathbf{U}_c), t)$ рациональна и равна

$$\mathcal{H}(c_n(\mathbf{U}_c), t) = \sum_{s=1}^c \sum_{k=0}^{s-1} \mu_{sk} \frac{t^k}{(1-st)^{k+1}},$$

где коэффициенты задаются формулой

$$\mu_{sk} = \binom{c}{s} (s-1)_k (-1)^{s-1-k}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$$

— целая функция экспоненциального типа, причем $\sigma = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Рассмотрим для последовательности a_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, также обычную производящую функцию $H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Тогда $H(t)$ имеет радиус сходимости $|t| < 1/\sigma$. Имеет место формальное преобразование [15]:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}(E(z))(t) &= \int_0^{\infty} e^{-x} E(tx) dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n x^n dx \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n \int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = H(t), \quad |t| < \frac{1}{\sigma}.
 \end{aligned}$$

Законность преобразований проверяется аналогично [16, п. 519]. Для функции $E_{ks}(z) = z^k \exp(sz)$ получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(E_{ks}(z))(t) &= \int_0^\infty e^{-x} (tx)^k e^{stx} dx = t^k \int_0^\infty x^k e^{-x(1-st)} dx \\ &= \frac{t^k}{(1-st)^{k+1}} \int_0^\infty y^k e^{-y} dy = \frac{t^k k!}{(1-st)^{k+1}}, \quad |t| < \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Используя (4), имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\mathbf{U}_c, z) &= \sum_{s=1}^c \binom{c}{s} \sum_{k=0}^{s-1} \binom{s-1}{k} z^k (-1)^{s-1-k} \exp(sz) \\ &= \sum_{s=1}^c \sum_{k=0}^{s-1} \binom{c}{s} \binom{s-1}{k} (-1)^{s-1-k} E_{ks}(z), \\ \mathcal{B}(\mathcal{C}(\mathbf{U}_c, z))(t) &= \sum_{s=1}^c \sum_{k=0}^{s-1} \binom{c}{s} \binom{s-1}{k} k! (-1)^{s-1-k} \frac{t^k}{(1-st)^{k+1}}, \end{aligned}$$

что и дает требуемую формулу.

В [17] доказано, что для любого подмногообразия $\mathbf{V} \subset \mathbf{U}_c$ в случае бесконечного поля ряд Гильберта–Пуанкаре $\mathcal{H}(F(\mathbf{V}, k), t)$ свободной алгебры конечного ранга рационален. Получим для $\mathbf{U}_c$ точную формулу.

ЛЕММА 3.1. Пусть $\mathcal{H}(F(\mathbf{U}_c, k), t) = \sum_{n=0}^\infty a_n t^n$ – ряд Гильберта–Пуанкаре свободной алгебры ранга k над бесконечным полем. Тогда

1) имеет место равенство

$$\mathcal{H}(F(\mathbf{U}_c, k), t) = \frac{1}{kt-1} \left(\left(1 + \frac{kt-1}{(1-t)^k} \right)^c - 1 \right) \approx \frac{(k-1)^{c-1}}{(1-t)^{kc}}, \quad t \rightarrow 1-0;$$

2) функция a_n является полиномом, причем $a_n \approx (k-1)^{c-1} n^{kc-1} / (kc-1)!$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В этом случае $T(\mathbf{U}_c) = (T(K))^c$ и $\mathcal{H}(A/I, t) = (1-t)^{-k}$, где $A = K\langle x_1, \dots, x_k \rangle$, $I = T(K)$. Далее применяем (3) к I^c и по индукции доказываем искомую формулу. Второе утверждение следует из свойств рациональных функций.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Очевидна аналогия с теоремой 3.1. В отличие от [17], нами для $\mathbf{U}_c$ найдена точная формула ряда и установлено, что a_n является полиномом.

4. Собственные тождества. Следующие утверждения о собственных тождествах известны для нулевой характеристики [18]–[20], хотя использование характеров и нулевой характеристики является излишним. Покажем, что в терминах функций сложности и характеристик их роста следующие факты становятся прозрачными.

В свободной алгебре счетного ранга $F(\mathbf{V}, X)$ ассоциативного многообразия $\mathbf{V}$ рассмотрим подпространство, натянутое на произведения коммутаторов и единицу. Пусть

$P_n^p(\mathbf{V})$ – пересечение этого подпространства с пространством полилинейных элементов $P_n(\{x_1, \dots, x_n\}, \mathbf{V})$. Возникают функция роста *собственных тождеств*, соответствующие ей функция сложности и экспоненты:

$$c_n^p(\mathbf{V}) = \dim P_n^p(\mathbf{V}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \mathcal{C}^p(\mathbf{V}, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n^p(\mathbf{V})}{n!} z^n,$$

$$\text{Exp}^p \mathbf{V} = \varlimsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n^p(\mathbf{V})}, \quad \underline{\text{Exp}}^p \mathbf{V} = \varliminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n^p(\mathbf{V})}.$$

Также в свободной алгебре конечного ранга $F(\mathbf{V}, k)$ рассмотрим подпространство $F^p(\mathbf{V}, k)$, натянутое на произведения коммутаторов и единицу. Возникает соответствующая функция $\mathcal{H}_k^p(\mathbf{V}, t)$.

ЛЕММА 4.1 [18]. Пусть $\mathbf{V} = \text{var } M$, где M – ассоциативная алгебра с единицей. Тогда

- 1) $\mathcal{C}(\mathbf{V}, z) = \exp(z) \mathcal{C}^p(\mathbf{V}, z)$;
- 2) $\mathcal{H}_k^p(\mathbf{V}, t) = (1/(1-t)^k) \mathcal{H}_k^p(\mathbf{V}, t)$, если $\mathbf{V}$ полиоднородно (в частности, если поле бесконечно).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть алгебра $F(\mathbf{V}, k)$ порождена элементами $x_1, \dots, x_k$. Используя преобразования $ax_i x_j b = ax_j x_i b + a[x_i x_j]b$, мы вытаскиваем отдельные буквы в начало мономов упорядоченным образом, оставляя коммутаторы справа:

$$x_{i_1} \cdots x_{i_s} \cdots [x_{j_1}, \dots] \cdots [x_{j_m}, \dots], \quad x_{i_1} \leq \cdots \leq x_{i_s}.$$

Рассмотрим линейное отображение

$$\varphi: K[x_1, \dots, x_k] \otimes F^p(\mathbf{V}, k) \rightarrow F(\mathbf{V}, k),$$

задаваемое формулой

$$\varphi(x_1^{m_1} \cdots x_k^{m_k} \otimes w) = x_1^{m_1} \cdots x_k^{m_k} w, \quad w \in F^p(\mathbf{V}, k).$$

Докажем, что φ является изоморфизмом векторных пространств

$$F(\mathbf{V}, k) \cong K[x_1, \dots, x_k] \otimes F^p(\mathbf{V}, k). \quad (5)$$

В силу условия рассмотрим однородный базис $\{w_j \mid j \in J\}$ для $F^p(\mathbf{V}, k)$ и предположим, что имеет место зависимость $\sum_{\alpha, j} \mu_{\alpha, j} x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k} w_j = 0$, $\mu_{\alpha, j} \in K$. Пусть w_s элемент минимальной степени, входящий в сумму с ненулевым коэффициентом. При подстановке $x_i = x_i + 1$, $i = 1, \dots, k$, элементы w_j не меняются, так как состоят из коммутаторов. Рассматривая однородную компоненту степени $m = \deg w_s$, получаем $\sum_{\alpha, i} \mu_{\alpha, i} w_i = 0$, где $\deg w_i = m$, что противоречит выбору w_j как базиса для $F^p(\mathbf{V}, k)$.

Пусть $P(B)$ обозначает линейную оболочку всех полилинейных компонент степеней $n = 0, 1, 2, \dots$ в B . Аналогично доказывается, что для свободной алгебры счетного ранга имеет место изоморфизм полилинейных компонент:

$$P(F(X, \mathbf{V})) \cong P(K[X] \otimes F^p(X, \mathbf{V})), \quad X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}. \quad (6)$$

Теперь искомые соотношения вытекают из (5), (6), свойств обычных и экспоненциальных производящих функций (лемма 1.1) и соотношений

$$\mathcal{H}(K[x_1, \dots, x_k], t) = (1-t)^{-k}, \quad \mathcal{C}(K[X], z) = \exp(z)$$

для $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.1 [20]. Пусть $\mathbf{V} = \text{var } M$, где M – ассоциативная алгебра с единицей. Тогда $\text{Exp}(\mathbf{V}) = \text{Exp}^p(\mathbf{V}) + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 1.1 и его аналогу для $\text{Exp}^p(\mathbf{V})$ получаем

$$\text{Exp } \mathbf{V} = \varliminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathcal{C}(\mathbf{V}, r)}{r} = \varliminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln(\exp(r) \mathcal{C}^p(\mathbf{V}, r))}{r} = \text{Exp}^p(\mathbf{V}) + 1.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Regev A. Existence of identities in $A \otimes B$ // Israel J. Math. 1972. V. 11. P. 131–152.
- [2] Размыслов Ю. П. Тожества алгебр и их представлений. М.: Наука, 1989.
- [3] Воличенко И. Б. Многообразия алгебр Ли $\mathbf{AN}_2$ над полем характеристики нуль // Докл. АН БССР. 1981. Т. 25. № 12. С. 1063–1066.
- [4] Петроградский В. М. О типах сверхэкспоненциального роста тождеств в PI-алгебрах Ли // Фундамент. и прикл. матем. 1995. Т. 1. № 4. С. 989–1007.
- [5] Петроградский В. М. Рост полилиньпотентных многообразий алгебр Ли и быстро растущие целые функции // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 6. С. 119–138.
- [6] Regev A. Asymptotics of codimensions of some P.I.-algebras // Trends in Ring Theory (Miskolc, 1996). CMS Conf. Proc. V. 22. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1998. P. 159–172.
- [7] Гульден Я., Джексон Д. Перечислительная комбинаторика. М.: Наука, 1990.
- [8] Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука, 1983.
- [9] Кон П. Свободные кольца и их связи. М.: Мир, 1975.
- [10] Lewin J. Free modules over free algebras and free group algebras: The Schreier technique // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 145. P. 455–465.
- [11] Berele A., Regev A. Codimensions of products and of intersections of verbally prime T -ideals // Israel J. Math. 1998. V. 103. P. 17–28.
- [12] Halpin P. Some Poincaré series related to identities of (2×2) matrices // Pacific J. Math. 1983. V. 107. № 1. P. 107–115.
- [13] Мальцев Ю. Н. Базис тождеств алгебры верхнетреугольных матриц // Алгебра и логика. 1971. Т. 10. № 4. С. 393–400.
- [14] Сидеров П. Н. Базис тождеств алгебры треугольных матриц над произвольным полем // Плиска. Български Математически Студии. 1981. Т. 2. С. 143–152.
- [15] Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М.: ИЛ, 1963.
- [16] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1–3. М.: Наука, 1969.
- [17] Drensky V. On the Hilbert series of relatively free algebras // Comm. Algebra. 1984. V. 12. № 19. P. 2335–2347.
- [18] Drensky V. Codimensions of T -ideals and Hilbert series of relatively free algebras // J. Algebra. 1984. V. 91. № 1. P. 1–17.
- [19] Drensky V., Regev A. Exact asymptotic behaviour of the codimensions of some P.I.-algebras // Israel J. Math. 1996. V. 96. part A. P. 231–242.
- [20] Bahturin Yu., Mishchenko S., Regev A. On the Lie and associative codimension growth // Comm. Algebra. (to appear).

Ульяновский государственный университет
E-mail: vmp@mmf.univ.simbirsk.su

Поступило
07.05.1999