Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Маркова, О связи длины алгебры и индекса нильпотентности ее радикала Джекобсона, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 5, 682–688

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10121>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 10:47:21

О связи длины алгебры и индекса нильпотентности ее радикала Джекобсона

О. В. Маркова

В работе получена точная верхняя оценка длины алгебры как функция индекса нильпотентности ее радикала Джекобсона и длины факторалгебры по радикалу.

Библиография: 8 названий.

DOI: 10.4213/mzm10121

1. Введение. Понятия теории колец и алгебр над полем, использованные в статье, можно найти, например, в [1].

Все рассматриваемые алгебры ассоциативны, содержат единичный элемент и имеют конечную размерность.

Пусть $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ – непустое конечное множество (алфавит). Конечные последовательности букв из B назовем *словами*. Пусть B^* обозначает множество всех слов в алфавите B , F_B – свободную полугруппу над алфавитом B , т.е. B^* с операцией конкатенации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Длина слова $b_{i_1} \dots b_{i_t}$, где $b_{i_j} \in B$, равна t . Будем считать 1 (пустое слово) словом от элементов B длины 0.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 1. Пусть B^i обозначает множество всех слов в алфавите B длины, не большей i , $i \geq 0$.

Пусть $\mathcal{S}$ – конечное подмножество алгебры $\mathcal{A}$ над полем $\mathbb{F}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Произведения элементов из множества $\mathcal{S}$ можно рассматривать как образы элементов свободной полугруппы $F_{\mathcal{S}}$ при естественном гомоморфизме и их также можно называть словами от элементов множества $\mathcal{S}$ и использовать естественное обозначение $\mathcal{S}^i$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 2. Положим $\mathcal{L}_i(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{S}^i \rangle$, где $\langle \mathcal{S} \rangle$ обозначает линейную оболочку (множество всех конечных линейных комбинаций с коэффициентами из $\mathbb{F}$) множества $\mathcal{S}$. Заметим, что $\mathcal{L}_0(\mathcal{S}) = \langle 1 \rangle = \mathbb{F}$. Пусть также $\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}_i(\mathcal{S})$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00140-а) и гранта МД-2502.2012.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Множество $\mathcal{S}$ является системой порождающих для $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{S})$. Из определения $\mathcal{S}^i$ для $i, j > 0$ получаем, что

$$\mathcal{S}^{i+j} = \mathcal{S}^i \mathcal{S}^j, \quad \mathcal{L}_{i+j}(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{L}_i(\mathcal{S}) \mathcal{L}_j(\mathcal{S}) \rangle.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Длиной системы порождающих $\mathcal{S}$ для конечномерной алгебры $\mathcal{A}$ называется число*

$$l(\mathcal{S}) = \min\{k \in \mathbb{Z}_+ : \mathcal{L}_k(\mathcal{S}) = \mathcal{A}\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Длиной алгебры $\mathcal{A}$ называется число*

$$l(\mathcal{A}) = \max\{l(\mathcal{S}) : \mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Слово $v \in \mathcal{S}^j$ длины j называется *сократимым над $\mathcal{S}$* , если найдется такой номер $i < j$, что $v \in \mathcal{L}_i(\mathcal{S})$, т.е. v представляется в виде линейной комбинации слов меньшей длины.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 3. Пусть $a \in \mathcal{A}$ и $\deg a$ обозначает степень минимального многочлена элемента a над полем $\mathbb{F}$. Из конечномерности алгебры $\mathcal{A}$ следует, что для любого $a \in \mathcal{A}$ справедлива оценка $\deg a \leq \dim \mathcal{A}$. Тогда для любого непустого подмножества $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ положим $m(\mathcal{B}) = \max\{\deg b : b \in \mathcal{B}\}$.

Тривиально длину произвольной алгебры $\mathcal{A}$ можно оценить сверху числом

$$\dim \mathcal{A} - 1.$$

Более того, $l(\mathcal{A}) = \dim \mathcal{A} - 1$ тогда и только тогда, когда в алгебре $\mathcal{A}$ найдется элемент $a \in \mathcal{A}$ такой, что $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\{a\})$. В этом случае алгебра $\mathcal{A}$ обязательно коммутативна. Таким образом, для некоммутативных алгебр данная оценка может быть улучшена до $\dim \mathcal{A} - 2$.

Естественным образом возникает задача об улучшении оценок длины за счет рассмотрения большего количества числовых характеристик алгебр. Так в работе [2; теорема 3.1] К. Паппаченой получена верхняя оценка длины произвольной ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$ в виде функции двух ее инвариантов – размерности и максимальной степени минимального многочлена элементов алгебры.

В работе [3; теорема 3.11] для случая коммутативных алгебр получена верхняя оценка длины как функция тех же двух инвариантов, которая существенно лучше оценки из [2; теорема 3.1].

Для длин систем порождающих алгебры $\mathcal{A}$, обладающих модифицированным свойством Пуанкаре–Биркгофа–Витта, при условии $\dim \mathcal{A} = m(\mathcal{A})^2$ Д. Константайном и М. Дарноллом в работе [4] получена верхняя оценка вида $2m(\mathcal{A}) - 2$.

В [5; теорема 2] показано, что длина факторалгебры $\mathcal{A}/I$ не превосходит длины алгебры $\mathcal{A}$ для произвольного идеала $I \triangleleft \mathcal{A}$. Поэтому интересна обратная задача: связать длину алгебры $\mathcal{A}$ с числовыми характеристиками ее идеала и факторалгебры по нему.

Ранее в работе [5] автором было установлено, что длину локальной алгебры $\mathcal{A}$ можно оценить сверху произведением индекса нильпотентности радикала Джекобсона данной алгебры и размерности ее факторалгебры по радикалу. Отметим, что

этой же величиной можно оценить и длину произвольной подалгебры в $\mathcal{A}$. Еще один частный случай этой задачи рассмотрен в [6].

В данной работе доказано, что эта оценка длины подалгебр справедлива без ограничения локальности алгебры. Получена также верхняя оценка длины алгебры как функция индекса нильпотентности ее идеала и длины факторалгебры по этому идеалу. В частности, для радикала Джекобсона она улучшает ранее известные оценки. Приведен пример, показывающий, что эта оценка точна.

2. Верхняя оценка длины алгебры как функция от индекса нильпотентности ее радикала Джекобсона и длины факторалгебры по радикалу. Сначала докажем вспомогательные утверждения относительно длин сократимых слов от элементов произвольного подмножества в данной алгебре и от элементов ее систем порождающих.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле и $\mathcal{A}$ – конечномерная $\mathbb{F}$ -алгебра, I – идеал алгебры $\mathcal{A}$. Положим

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}/I, \quad Q = l(\mathcal{B}) + 1.$$

Пусть $\mathcal{S} = \{A_1, \dots, A_k\} \subseteq \mathcal{A}$ – произвольная система порождающих алгебры $\mathcal{A}$. Тогда для любого набора $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_Q) \in \mathbb{N}^Q$, $1 \leq i_s \leq k$, $s = 1, \dots, Q$, существует такой многочлен $P_{\mathbf{i}} \in \mathbb{F}\langle x_1, \dots, x_k \rangle$ степени, не большей $Q - 1$, что

$$A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_Q} - P_{\mathbf{i}}(A_1, \dots, A_k) \in I.$$

Заметим, что указанная разность является многочленом степени Q от образующих.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим естественный гомоморфизм алгебр $\pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, $A \mapsto A + I$, $A \in \mathcal{A}$, ядром которого является идеал I . Поскольку множество $\mathcal{S}$ выбрано системой порождающих для алгебры $\mathcal{A}$, то множество

$$\mathcal{S}_B = \{B_1 = \pi(A_1), \dots, B_k = \pi(A_k)\} \subseteq \mathcal{B}$$

является системой порождающих для факторалгебры $\mathcal{B}$. По определению длины получаем $l(\mathcal{S}_B) \leq Q - 1$. Таким образом, любое слово от элементов $\mathcal{S}_B$ длины Q сократимо в смысле определения 4. Следовательно, найдется такой многочлен $P_{\mathbf{i}} \in \mathbb{F}\langle x_1, \dots, x_k \rangle$ степени, не большей $Q - 1$, что

$$B_{i_1} \cdots B_{i_Q} = P_{\mathbf{i}}(B_1, \dots, B_k). \quad (2.1)$$

Пользуясь линейностью и мультипликативностью отображения π , из равенства (2.1) получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \pi(A_{i_1} \cdots A_{i_Q}) &= \pi(P_{\mathbf{i}}(A_1, \dots, A_k)), \\ \pi(A_{i_1} \cdots A_{i_Q} - P_{\mathbf{i}}(A_1, \dots, A_k)) &= 0, \end{aligned}$$

это и означает, что

$$A_{i_1} \cdots A_{i_Q} - P_{\mathbf{i}}(A_1, \dots, A_k) \in I.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле и $\mathcal{A}$ – конечномерная $\mathbb{F}$ -алгебра, I – идеал алгебры $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}/I, \quad D = \dim_{\mathbb{F}} \mathcal{B}.$$

Пусть $A_1, \dots, A_D \in \mathcal{A}$ – произвольные элементы. Тогда существует такой многочлен $P \in \mathbb{F}\langle x_1, \dots, x_D \rangle$ степени, не большей $D - 1$, что

$$A_1 A_2 \cdots A_D - P(A_1, \dots, A_D) \in I.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве леммы 1, рассмотрим естественный гомоморфизм алгебр $\pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$. Множество

$$\mathcal{S} = \{B_1 = \pi(A_1), \dots, B_D = \pi(A_D)\} \subseteq \mathcal{B}$$

является системой порождающих для некоторой подалгебры $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$. Используя тривиальную оценку длины, получаем

$$l(\mathcal{S}) \leq l(\mathcal{B}') \leq \dim \mathcal{B}' - 1 \leq \dim \mathcal{B} - 1 = D - 1.$$

Далее, рассуждая как в доказательстве леммы 1, получим требуемое утверждение.

Перейдем к выводу основного результата этой статьи.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле и $\mathcal{A}$ – конечномерная ассоциативная $\mathbb{F}$ -алгебра с единицей. Пусть I – нильпотентный идеал алгебры $\mathcal{A}$, N – его индекс нильпотентности, т.е. наименьшее число n , для которого $I^n = 0$. Тогда

$$l(\mathcal{A}) \leq (l(\mathcal{A}/I) + 1)N - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$Q = l(\mathcal{A}/I) + 1, \quad q = QN.$$

Пусть $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_k\}$ – произвольная система порождающих алгебры $\mathcal{A}$. Покажем, что любое слово длины q от элементов $\mathcal{S}$ сократимо в смысле определения 4.

Зафиксируем слово $W = S_{i_1} \cdots S_{i_q}$. Найдется число $0 \leq t \leq q$ такое, что t сомножителей в W лежат в I (обозначим их $B_1, \dots, B_t$), а остальные $q - t$ сомножителей в W не лежат в I (их обозначим $A_1, \dots, A_{q-t}$). Тогда слово W можно представить в следующем виде:

$$W = \prod_{i=1}^t (V_i B_i) \cdot V_{t+1},$$

где $V_1, \dots, V_{t+1}$ – слова от элементов $A_1, \dots, A_{q-t}$, т.е. существуют подмножества

$$K_1, \dots, K_{t+1} \subseteq \{1, \dots, q - t\}, \quad K_i \cap K_j = \emptyset, \quad \bigcup_{i=1}^{t+1} K_i = \{1, \dots, q - t\},$$

и если $K_i \neq \emptyset$, то $K_i = \{k_i, k_i + 1, \dots, k_i + |K_i| - 1\}$, для которых

$$V_i = \begin{cases} \prod_{r \in K_i} A_r, & \text{если } K_i \neq \emptyset, \\ 1_{\mathcal{A}}, & \text{если } K_i = \emptyset. \end{cases}$$

Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $t \geq N$. Так как I – идеал в $\mathcal{A}$, то $V_i \cdot B_i \in I$ для всех $i = 1, \dots, t$. Тогда $\prod_{i=1}^N (V_i B_i) = 0$ по определению индекса нильпотентности. Следовательно,

$$\prod_{i=1}^t (V_i B_i) \cdot V_{t+1} = 0 \cdot \left(\prod_{i=N+1}^t (V_i B_i) \cdot V_{t+1} \right) = 0.$$

Значит, в этом случае слово $W = 0$, т.е. сократимо.

2. Пусть $t = 0$. В этом случае имеем

$$W = \prod_{j=0}^{N-1} (A_{jQ+1} A_{jQ+2} \cdots A_{jQ+Q}).$$

По лемме 1 для каждого $j = 0, \dots, N-1$ найдется многочлен $P_j \in \mathbb{F}\langle x_1, \dots, x_k \rangle$ степени не большей $Q-1$ такой, что

$$A_{jQ+1} A_{jQ+2} \cdots A_{jQ+Q} - P_j(S_1, \dots, S_k) = R_j \in I.$$

По определению индекса нильпотентности $R_0 R_1 \cdots R_{N-1} = 0$, т.е.

$$\prod_{j=0}^{N-1} (A_{jQ+1} A_{jQ+2} \cdots A_{jQ+Q} - P_j(S_1, \dots, S_k)) = 0.$$

Раскрывая скобки, получаем, что все слагаемые, кроме W , лежат в $\mathcal{L}_{q-1}(\mathcal{S})$. Поэтому $W \in \mathcal{L}_{q-1}(\mathcal{S})$, т.е. сократимо.

3. Пусть $0 < t < N$. Пусть $\mathcal{T}_1$ – множество индексов i , для которых $|K_i| < Q$, $\mathcal{T}_2$ – множество индексов j , для которых $|K_j| \geq Q$. Если $s_1 = |\mathcal{T}_1|$, то $|\mathcal{T}_2| = t + 1 - s_1$. Заметим, что $\mathcal{T}_2$ непусто, так как иначе

$$\sum_{l=1}^{t+1} |K_l| \leq (t+1)(Q-1) \leq N(Q-1) < NQ - t;$$

противоречие.

Если $j \in \mathcal{T}_2$, то $|K_j| = q_j Q + r_j$, а если $i \in \mathcal{T}_1$, то $|K_i| = Q - r_i$, для некоторых $q_j, r_i \in \mathbb{N}$, $r_j \in \mathbb{Z}_+$, $r_j \leq Q-1$, $r_i \leq Q$.

Покажем, что

$$\sum_{j \in \mathcal{T}_2} q_j \geq N - t. \quad (2.2)$$

Действительно, если $\sum_{j \in \mathcal{T}_2} q_j \leq N - t - 1$, то

$$\begin{aligned} QN - t &= \sum_{i \in \mathcal{T}_1} |K_i| + \sum_{j \in \mathcal{T}_2} |K_j| = \sum_{i \in \mathcal{T}_1} (Q - r_i) + \sum_{j \in \mathcal{T}_2} q_j Q + \sum_{j \in \mathcal{T}_2} r_j \\ &= \left(\sum_{j \in \mathcal{T}_2} q_j + s_1 \right) Q + \sum_{j \in \mathcal{T}_2} r_j - \sum_{i \in \mathcal{T}_1} r_i \\ &\leq (N - t - 1 + s_1)Q + (t + 1 - s_1)(Q - 1) - s_1 = QN - t - 1. \end{aligned}$$

Противоречие.

Пусть $i \in \mathcal{T}_2$. Тогда $V_i = W_1 W_2 \cdots W_{q_i} W'$, где длина каждого слова W_l равна Q , $l = 1, \dots, q_i$, а длина слова W' равна r_i . Применяя к каждому из слов W_l лемму 1

и рассуждая как и в 2, получаем, что существуют элементы $R_{i,1}, R_{i,2}, \dots, R_{i,q_i-1}$, $R'_{i,q_i} \in I$ и многочлен $F_i \in \mathbb{F}\langle x_1, \dots, x_k \rangle$ степени, не большей $q_i Q - 1$, такие, что

$$V_i = (R_{i,1}R_{i,2} \cdots R_{i,q_i-1}R'_{i,q_i} + F_i(S_1, \dots, S_k)) \cdot W' = R_{i,1}R_{i,2} \cdots R_{i,q_i-1}R_{i,q_i} + P_i, \quad (2.3)$$

где $R_{i,q_i} = R'_{i,q_i} \cdot W' \in I$ и $P_i = F_i \cdot W'$ — многочлен от $S_1, \dots, S_k$ степени, не большей чем $|K_i| - 1$.

Подставим представления для V_i из равенства (2.3) в слово W и раскроем скобки. Заметим, что произведения, содержащие P_i , можно представить как многочлены от $S_1, \dots, S_k$ степеней, не превосходящих $q - 1$, а единственное произведение, не содержащее этих многочленов, содержит $\sum_{j \in \mathcal{I}_2} q_j + t$ элементов из I . Учитывая (2.2), получаем, что это произведение равно 0. Следовательно, слово W сократимо.

Таким образом, мы получили, что любое слово длины QN от элементов системы $\mathcal{S}$ сократимо в смысле определения 4. Это означает, что $l(\mathcal{S}) \leq QN - 1$.

Следовательно,

$$l(\mathcal{A}) = \max_{\mathcal{S}} l(\mathcal{S}) \leq \max_{\mathcal{S}} \{QN - 1\} = QN - 1.$$

Известно, что радикал Джекобсона артинова кольца нильпотентен (см., например, [1; § 4.4]). В частности, радикал Джекобсона конечномерной алгебры нильпотентен, поэтому выполняется

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\mathcal{A}$ — конечномерная ассоциативная $\mathbb{F}$ -алгебра с единицей. Пусть N — индекс нильпотентности радикала Джекобсона $J(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$. Тогда

$$l(\mathcal{A}) \leq (l(\mathcal{A}/J(\mathcal{A})) + 1)N - 1.$$

Отметим, что в общем случае функция длины не монотонна при переходе к подалгебрам (см., например, [7; раздел 9]). Поэтому, для оценки длины подалгебры $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ можно либо непосредственно применить к $\mathcal{A}'$ теорему 1, либо использовать следующую оценку.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\mathcal{A}$ — конечномерная $\mathbb{F}$ -алгебра с единицей. Пусть I — нильпотентный идеал алгебры $\mathcal{A}$, N — его индекс нильпотентности, $\mathcal{B} = \mathcal{A}/I$. Тогда для любой подалгебры $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ справедливы верхние оценки длины

$$l(\mathcal{A}') \leq N \cdot \max\{l(\mathcal{B}') + 1 : \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}\} - 1 \leq N \dim \mathcal{B} - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 1 получим, что $l(\mathcal{A}') \leq N(l(\mathcal{B}') + 1) - 1$, где $\mathcal{B}' = \mathcal{A}'/(I \cap \mathcal{A}')$ — подалгебра в $\mathcal{B}$.

Поскольку $l(\mathcal{B}') + 1 \leq \dim \mathcal{B}' \leq \dim \mathcal{B}$, получаем второе неравенство.

3. Достижимость полученной оценки. В этом разделе мы покажем, что оценка из следствия 1 является точной для любых N и Q .

ОБОЗНАЧЕНИЕ 4. Пусть далее $\mathbb{F}_q$ обозначает поле мощности q .

ЛЕММА 2. Пусть $p \in \mathbb{N}$ — простое число, $Q \in \mathbb{N}$, $q = p^Q$. Рассмотрим поле $\mathbb{F}_q$ как алгебру над полем $\mathbb{F} = \mathbb{F}_p$. Тогда $l(\mathbb{F}_q) = Q - 1 = \dim_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_q - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [8; т. 1, гл. 2, теорема 2.8] мультипликативная группа конечного поля $\mathbb{F}_q$ порождена некоторым элементом, скажем θ (такой элемент

называется *примитивным элементом* поля $\mathbb{F}_q$). В частности, $\mathbb{F}_q = \mathcal{L}(\{\theta\})$. Как было отмечено во введении, это означает, что $l(\mathbb{F}_q) = Q - 1$.

ЛЕММА 3. Пусть $p \in \mathbb{N}$ – простое число, $N, Q \in \mathbb{N}$, $q = p^Q$. Рассмотрим кольцо $\mathcal{R} = F_q[x]$ как алгебру над $\mathbb{F}_p$ и положим $\mathcal{A} = \mathcal{R}/(x^N)$. Тогда

- 1) $\mathcal{A}$ – коммутативная локальная алгебра;
- 2) ее радикал Джекобсона $J(\mathcal{A})$ порожден как идеал элементом $\bar{x} = x + x^N$ и его индекс нильпотентности равен N ;
- 3) $\mathcal{A}/J(\mathcal{A}) \cong \mathbb{F}_q$;
- 4) $l(\mathcal{A}/J(\mathcal{A})) = Q - 1$;
- 5) $l(\mathcal{A}) = QN - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства 1–3 очевидны по построению.

Утверждение 4 доказано в лемме 2.

Докажем утверждение 5. Имеем $\dim \mathcal{A} = QN$, поэтому нам нужно проверить равенство $l(\mathcal{A}) = QN - 1 = \dim \mathcal{A} - 1$, а для этого достаточно предъявить элемент, порождающий алгебру $\mathcal{A}$.

Пусть $\pi: \mathbb{F}_q[x] \rightarrow \mathcal{A}$ – естественный гомоморфизм $\mathbb{F}_p$ -алгебр, $A = \pi(\theta) + \pi(x)$, $\mathcal{B} = \mathcal{L}(\{A\})$. Покажем, что $\mathcal{B} = \mathcal{A}$. Для этого достаточно проверить, что $\pi(\theta) \in \mathcal{B}$ и $\pi(x) \in \mathcal{B}$. Но

$$A^{p^N} = (\pi(\theta) + \pi(x))^{p^N} = \pi(\theta)^{p^N} + \pi(x)^{p^N} = \pi(\theta)^{p^N} = \pi(\theta^{p^N}),$$

так как $p^N > N$. При этом θ^{p^N} также является примитивным элементом поля $\mathbb{F}_q$, поскольку $(p^N, p^Q - 1) = 1$. Поэтому $\pi(\theta) \in \mathcal{L}(\{\pi(\theta^{p^N})\}) \subseteq \mathcal{B}$. Теперь очевидно, что $\pi(x) = A - \pi(\theta) \in \mathcal{B}$.

Таким образом, $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\{A\})$.

Автор выражает особую благодарность А. Э. Гутерману за внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Пирс, *Ассоциативные алгебры*, Мир, М., 1986.
- [2] Ch. J. Pappacena, “An upper bound for the length of a finite-dimensional algebra”, *J. Algebra*, **197**:2 (1997), 535–545.
- [3] О. В. Маркова, “Верхняя оценка длины коммутативных алгебр”, *Матем. сб.*, **200**:12 (2009), 41–62.
- [4] D. Constantine, M. Darnall, “Lengths of finite dimensional representations of PWB algebras”, *Linear Algebra Appl.*, **395** (2005), 175–181.
- [5] О. В. Маркова, “О некоторых свойствах функции длины”, *Матем. заметки*, **87**:1 (2010), 83–91.
- [6] A. E. Guterma, O. V. Markova, “Commutative matrix subalgebras and length function”, *Linear Algebra Appl.*, **430**:7 (2009), 1790–1805.
- [7] О. В. Маркова, “Вычисление длин матричных подалгебр специального вида”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **13**:4 (2007), 165–197.
- [8] Р. Лидл, Г. Нидеррайтер, *Конечные поля*, Т. 1, 2, Мир, М., 1988.

О. В. Маркова

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: ov_markova@mail.ru

Поступило

13.06.2012