Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. С. Дерябина, А. Н. Красильников, Неконечнобазируемое многообразие центрально-метабелевых групп с отмеченной точкой, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 5, 795–797

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10122>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 13:12:25

Неконечнобазлируемое многообразие центрально-метабелевых групп с отмеченной точкой

Г. С. Дерябина, А. Н. Красильников

Группой с отмеченной точкой (*pointed-group*) называется пара (G, g) , состоящая из группы G и выделенного элемента $g \in G$. Группы с отмеченной точкой – это группы с одной дополнительной нулевой операцией; они являются алгебрами в смысле универсальной алгебры, а класс всех групп с отмеченной точкой является *многообразием алгебр* (определения и основные факты, связанные с тождествами и многообразиями алгебр, см., например, в [1]). О подмногообразиях этого многообразия говорят как о *многообразиях групп с отмеченной точкой*. Тождества и многообразия групп с отмеченной точкой впервые начал изучать Брайнт [2].

Пусть F – свободная группа со свободными порождающими $y, x_1, x_2, \dots$. Нетрудно видеть, что (F, y) – свободный объект в классе всех групп с отмеченной точкой. Элемент $v = v(y, x_1, \dots, x_n) \in F$ является тождеством группы G с отмеченной точкой $g \in G$, если $v(g, h_1, \dots, h_n) = 1$ для любых $h_1, \dots, h_n \in G$. Многообразие групп с отмеченной точкой – это класс всех групп с отмеченной точкой, удовлетворяющих заданному множеству тождеств $\{v_j \mid j \in \mathbb{N}\}$. Напомним, что многообразие *конечно базлируемо*, если оно может быть задано конечным множеством тождеств.

Многообразия групп с отмеченной точкой в одних ситуациях “ведут себя” так же, как многообразия “обычных” групп, а в других ситуациях “поведение” этих многообразий отличается. Существуют конечные группы с отмеченной точкой, тождества которых не допускают конечного базиса [2], тогда как тождества “обычной” конечной группы всегда имеют такой базис [3]. С другой стороны, каждое многообразие “обычных” групп, являющихся нильпотентными, метабелевыми или расширениями нильпотентной группы с помощью абелевой конечной экспоненты, конечно базлируемо [4]–[6], и это же справедливо для многообразий групп с отмеченной точкой, которые нильпотентны, метабелевы [7], [8] или являются расширениями нильпотентной группы с помощью абелевой конечной экспоненты [9].

Цель нашей заметки – показать, что в центрально-метабелевом случае многообразия групп с отмеченной точкой ведут себя не так, как многообразия “обычных” групп. Напомним, что группа G *центрально-метабелева*, если она удовлетворяет тождеству

$$[[[x_1, x_2], [x_3, x_4]], x_5]$$

или, эквивалентно, если факторгруппа $G/Z(G)$ группы G по центру $Z(G)$ метабелева. Любое многообразие “обычных” центрально-метабелевых групп конечнобазлируемо [10], как и любое многообразие групп с нильпотентным коммутантом [11].

ТЕОРЕМА 1. *Существует не конечно базлируемое многообразие центрально-метабелевых групп с отмеченной точкой.*

Эта теорема дает положительный ответ на вопрос Квика [9; с. 615] о существовании не конечно базлируемого многообразия групп с отмеченной точкой, группы которого содержатся в наследственно конечно базлируемом многообразии групп. Напомним, что многообразие *наследственно конечно базлируемо*, если все его подмногообразия, включая само многообразие, конечно базлируемы; наследственно конечно базлируемым является, в частности, многообразие всех “обычных” центрально-метабелевых групп [10].

Теорема 1 сразу вытекает из следующего результата.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00945) и гранта CNPq-FAPDF PRONEX 2009/00091-0 (193.000.580/2009), Бразилия.

DOI: 10.4213/mzm10122

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathbf{V}$ – многообразие групп с отмеченной точкой, заданное тождествами

$$[[[x_1, x_2], [x_3, x_4]], x_5] \quad \text{и} \quad \{[y^{x_1^p}, y] \mid p \in \mathbb{P}\},$$

где $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел. Тогда $\mathbf{V}$ не является конечно базлируемым многообразием групп с отмеченной точкой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $w_p = [y^{x_1^p}, y]$. Мы докажем, что для любого простого p тождество w_p не является следствием множества тождеств, состоящего из тождества $[[[x_1, x_2], [x_3, x_4]], x_5]$ и тождеств w_q для всех простых $q \neq p$. Для этого мы предъявим для каждого простого p центрально-метабелеву группу H_p с отмеченной точкой b_p , которая удовлетворяет всем тождествам w_q ($q \neq p$), но не удовлетворяет тождеству w_p .

Пусть $C = \langle t \rangle_\infty$ – бесконечная циклическая группа, порожденная элементом t , $\mathbb{F}_2$ – поле из двух элементов, а $\mathbb{F}_2 C$ – групповая алгебра группы C над $\mathbb{F}_2$. Пусть

$$H = \left(\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{F}_2 C & \mathbb{F}_2 C \\ 0 & C & \mathbb{F}_2 C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & f_{12} & f_{13} \\ 0 & c & f_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid c \in C, f_{ij} \in \mathbb{F}_2 C \right) \right\}$$

– мультипликативная группа матриц. Мы будем отождествлять группу C с подгруппой всех диагональных матриц группы H ,

$$C = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid c \in C \right) \right\}.$$

Пусть N – подгруппа группы H , состоящая из матриц с единичной диагональю,

$$N = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & f_{12} & f_{13} \\ 0 & 1 & f_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid f_{ij} \in \mathbb{F}_2 C \right) \right\}.$$

Ясно, что H – полупрямое произведение C и N , $H = C \ltimes N$. Каждый элемент h группы H представим в виде $h = h_1 c$, где $h_1 \in N$, $c \in C$.

Отметим, что группа H центрально-метабелева. Действительно, $H' \subseteq N$, поэтому каждый элемент из H'' имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & f_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_{13} \in \mathbb{F}_2 C, \quad (1)$$

а все элементы такого вида центральны в H .

Пусть p – произвольное, но фиксированное простое число. Пусть V_p – линейное подпространство в $\mathbb{F}_2 C$, порожденное всеми элементами t^n такими, что $n \neq \pm p$. Пусть N_p – множество всех матриц вида (1) таких, что $f_{13} \in V_p$. Легко видеть, что N_p – подгруппа в H , лежащая в центре $Z(H)$.

Пусть $H_p = H/N_p$. Пусть

$$b_p = b N_p, \quad \text{где} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что H_p центрально-метабелева. Проверим, что группа с отмеченной точкой (H_p, b_p) не удовлетворяет тождеству w_p , но удовлетворяет всем тождествам w_q при $q \neq p$.

ЛЕММА 1. Пусть $h = h_1 c$, где $h_1 \in N$, $c \in C$. Пусть k – положительное целое число. Тогда

$$[b^{h^k}, b] = [b^{c^k}, b].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $h^k = h'c^k$, где $h' \in N$. Отметим, что $b^{h'} = b[b, h']$, где $[b, h'] \in Z(M)$. Получаем

$$[b^{h^k}, b] = [(b^{h'})^{c^k}, b] = [(b[b, h'])^{c^k}, b] = [b^{c^k}[b, h'], b] = [b^{c^k}, b]$$

как и требовалось.

Хорошо известна и легко проверяется

ЛЕММА 2. Пусть

$$u = \begin{pmatrix} 0 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 0 & u_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 & v_{12} & v_{13} \\ 0 & 0 & v_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$(1+u)^{-1}(1+v)^{-1}(1+u)(1+v) = 1 + (uv - vu).$$

Из леммы 2 немедленно вытекает, что $(1+u)^{-1}(1+v)^{-1}(1+u)(1+v)$ – матрица вида (1), в которой $f_{13} = u_{12}v_{23} - u_{23}v_{12}$.

Пусть h – произвольный элемент группы H . Тогда $h = h_1 t^n$, где $h_1 \in N$, $n \in \mathbb{Z}$. Так как

$$b^{t^l} = \begin{pmatrix} 1 & t^l & 0 \\ 0 & 1 & t^{-l} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{для любого } l \in \mathbb{Z},$$

то из леммы 1 и замечания к лемме 2 следует, что $[b^{h^k}, b]$ – матрица вида (1), в которой $f_{13} = t^{kn} - t^{-kn}$. Если $k = q$ – простое число, $q \neq p$, то $f_{13} = t^{qn} - t^{-qn} \in V_p$, поэтому $[b^{h^q}, b] \in N_p$. Это означает, что группа с отмеченной точкой (H_p, b_p) удовлетворяет тождеству w_q , если $q \neq p$. С другой стороны, если $k = p$ и $h = t$, то $f_{13} = t^p - t^{-p} \notin V_p$, поэтому $[b^{t^p}, b] \notin N_p$, т.е. (H_p, b_p) не удовлетворяет тождеству w_p . Теорема 2 доказана.

Отметим, что наряду с тождествами групп с отмеченной точкой можно изучать тождества ассоциативных колец с отмеченной точкой. Примеры ассоциативных колец без конечного базиса тождеств были найдены Беловым [12], [13], Гришиным [14] и Щиголевым [15], обзор результатов, связанных с проблемами типа Шпехта, можно найти, например, в [16].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. А. Бахтурин, А. Ю. Ольшанский, *Алгебра* – 2, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **18**, ВИНТИ, М., 1988, 117–240. [2] R. M. Bryant, *Bull. London Math. Soc.*, **14** (1982), 119–123. [3] S. Oates, M. B. Powell, *J. Algebra*, **1**:1 (1964), 11–39. [4] D. E. Cohen, *J. Algebra*, **5**:3 (1967), 267–273. [5] А. Н. Красильников, А. Л. Шмелькин, *Алгебра и логика*, **20** (1981), 546–554. [6] R. C. Lyndon, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 579–583. [7] Z. Ali, A. Majeed, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.*, **38** (1995), 3–11. [8] Z. Ali, A. Majeed, *Bull. Korean Math. Soc.*, **35**:4 (1998), 777–783. [9] M. Quick, *Arch. Math. (Basel)*, **81**:6 (2003), 614–620. [10] S. McKay, *Proc. London Math. Soc.* (3), **24** (1972), 243–256. [11] А. Н. Красильников, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:6 (1990), 1181–1195. [12] А. Я. Белов, *Фундамент. и прикл. матем.*, **5**:1 (1999), 47–66. [13] А. Я. Белов, *Матем. сб.*, **191**:3 (2000), 13–24. [14] А. В. Гришин, *Фундамент. и прикл. матем.*, **5**:1 (1999), 101–118. [15] В. В. Щиголев, *Фундамент. и прикл. матем.*, **5**:1 (1999), 307–312. [16] А. Я. Белов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:1 (2010), 3–134.

Г. С. Дерябина

Московский государственный

технический университет им. Н. Э. Баумана

E-mail: galina_deryabina@mail.ru

Поступило

24.08.2012

Исправленный вариант

26.09.2013

А. Н. Красильников

University of Brasilia, Бразилия

E-mail: alexei@unb.br