Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Тихонов, Аппроксимация перемешивающих преобразований, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 2, 282–299

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10123>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 12:40:36

Аппроксимация перемешивающих преобразований

С. В. Тихонов

Вопрос типичности некоторых классов перемешиваний сводится к аппроксимационным вопросам. В работе показывается, что типичное перемешивание можно аппроксимировать в поводок-метрике с помощью преобразований, имеющих достаточно широкий набор предельных операторов. Результаты применяются для доказательства типичности некоторых спектральных свойств.

Библиография: 8 названий.

DOI: 10.4213/mzm10123

Введение

Сохраняющее меру преобразование T стандартного вероятностного пространства называется *перемешиванием*, если для любых измеримых множеств A и B имеем

$$\mu(T^g A \cap B) \rightarrow \mu(A)\mu(B)$$

при $g \rightarrow \infty$. Множество перемешиваний $\mathcal{M}$ является полным сепарабельным пространством относительно поводок-метрики t , введенной в [1].

Множество всех обратимых сохраняющих меру преобразований $\mathcal{A}$ также является полным сепарабельным метрическим пространством относительно метрики слабой топологии d .

В этой работе мы изучаем типичные свойства перемешиваний. Напомним, что множество имеет *тип* G_δ , если оно представляется как пересечение счетного числа открытых множеств; всюду плотное G_δ -множество называется *массивным*. Свойство является *типичным*, если им обладают элементы некоторого массивного множества. Основной результат работы – следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{\mathcal{V}_i\}$ – счетный набор G_δ -подмножеств $\mathcal{A}$, замыкание каждого из которых в поводок-метрике содержит $\mathcal{M}$. Тогда пересечение $\bigcap_i \mathcal{V}_i \cap \mathcal{M}$ – массивное подмножество $\mathcal{M}$.

Таким образом, вопрос об исследовании некоторых типичных свойств сводится к аппроксимации перемешиваний неперемешивающими преобразованиями, обладающими этими свойствами. Другим важным результатом является теорема 2, указывающая широкий класс преобразований, аппроксимирующих $\mathcal{M}$. Это позволяет

Работа выполнена при поддержке Программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-5998.2012.1).

использовать технику работ [2], [3] и многих других при изучении типичных свойств в пространстве $\mathcal{M}$.

Мы приведем примеры применения полученных результатов к спектральной теории перемешиваний.

Структура работы следующая.

В разделе 1 работы напоминаются необходимые факты о рассматриваемых пространствах и используемых в них метриках. С использованием доказанного позже утверждения 2 доказывается теорема 1. В разделе 2 работы вводится понятие $\mathbb{P}$ -предела и формулируется аппроксимационная теорема 2. Рассматриваются несколько ее приложений к спектральной теории. Оставшаяся часть работы техническая и в основном направлена на доказательство леммы 6, из которой выводятся утверждение 2 и теорема 2. Также здесь можно выделить теорему 5, из которой автоматически следуют результаты серии лемм в различных работах (например, [4; лемма 1] или [2; лемма 1.6]).

1. Метрики, топологии, типичность

Пусть $\mathcal{A}$ – множество всех обратимых сохраняющих меру преобразований стандартного вероятностного пространства (X, Σ, μ) и $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ – счетный набор множеств, порождающий σ -алгебру Σ . Мера μ предполагается непрерывной и нормированной, все рассматриваемые в работе множества – измеримыми. Два преобразования отождествляются, если они совпадают с точностью до множества меры нуль. Заметим, что $\mathcal{A}$ – полное сепарабельное метрическое пространство относительно метрики

$$d(T, S) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i} (\mu(TA_i \triangle SA_i) + \mu(T^{-1}A_i \triangle S^{-1}A_i)).$$

Для соответствующей (слабой) топологии в $\mathcal{A}$ мы используем базу окрестностей

$$\mathcal{U}(T, q, \varepsilon) = \{S \mid \forall A, B \in q \mid \mu(TA \cap B) - \mu(SA \cap B) \mid < \varepsilon\}$$

(здесь и далее q – конечное подмножество Σ). Преобразование T называется *перемешивающим* (или *перемешиванием*), если для любых множеств $A, B \in \Sigma$ имеем

$$\mu(T^g A \cap B) \rightarrow \mu(A)\mu(B)$$

при $g \rightarrow \infty$. Как показано в [1], множество всех перемешиваний $\mathcal{M}$ является полным сепарабельным пространством относительно поводок-метрики

$$m(T, S) = d(T, S) + w(T, S),$$

где

$$w(T, S) = \sup_{g \in \mathbb{N}} \sum_{i, j} \frac{1}{2^{i+j}} |\mu(T^g A_i \cap A_j) - \mu(S^g A_i \cap A_j)|.$$

Функция $w(T, S)$ также является метрикой и топологии метрик $w(T, S)$ и $m(T, S)$ совпадают.

В некоторых утверждениях будут использоваться сразу несколько метрик. Поэтому мы будем использовать префикс “ m –”, если объект рассматривается в поводок-метрике, и “ d –”, если он рассматривается в метрике слабой топологии. Например, m -замыкание означает замыкание в поводок-метрике, а (d, ε) -окрестность – это

ε -окрестность в метрике d . В пространстве $\mathcal{A}$ основная метрика d , в $\mathcal{M}$ – это метрика m , и при использовании основной метрики префикс иногда будет опускаться.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть S – перемешивание и Δ – положительное число. Предположим, что $\{T_l\}$ – d -фундаментальная последовательность преобразований, сходящаяся к преобразованию T . Тогда

$$\sup_l m(S, T_l) \leq \Delta \quad \implies \quad m(S, T) \leq \Delta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $d(S, T_l) \rightarrow d(S, T)$ при $l \rightarrow \infty$, достаточно показать, что для любого $\delta > 0$ имеем

$$\sup_l w(S, T_l) \leq \delta \quad \implies \quad w(S, T) \leq \delta.$$

Предположим противное, что $w(S, T) - \delta = \varepsilon > 0$.

Тогда найдутся числа I, J, K такие, что

$$\sup_{g < K} \sum_{i < I, j < J} \frac{1}{2^{i+j}} |\mu(T^g A_i \cap A_j) - \mu(S^g A_i \cap A_j)| > \delta + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из d -непрерывности отображения $T \mapsto T^g$ при достаточно большом l имеем

$$\sup_{g < K} \sum_{i < I, j < J} \frac{1}{2^{i+j}} |\mu(T_l^g A_i \cap A_j) - \mu(S^g A_i \cap A_j)| > \delta + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, $w(S, T_l) > \delta + \varepsilon/2$, что противоречит предположению о положительности ε .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $\Delta > 0$, а преобразование Q и перемешивание S удовлетворяют условию $m(S, Q) < \Delta$. Тогда в любой слабой окрестности Q найдется перемешивание Y такое, что $m(Y, S) < \Delta$.

Доказательство этого утверждения будет приведено позже.

ЛЕММА 1. Пусть $\{\mathcal{O}_i\}$ – счетный набор открытых подмножеств $\mathcal{A}$. Предположим, что m -замыкание каждого из $\mathcal{O}_i$ содержит $\mathcal{M}$. Тогда $\bigcap_i \mathcal{O}_i \cap \mathcal{M}$ – массивное подмножество $\mathcal{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\bigcap_i \mathcal{O}_i$ через $\mathcal{O}$. Так как m -топология сильнее d -топологии, множество $\mathcal{M} \cap \mathcal{O}$ имеет тип G_δ . С помощью индукции покажем его плотность.

Возьмем произвольные перемешивание S и число $\delta > 0$. Найдём в (m, δ) -окрестности S перемешивание $Q \in \mathcal{O}$.

На первом шаге индукции выберем преобразование $Q_1 \in \mathcal{O}_1$ такое, что $m(Q_1, S) < \delta/4$, и его окрестность $\mathcal{U}_1$, замыкание которой содержится в $\mathcal{O}_1$. Согласно утверждению 2 в этой окрестности можно выбрать перемешивание S_1 так, что $m(S_1, S) < \delta/2$.

В начале n -го шага мы имеем d -открытую окрестность $\mathcal{U}_{n-1}$, содержащую перемешивание S_{n-1} . Поскольку m -замыкание $\mathcal{O}_n$ содержит $\mathcal{M}$, можно выбрать преобразование $Q_n \in \mathcal{U}_{n-1} \cap \mathcal{O}_n$ такое, что $m(Q_n, S_{n-1}) < \delta/2^{n+1}$. Выберем d -открытую окрестность $\mathcal{U}_n$ преобразования Q_n , замыкание которой содержится в $\mathcal{U}_{n-1} \cap \mathcal{O}_n$.

Согласно утверждению 2 в этой окрестности можно выбрать перемешивание S_n так, что $m(S_{n-1}, S_n) < \delta/2^n$.

Последовательность $\{S_n\}$ сходится в m -метрике к некоторому перемешиванию Q , причем $m(S, Q) < \delta$. Согласно построению предельное перемешивание лежит в d -замыканиях всех $\mathcal{U}_i$, а значит, в $\bigcap_i \mathcal{O}_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $\bigcap_l \mathcal{V}_{k,l}$ – представление множества $\mathcal{V}_k$ как пересечения счетного числа открытых множеств. Тогда замыкание каждого из множеств $\mathcal{V}_{k,l}$ в поводок-топологии содержит $\mathcal{M}$ (так как $\mathcal{V}_k \subset \mathcal{V}_{k,l}$). Осталось применить предыдущую лемму, взяв в качестве $\{O_i\}$ набор множеств $\{\mathcal{V}_{k,l}\}_{k,l \in \mathbb{N}}$.

2. Приложения

В этой части работы собрано несколько приложений теоремы 1.

Обозначим через Θ ортопроектор на подпространство констант в L_2 . Для любых множеств A и $B \in \Sigma$ имеем $(\Theta\chi_A, \chi_B) = \mu(A)\mu(B)$. Здесь и далее через χ_A обозначен индикатор множества A .

С каждым сохраняющим меру преобразованием T связан унитарный оператор, действующий в L_2 по формуле $f \mapsto f \circ T$. Он будет обозначаться той же буквой T .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор $P = P(T)$ назовем $\varkappa$ -полиномом, если $P(T) = \alpha\Theta + \alpha_0I + \alpha_1T + \dots + \alpha_nT^n$, коэффициенты $\{\alpha_i\}$ неотрицательны и $\sum_i \alpha_i = 1 - \alpha \leq \varkappa$.

Заметим, что все $\varkappa$ -полиномы можно почленно умножать на любую степень T и они останутся $\varkappa$ -полиномами (при этом $\Theta T^k = T^k \Theta = \Theta$ и $PT^k = T^k P$ для всех $k \in \mathbb{N}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\mathbb{P} = \{P_i\}_{i \leq t}$ – конечный упорядоченный набор $\varkappa$ -полиномов. Будем говорить, что преобразование T обладает $\mathbb{P}$ -пределом (по подпоследовательности $\{g_i\}$), если при $i \rightarrow \infty$ имеется слабая операторная сходимость

$$T^{g_i} \rightarrow P_1, \quad T^{2g_i} \rightarrow P_2, \quad \dots, \quad T^{tg_i} \rightarrow P_t.$$

Нам понадобится следующая аппроксимационная теорема, которую мы докажем позднее.

ТЕОРЕМА 2. Пусть S – перемешивающее преобразование и K – бесконечный набор натуральных чисел. Зафиксируем положительные числа Δ и $\varkappa$, удовлетворяющие условию $\Delta > \varkappa$, и множество наборов $\varkappa$ -полиномов $\{\mathbb{P}^s \mid \#\mathbb{P}^s \leq 1/(2\varkappa)\}_{s \in \mathbb{N}}$. Тогда в (t, Δ) -окрестности S найдется преобразование Y , обладающее всеми $\mathbb{P}^s$ -пределами по некоторым последовательностям элементов набора K .

Спектром преобразования называется спектр соответствующего унитарного оператора. Обозначим через σ_S максимальный спектральный тип преобразования S , а свертку максимальных спектральных типов будем обозначать звездочкой.

ТЕОРЕМА 3. Для типичного перемешивания S для любых натуральнозначных векторов $k = (k_1, \dots, k_n)$ и $l = (l_1, \dots, l_s)$ свертки $*_i \sigma_{S^{k_i}}$ и $*_j \sigma_{S^{l_j}}$ взаимно сингулярны тогда и только тогда, когда координаты вектора k не являются перестановкой координат вектора l .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение достаточно проверить при фиксированных k и l . Согласно [2] множество преобразований, обладающих этим свойством, массивно в $\mathcal{A}$. Также там показано, что для сингулярности сверток $*_i \sigma_{S^{k_i}}$ и $*_j \sigma_{S^{l_j}}$ достаточно, чтобы преобразование S имело $\mathbb{P}_t$ -предел с $t > n$, $t > s$, где

$$\{P_i \mid P_i = \alpha_i \Theta + (1 - \alpha_i)I\}_{i \leq t},$$

с логарифмически независимыми $(1 - \alpha_i)$. Зафиксировав любое число $\Delta > 0$, не превышающее $1/t$, построим систему $(\Delta/2)$ -полиномов, удовлетворяющих этому условию. Согласно теореме 2 в (m, Δ) -окрестности любого перемешивания можно найти преобразование Y , имеющее $\mathbb{P}_t$ -предел и, значит, имеет место сингулярность соответствующих сверток. По теореме 1 получаем, что перемешивания с этим свойством также типичны.

Этот результат уточняет один из результатов [1].

ТЕОРЕМА 4. Для типичного перемешивания S преобразование $S \times S^2 \times S^3 \times \dots$ имеет простой спектр.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что при каждом t массивно множество перемешиваний S , для которых $S \times S^2 \times \dots \times S^t$ имеет простой спектр. Пусть $\{f_i\}$ – всюду плотный на единичной сфере L_2 набор векторов. Для фиксированных S и $f \in L_2$ обозначим через $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ тензорные произведения векторов из $\{S^i f\}_{i \in \mathbb{Z}}$, а через L – замыкание линейной оболочки векторов $\{S^l f \otimes S^{2l} f\}_{l \in \mathbb{Z}}$. Положим

$$I_{S,f} = \{i \in \mathbb{N} \mid g_i \in L\},$$

и $\mathcal{V}_1 = \bigcap_i \{S \mid I_{S,f_i} = \mathbb{N}\}$. По построению множество $\mathcal{V}_1$ имеет тип G_δ . Покажем, что для каждого $k_0 \in \mathbb{N}$ оно содержит преобразования $S \in \mathcal{A}$ со всеми $\mathbb{P}_t^{s,k}$ -пределами вида

$$\mathbb{P}_t^{s,k} = \left\{ P_i^{s,k} \mid P_i^{s,k} = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \Theta + \frac{1}{2^k} I, & i \neq s \\ \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \Theta + \frac{1}{2^k} S, & i = s. \end{cases} \right\},$$

где $k, s \in \mathbb{N}$, $1 \leq s \leq t$ и $k > k_0$.

Для краткости будем рассматривать случай $t = 2$ (общий случай аналогичен). Пусть $f \in L_2$ и $g \otimes h \in L$. Так как преобразование $S \times S^2$ обладает $(P_1^{s,k} \times P_2^{s,k})$ -пределом, то вектор $P_1^{s,k} g \otimes P_2^{s,k} h$ лежит в L . Далее, имеем

$$2^{2k} P_1^{1,k} g \otimes P_2^{1,k} h = Sg \otimes h + b_k (Sg \otimes \Theta h + \Theta g \otimes h) + b_k^2 \Theta g \otimes \Theta h,$$

где $b_k = 2^k - 1$. Векторы $\{(1, b_{k+j}, b_{k+j}^2)\}_{j=0,1,2}$ образуют матрицу Вандермонда (следовательно, линейно независимы), поэтому $Sg \otimes h$ лежит в L как линейная комбинация векторов $\{(2^{2k} P_1^{1,k+j} g \otimes P_2^{1,k+j} h)\}_{j=0,1,2} \subset L$. Аналогично, $g \otimes Sh \in L$. Тогда

$$S^i f \otimes S^l f = (S \times I)^i (I \times S)^l f \otimes f \in L \quad \text{для всех } l, i > 0.$$

Векторы с произвольными знаками степеней i, l получаются применением $d > |i| + |l|$ раз оператора $S^{-1} \otimes S^{-2}$ к вектору с положительным набором степеней $S^{i+d} f \otimes S^{l+2d} f$. Следовательно, $\{g_i\} \subset L$ для любого f и, значит, $S \in \mathcal{V}_1$.

По теореме 2 m -замыкание $\mathcal{V}_1$ содержит $\mathcal{M}$. Заметим также, что для каждого $S \in \mathcal{V}_1$ множество векторов $F_S = \{f \mid I_{S,f} = \mathbb{N}\}$ имеет тип G_δ и всюду плотно (так как содержит $\{f_i\}$). В качестве $\mathcal{V}_2$ возьмем множество преобразований, имеющих простой спектр. Оно имеет тип G_δ в $\mathcal{A}$ (см., например, [5]) и плотно в $\mathcal{M}$ (см. [1]). Пусть $S \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$. Возьмем циклический для S вектор f , лежащий в F_S (это можно сделать, так как множество циклических векторов массивно, см. [6]). Тогда линейная оболочка $\{g_i\}$ – всюду плотный набор векторов и, значит, $(f \otimes \cdots \otimes f)$ – циклический вектор для $S \times \cdots \times S^t$. По теореме 1 множество $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \cap \mathcal{M}$ массивно в $\mathcal{M}$.

Для преобразований этот результат доказан в [7]. Существование перемешиваний с таким свойством анонсировано в [3] и доказано в [4].

3. Технические результаты

Для доказательства технических результатов нам необходимо ввести аппроксимационную конструкцию и исследовать, какие предельные операторы допустимы. В п. 3.1 введем башни и раскрой, необходимые для конструкции. Сама конструкция вводится в п. 3.2. Далее исследуются предельные операторы. В конце этого раздела доказана техническая лемма 6, из которой выводятся все недоказанные до этого момента результаты.

Мы будем использовать несколько стандартных обозначений. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $a \in \mathbb{Z}_+$. Через $\{a/k\}$ обозначим остаток от деления a на k , а через $[a/k]$ – целую часть дроби a/k . Условимся также писать $a \stackrel{\varepsilon}{\sim} b$ в случае, если $|a - b| < \varepsilon$.

3.1. Башни, раскрой. Преобразование T называется *апериодическим*, если множество

$$\{x \mid \exists g \neq 0 \ T^g x = x\}$$

имеет меру нуль. Любое перемешивание является апериодическим преобразованием.

В следующем предложении собраны два классических результата об апериодических преобразованиях – лемма Рохлина–Халмоша и лемма Халмоша о сопряжении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть T – апериодическое преобразование.

1. Для любых чисел $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ существует множество $E \in \Sigma$ такое, что множества $\{T^g E\}_{g=0, \dots, n-1}$ попарно не пересекаются и их общая мера превышает $1 - \varepsilon$. Набор таких множеств называется *башней Рохлина*.

2. Имеет место равенство $\overline{\{U^{-1}TU\}_{U \in \mathcal{A}}} = \mathcal{A}$. (Здесь и далее черта сверху означает замыкание в слабой топологии.)

Доказательство этого результата можно найти в [8].

Раскрой, вводимый ниже, описывает систему множеств с несколько более сложным поведением под действием преобразования, чем башня.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $R \in \mathcal{A}$, k, l, s – натуральные числа и $\varepsilon > 0$. ε -Раскроем с законом (3.1)–(3.3) для преобразования R (в дальнейшем просто *раскроем*) назовем набор непересекающихся множеств

$$\mathbb{E}_{k,l,s}^\varepsilon = \left\{ E_i \mid \mu(E_i) = \frac{1}{ks} \right\}_{i=0, \dots, ks-1},$$

удовлетворяющий следующим условиям:

$$\mu(R^g E_i \cap E_i) \stackrel{\varepsilon/(ks)}{\sim} \frac{1 - g/l}{ks} \quad (3.1)$$

при всех i и g : $0 \leq g < l$;

$$\mu\left(R^g E_i \cap \left(\bigcup_{j: j \stackrel{k}{\sim} i} E_j\right)\right) \stackrel{\varepsilon/(ks)}{\sim} 0, \quad (3.2)$$

при всех i и g : $kl \leq g < kl(s-1)$;

$$\mu(R^{gl} E_i \setminus E_{i+g}) \stackrel{\varepsilon/(ks)}{\sim} 0, \quad (3.3)$$

при всех i, g : $i + g < ks$.

В целях упрощения формулировок условимся считать, что если задан раскрой $\mathbb{E}_{k,l,s}^\varepsilon$, то автоматически заданы все его параметры – k, l, s, ε и определены множества $\{E_i\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любого апериодического преобразования R существует раскрой $\mathbb{E}_{k,l,s}^\varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{R^g G\}_{g=0,\dots,kl s-1}$ – башня меры больше $1 - \varepsilon/(2kls)$. Дополним множества $R^g G$ до непересекающихся множеств $\tilde{G}_g$ меры $1/(ksl)$. Тогда положим

$$E_i = \bigcup_{g=il,\dots,(i+1)l-1} \tilde{G}_g.$$

Непосредственно проверяется, что множества $\{E_i\}$ удовлетворяют всем свойствам раскроя.

3.2. Конструкция специального преобразования Y . Пусть даны число $p \in \mathbb{N}$, преобразования T и R и раскрой $\mathbb{E}_{k,l,s}^\varepsilon$ для R . Мы построим специальное преобразование Y по набору чисел $\{g_i\} \subset \mathbb{N}$ и конечному набору множеств $r \subset \Sigma$.

Выберем произвольное сохраняющее меру преобразование $U: X \rightarrow X \times X$, переводящее каждое множество B из набора r на множество $B \times X$. Определим ассоциированное с раскром $\mathbb{E}_{k,l,s}^\varepsilon$ преобразование декартова произведения $X \times X$, действующее по формуле

$$J|_{X \times E_a}(x, y) = (T^{g_a} x, y) \quad \text{для всех } a = 0, \dots, sk-1.$$

Преобразование

$$Y = U^{-1} J^{-1} (T \times R) J U$$

назовем *специальным*.

Заметим, что для любых $A, B \in r, g \in \mathbb{Z}$ и числа $\mathbb{D}$ имеем

$$\begin{aligned} & |\mathbb{D} - \mu(U^{-1} J^{-1} (T^g \times R^g) J U A \cap B)| \\ &= |\mathbb{D} - \mu \otimes \mu(J^{-1} (T^g \times R^g) J (A \times X) \cap (B \times X))| \\ &= |\mathbb{D} - \mu \otimes \mu(J^{-1} (T^g \times R^g) J (A \times \sqcup_a E_a) \cap (B \times \sqcup_b E_b))| \\ &\leq \sum_{a,b} |\mathbb{D} - \mu(T^{g_a - g_b + g} A \cap B)| \mu(R^g E_a \cap E_b). \end{aligned}$$

Полученная формула

$$|\mathbb{D} - \mu(Y^g A \cap B)| \leq \sum_{a,b} |\mathbb{D} - \mu(T^{g_a - g_b + g} A \cap B)| \mu(R^g E_a \cap E_b) \quad (3.4)$$

будет в основном использоваться с $\mathbb{D} = \mu(S^g A \cap B)$ для оценки расстояния между преобразованиями S и Y .

Выбор набора $\{g_i\}$. Последовательность $\{g_i\}$ представляется как сумма периодической с периодом k последовательности $\{g_i^- = \{i/k\}(l-p)\}$ и функции скачков

$$\left\{ g_i^+ \mid \left[\frac{a}{k} \right] = \left[\frac{b}{k} \right] \Rightarrow g_a^+ = g_b^+ \right\},$$

зависящей от рассматриваемой задачи. Следующие два утверждения верны вне зависимости от выбранной функции скачков.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Имеем $Y \in \mathcal{U}(T, r, \varepsilon + 1/l)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A, B \in r$. Применим формулу (3.4) с $g = 1$ и $\mathbb{D} = \mu(TA \cap B)$. При этом будем учитывать, что по свойству (3.1) раскрыя $\mu(RE_a \setminus E_a)$ не больше, чем $(1/l)\mu(E_a) + \varepsilon/(ks)$. Итак, имеем

$$\begin{aligned} & |\mu(TA \cap B) - \mu(YA \cap B)| \\ & \leq \sum_{a,b} |\mu(TA \cap B) - \mu(T^{g_a - g_b + g} A \cap B)| \mu(RE_a \cap E_b) \\ & \leq \sum_a |\mu(TA \cap B) - \mu(TA \cap B)| \mu(RE_a \cap E_a) + \sum_a \mu(RE_a \setminus E_a) < \varepsilon + \frac{1}{l}. \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Имеем*

$$Y^{gl} \in \mathcal{U}\left(T^{gp}, r, \varepsilon + \frac{g}{k}\right) \quad \text{для } g = 0, \dots, k-1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A, B \in r$. Применив формулу (3.4) с $\mathbb{D} = \mu(T^{gp}A \cap B)$, имеем

$$\begin{aligned} & |\mu(T^{gp}A \cap B) - \mu(Y^{gl}A \cap B)| \\ & \leq \sum_{a,b} |\mu(T^{gp}A \cap B) - \mu(T^{g_a - g_b + gl} A \cap B)| \mu(R^{gl}E_a \cap E_b) \\ & \leq \sum_{a: \{a/k\} + g < k} |\mu(T^{gp}A \cap B) - \mu(T^{-g(l-p) + gl} A \cap B)| \mu(R^{gl}E_a \cap E_{a+g}) \\ & \quad + \sum_{a: \{a/k\} + g < k} \mu(R^{gl}E_a \setminus E_{a+g}) + \sum_{a: \{a/k\} + g \geq k} \mu(E_a) \leq 0 + \varepsilon + \frac{g}{k}. \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что при $\{a/k\} + g < k$ верна формула раскрыя (3.3) и $g_a - g_{a+g} = g_a^- - g_{a+g}^- = -g(l-p)$.

ЛЕММА 2. Пусть все параметры Y , кроме последовательности $\{g_i\}$, зафиксированы, причем T – перемешивающее преобразование. Тогда числа $\{g_i^+\}$ можно подобрать так, что для любого целого g , любых $A, B \in r$ сравнение

$$\mu(T^{g_a - g_b + g} A \cap B) \stackrel{\varepsilon}{\sim} \mu(A)\mu(B)$$

может не выполняться только при одном исключительном значении $g_{\max\{a,b\}}^+ = g_*^+(g)$ или при $g_a^+ = g_b^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть z – такое число, что $\mu(T^g A \cap B) \stackrel{\varepsilon}{\sim} \mu(A)\mu(B)$ при $|g| \geq z$ для всех $A, B \in r$.

Тогда достаточно положить

$$g_i^+ = 4^{[i/k]}(kp + z) \quad \text{для всех } i.$$

Действительно, при фиксированных a и b (не теряя общности, считаем, что $a > b$) сравнение может не выполняться только при

$$(g_a^+ - g_b^+ + (g_a^- - g_b^-)) \stackrel{z}{\sim} |g|.$$

Так как $|g_a^- - g_b^-| < kp$, то $|g|$ лежит в интервале $((1/2)g_a^+, (3/2)g_a^+)$. Для разных g_a^+ такие интервалы не пересекаются, поэтому $|g|$ может лежать не более чем в одном из них.

3.3. Допустимые наборы предельных операторов. Через $\mathbb{P}_t$ будем обозначать набор $\varkappa$ -полиномов $\{P_1, \dots, P_t\}$ (или просто через $\mathbb{P}$, если набор бесконечен или количество $\varkappa$ -полиномов в наборе несущественно). Будем писать $\mathbb{P}_t \subset \mathbb{P}$, если набор $\mathbb{P}_t$ является началом набора $\mathbb{P}$. Через P_i будем обозначать i -й полином в наборе $\mathbb{P}$, а через $\mathbb{P}_i$ – начальную часть $\mathbb{P}$, т.е. набор вида $\{P_1, \dots, P_i\}$. Известно, что типичное преобразование имеет $\mathbb{P}_1$ -предел для любого возможного $\mathbb{P}_1$, см., например, [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Назовем конечный набор $\varkappa$ -полиномов $\mathbb{P}_t$ *допустимым*, если существует апериодическое преобразование, имеющее $\mathbb{P}_t$ -предел. Набор $\mathbb{P}_t$ назовем *допустимо пополняемым*, если существует бесконечный набор $\varkappa$ -полиномов $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}_t \subset \mathbb{P}$, такой, что все наборы $\mathbb{P}_i$, $i \in \mathbb{N}$, допустимы.

Наличие $\mathbb{P}$ -предела – динамическое свойство, т.е. сохраняется при сопряжении. Поэтому, если набор $\mathbb{P}$ допустим, то преобразования, имеющие $\mathbb{P}$ -предел, всюду плотны в $\mathcal{A}$.

Следующее обозначение будет удобно при исследовании $\mathbb{P}$ -пределов.

Пусть r – конечный набор множеств, l – натуральное число, $\mathbb{P}_t$ – конечный набор полиномов и $\varepsilon > 0$. Будем писать

$$D(T, \mathbb{P}_t) \prec_{r,l} \varepsilon,$$

если для любых $A, B \in r$ и $i \leq t$ имеем

$$\mu(T^{il} A \cap B) \stackrel{\varepsilon}{\sim} (P_i \chi_A, \chi_B).$$

ЛЕММА 3. Пусть $\{U_i\} \subset \mathbb{N}$ – последовательность отрезков, длина которых стремится к бесконечности. Тогда для любого целого d существует такая подпоследовательность $\{V_i\} \subset \{U_i\}$, что при $i, j, i > j$, имеем $[c_i - c_j - d, c_i + c_j + d] \subset V_i$ (здесь c_i – центр отрезка V_i).

Доказательство этого простого факта оставляем читателю.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $\varepsilon > 0$, r – конечный набор множеств, $\{g_i\} \subset \mathbb{N}$ и $T^{g_i} \rightarrow \Theta$. Возьмем в качестве U_i отрезки максимальной длины с центром в g_i такие, что для всех $l \in U_i$ имеем

$$D(T, \Theta) \prec_{r,l} \varepsilon \quad \text{и} \quad D(T, \Theta) \prec_{r,-l} \varepsilon.$$

Тогда длина отрезков U_i стремится к бесконечности. Действительно, так как для любого d , любых $A, B \in r$ при достаточно больших i и $j < d$ имеем

$$\mu(T^{g_i+j} A \cap B) = \mu(T^{-g_i-j} B \cap A) = \mu(T^{g_i} T^j A \cap B) \stackrel{\varepsilon}{\sim} \mu(A) \mu(B),$$

то $g_i + d \in U_i$.

ЛЕММА 4. Пусть $\delta > 0$, $l > 2/\delta$ и $n < t$ – произвольные числа. Рассмотрим преобразование Q , κ -полином P и конечный набор множеств r . Тогда в любой окрестности $\mathcal{U}(Q, r, \delta)$ найдется преобразование Y такое, что

$$D\left(Y, \frac{P + \Theta}{2}\right) \prec_{r,nl} \delta \quad \text{и} \quad D(Y, \Theta) \prec_{r,gl} \delta,$$

для всех g : $0 < g \leq t$, $g \neq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольное апериодическое преобразование R и $\varepsilon = \delta/8$. В окрестности $\mathcal{U}(Q, r, \varepsilon)$ выберем преобразование T , имеющее как $\{P\}$ -, так и $\{\Theta\}$ -пределы. Далее, возьмем число s , делящееся на $2n$ и превышающее $8t/\delta$.

Зафиксируем положительное число p такое, что для любых $A, B \in r$ имеем

$$\mu(T^p A \cap B) \stackrel{\delta/8}{\sim} (P\chi_A, \chi_B).$$

С помощью замечания 1 выберем последовательность отрезков $\{U_i\}$ и применим лемму 3 с $d = 2tl + p$. Пусть $\{c_i\}$ – центры полученных множеств $\{V_i\}$.

Обозначим через K^+ множество

$$\bigcup_{j=0, s/(2n)-1} [2nj, 2nj + n - 1],$$

а через K^- – множество

$$\bigcup_{j=0, s/(2n)-1} [2nj + n, 2nj + 2n - 1].$$

При $i \in K^+$ положим

$$g_i^+ = c_i \quad \text{и} \quad g_{i+n}^+ = g_i^+ - p + nl.$$

Применим конструкцию специального преобразования Y , используя параметры $p, T, R, \{g_i\}$ и раскрой $\mathbb{E}_{1,l,s}^\varepsilon$. При выбранных параметрах ($k = 1$) имеем $g_i^- \equiv 0$ и $g_i \equiv g_i^+$. Согласно утверждению 3 преобразование Y лежит в

$$\mathcal{U}\left(T, r, \frac{\delta}{8} + \frac{\delta}{2}\right) \subset \mathcal{U}(Q, r, \delta).$$

Зафиксируем произвольные множества A и B из набора r .

В случае $g \neq n$ имеем включение $|g_a^+ - g_{a+g}^+ + gl| \in V_i$ для некоторого i , значит,

$$D(T, \Theta) \prec_{r, g_a - g_{a+g} + gl} \varepsilon.$$

Применим формулу (3.4) с $\mathbb{D} = (\Theta\chi_A, \chi_B)$:

$$\begin{aligned} & |(\Theta\chi_A, \chi_B) - \mu(Y^{gl}A \cap B)| \\ & \leq \sum_{a < s-g} |(\Theta\chi_A, \chi_B) - \mu(T^{g_a - g_{a+g} + gl}A \cap B)| \mu(R^{gl}E_a \cap E_{a+g}) \\ & \quad + \sum_{a < s-g} \mu(R^{gl}E_a \setminus E_{a+g}) + \sum_{a \geq s-g} \mu(E_a) < \frac{\delta}{8} + \frac{\delta}{8} + \frac{t}{s} < \delta \end{aligned}$$

(к первому слагаемому последней строки мы применили формулу (3.3)). Таким образом, $D(Y, \Theta) \prec_{r, gl} \delta$.

Далее, если $g = nl$ и $\mathbb{D} = ((P + \Theta)/2\chi_A, \chi_B)$, получаем

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{P + \Theta}{2} \chi_A, \chi_B \right) - \mu(Y^{nl}A \cap B) \right| \\ & \leq \sum_{a \in K^+} |(P\chi_A, \chi_B) - \mu(T^{g_a - g_{a+n} + nl}A \cap B)| \mu(R^{nl}E_a \cap E_{a+n}) \\ & \quad + \sum_{a \in K^-, a < s-n} |(\Theta\chi_A, \chi_B) - \mu(T^{g_a - n - p + nl - g_{a+n} + nl}A \cap B)| \mu(R^{nl}E_a \cap E_{a+n}) \\ & \quad + \sum_{a \geq s-n} \mu(E_a) + \sum_{a < s-n} \mu(R^{nl}E_a \setminus E_{a+n}) < \delta. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$D\left(Y, \frac{P + \Theta}{2}\right) \prec_{r, nl} \delta.$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\mathbb{P}_t$ – набор $\varkappa$ -полиномов и $t \leq 1/(2\varkappa)$. Тогда набор $\mathbb{P}_t$ допустимо дополняем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathbb{P}$ бесконечный набор операторов

$$\{P_1, P_2, \dots, P_t, \Theta, \Theta, \dots\}$$

и покажем, что для любого $\bar{t} > t$ набор $\mathbb{P}_{\bar{t}}$ допустим.

Пусть $\delta > 0$, T – произвольное преобразование и $\mathcal{U}(T, r, \delta)$ – его окрестность. Для любого $l > 2/\delta$ найдем в этой окрестности такое преобразование Y , что

$$D(Y, \mathbb{P}_{\bar{t}}) \prec_{r, l} \delta.$$

Так как $t\kappa \leq 1/2$, то для любого $i \leq t$ оператор $tP_i - (t-1)\Theta$ представляется как сумма $(P + \Theta)/2$ для некоторого κ -полинома P . Согласно лемме 4 в этом случае можно выбрать систему преобразований $\{Q_i\}_{i=1,\dots,t}$ таких, что $Q_i \in \mathcal{U}(T, r, \delta)$ и

$$D\left(Q_i, \overbrace{\{\Theta, \dots, \Theta, tP_i - (t-1)\Theta, \Theta, \Theta, \dots, \Theta\}}^{\bar{t} \text{ элементов}}\right) \prec_{r,l} \delta$$

для всех $i \leq t$.

Рассмотрим пространство $X \times \{1, 2, \dots, t\}$ и преобразование $Y: (x, i) \mapsto (Q_i x, i)$.

Выберем произвольное сохраняющее меру преобразование $U: X \rightarrow X \times \{1, \dots, t\}$, переводящее каждое множество B из набора r в множество $B \times \{1, \dots, t\}$. Тогда для любых $A, B \in r$ имеем

$$|\mu(TA \cap B) - \mu(U^{-1}YUA \cap B)| \leq \sum_{i=1,\dots,t} |\mu(TA \cap B) - \mu(Q_i A \cap B)| \frac{1}{t} < \delta,$$

т.е. $U^{-1}YU \in \mathcal{U}(T, r, \delta)$.

Далее, для всех $i = 1, \dots, t$ имеем

$$\begin{aligned} \mu(U^{-1}Y^{il}UA \cap B) &= \sum_{j=1,\dots,t} \mu(Q_j^{il}A \cap B) \frac{1}{t} \\ &\stackrel{\delta}{\sim} \frac{t-1}{t} (\Theta\chi_A, \chi_B) + \frac{1}{t} ((tP_i - (t-1)\Theta)\chi_A, \chi_B) = (P_i\chi_A, \chi_B), \end{aligned}$$

а при $t < i \leq \bar{t}$ получаем

$$\mu(U^{-1}Y^{il}UA \cap B) = \sum_{j=1,\dots,t} \mu(Q_j^{il}A \cap B) \frac{1}{t} \stackrel{\delta}{\sim} (\Theta\chi_A, \chi_B).$$

Таким образом, в сколь угодно малой окрестности любого преобразования T можно найти преобразование Y такое, что $D(Y, \mathbb{P}_{\bar{t}}) \prec_{r,l} \delta$.

Далее, описанной выше процедурой, построим последовательность преобразований Y_i и чисел l_i таких, что

$$d(Y_i, Y_{i-1}) < \frac{1}{2^i},$$

$$D(Y_i, \mathbb{P}_{\bar{t}}) \prec_{r_j, l_j} \frac{1}{2^j} \quad \text{для всех } j \leq i, \quad r_j = \{A_1, \dots, A_j\}.$$

Тогда предельное преобразование для последовательности $\{Y_i\}$ апериодично и имеет $\mathbb{P}_{\bar{t}}$ -предел.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Хотя мы предполагали, что κ -полином не содержит членов с отрицательными степенями преобразования, все результаты будут верны и без подобного предположения. Это не трудно увидеть, так как если преобразование S имеет $\{P_1, \dots, P_t\}$ -предел по последовательности $\{g_i\}$, то по последовательности $\{g_i - 1\}$ оно имеет $\{S^{-1}P_1, \dots, S^{-t}P_t\}$ -предел.

ЛЕММА 5. Пусть $l \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ – произвольные числа, Q – произвольное преобразование, r – фиксированный конечный набор множеств и $\mathbb{P}_k$ – допустимый набор κ -полиномов. Тогда в любой слабой окрестности Q можно выбрать перемешивание T и сколь угодно большое число p такие, что

- 1) $D(T, \mathbb{P}_k) \prec_{r,p} \varepsilon$;
- 2) $D(T, T^i P_s) \prec_{r,sp+i} \varepsilon$ при всех $s \leq k$ и $i = -2kl, \dots, 2kl$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия 1) и 2) открыты в слабой топологии, поэтому достаточно найти удовлетворяющее им произвольное преобразование T . Пусть q – набор множеств $\{T^i A\}_{A \in r, i = -2kl, \dots, 2kl}$. Возьмем в нужной окрестности Q преобразование T , имеющее $\mathbb{P}_k$ -предел, и выберем p таким, что $D(T, \mathbb{P}_k) \prec_{q,p} \varepsilon$. Тогда для любых $A, B \in r$, $s \leq k$ и $i = -2kl, \dots, 2kl$ имеем

$$\mu(T^{sp+i} A \cap B) = \mu(T^{sp} A \cap T^{-i} B) \stackrel{\varepsilon}{\sim} (P_s \chi_A, \chi_{T^{-i} B}) = (T^i P_s \chi_A, \chi_B),$$

т.е. $D(T, T^i P_s) \prec_{r,sp+i} \varepsilon$.

3.4. Аппроксимация. Пусть q – конечное подмножество Σ , Δ – положительное число и T, S – два (не обязательно перемешивающих) преобразования. Будем писать

$$w(T, S) \prec_q \Delta,$$

если

$$\sup_{g \in \mathbb{N}, A, B \in q} |\mu(T^g A \cap B) - \mu(S^g A \cap B)| < \Delta.$$

Также будем писать, что $m(T, S) \prec_q \Delta$, если $w(T, S) \prec_q \Delta - d(T, S)$. Заметим, что если T зафиксировано и $\varepsilon > 0$, то взяв q содержащим $\{A_i\}_{i \leq 1 - \log_2 \varepsilon}$, имеем

$$m(T, S) \prec_q \Delta \quad \implies \quad m(T, S) < \Delta + \varepsilon.$$

ЛЕММА 6. Зафиксируем положительные числа $\varepsilon, \varkappa$ и конечный набор множеств $q \subset \Sigma$. Пусть перемешивание S и преобразование Q таковы, что $w(S, Q) \prec_q \varkappa$. Тогда для любых конечного набора $r \subset \Sigma$, числа $t \in \mathbb{N}$, допустимо пополняемого конечного набора $\varkappa$ -полиномов $\mathbb{P}_t$ и достаточно большого $l \in \mathbb{N}$ существует перемешивание Y такое, что

$$D(Y, \mathbb{P}_t) \prec_{r,l} 3\varepsilon, \quad w(Y, S) \prec_q \varkappa + 5\varepsilon, \quad d(Y, Q) < 4\varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое преобразование Y будет строиться как специальная конструкция. Прежде всего, подберем ее параметры и параметры раскроя $\mathbb{E}_{k,l,s}^\varepsilon$:

Выбор r . Хотя набор r задан в условии, мы (без ограничения общности) потребуем, чтобы r содержало q и

$$Y \in \mathcal{U}(Q, r, 3\varepsilon) \quad \implies \quad d(Y, Q) < 4\varepsilon.$$

Выбор l . Число l должно быть больше, чем $1/\varepsilon$, и для любых $A, B \in r$ при $g \geq \varepsilon l$, должно выполняться сравнение

$$\mu(S^g A \cap B) \stackrel{\varepsilon}{\sim} \mu(A)\mu(B). \quad (3.5)$$

Выбор k . Число εk должно быть больше количества рассматриваемых полиномов t и при $g > k$ для всех $A, B \in r$ должно выполняться сравнение

$$\mu(S^g A \cap B) \stackrel{\varepsilon}{\sim} \mu(A)\mu(B). \quad (3.6)$$

Выбор T, R, p . Выберем допустимый набор полиномов $\mathbb{P}_k, \mathbb{P}_t \subset \mathbb{P}_k$. Зафиксируем слабую окрестность преобразования Q такую, что

$$T \in \mathcal{O}(Q) \quad \implies \quad \forall A, B \in r, \quad g < kl \quad \mu(T^g A \cap B) \stackrel{\varepsilon}{\sim} \mu(Q^g A \cap B). \quad (3.7)$$

С помощью леммы 5 найдем число $p > l$ и перемешивание $T \in \mathcal{O}(Q)$. В качестве R возьмем любое перемешивающее преобразование, тогда Y будет перемешивать.

Выбор $\{g_i = g_i^- + g_i^+\}$. Последовательность $\{g_i^-\}$ фиксирована при определении конструкции, $g_i^- = \{i/k\}(l - p)$, а $\{g_i^+\}$ выбирается с помощью леммы 2. Заметим, что по построению $\{g_i^+\}$ каждое значение принимает ровно k раз.

Выбор s . Число s возьмем таким, что $s > 2/\varepsilon$ и для любых $A, B \in r$ при $g \geq kl(s - p)$ имеем

$$\mu(T^g A \cap B) \stackrel{\varepsilon}{\sim} \mu(A)\mu(B). \quad (3.8)$$

По выбранным параметрам построим раскрой $\mathbb{E}_{k,l,s}^\varepsilon$ и конструкцию Y . Согласно утверждению 3 имеем

$$Y \in \mathcal{U}\left(T, r, \varepsilon + \frac{1}{l}\right) \subset \mathcal{U}(Q, r, 3\varepsilon)$$

и, следовательно, $d(Y, Q) < 4\varepsilon$.

Далее, по утверждению 4

$$Y^{cl} \in \mathcal{U}\left(T^{cp}, r, \varepsilon + \frac{c}{k}\right) \quad \text{для} \quad c = 0, \dots, t - 1.$$

Так как по построению T (из пункта 1) леммы 5 имеем $D(T, P_c) \prec_{r, cp} \varepsilon$, то выполнено $D(Y, \mathbb{P}_t) \prec_{r, l} 3\varepsilon$.

Зафиксируем произвольные множества A, B из q , число $g \in \mathbb{N}$ и обозначим через g_*^+ исключительное значение $g_{\max\{a,b\}}^+$ в смысле леммы 2. Для завершения доказательства покажем, что

$$|\mu(S^g A \cap B) - \mu(Y^g A \cap B)| < \varkappa + 5\varepsilon.$$

Пусть E – множество таких пар (a, b) , что

$$|\mu(S^g A \cap B) - \mu(T^{g_a - g_b + g} A \cap B)| \leq 2\varepsilon + \varkappa. \quad (3.9)$$

Тогда согласно формуле (3.4) с $\mathbb{D} = \mu(S^g A \cap B)$ имеем

$$\begin{aligned} |\mu(S^g A \cap B) - \mu(Y^g A \cap B)| &\leq \sum_{a,b} |\mu(S^g A \cap B) - \mu(T^{g_a - g_b + g} A \cap B)| \mu(R^g E_a \cap E_b) \\ &\leq \sum_{(a,b) \notin E} \mu(R^g E_a \cap E_b) + (2\varepsilon + \varkappa). \end{aligned}$$

Таким образом, достаточно показать, что сумма

$$\nu = \sum_{(a,b) \notin E} \mu(R^g E_a \cap E_b)$$

не превышает 3ε .

Какие именно пары (a, b) могут не попасть в E , зависит от значений a и b и расположения g на числовой прямой. Так как число a однозначно определяется значениями g_a и g_a^+ , условия на пары можно выписывать в терминах этих последовательностей. Случаи, когда пары (a, b) могут не принадлежать E , помечены минусом в следующей таблице 1¹.

ТАБЛИЦА 1

	$g_a = g_b$	$g_a \neq g_b,$ $g_a^+ = g_b^+$	$g_a \neq g_b,$ $g_{\max\{a,b\}}^+ \neq g_*^+$	$g_{\max\{a,b\}}^+ = g_*^+$	оценка суммы ν
$0 \leq g < \varepsilon l$	+	—	—	—	2ε
$\varepsilon l \leq g < kl$	+	+	+	—	ε
$kl \leq g < kl(s-1)$	—	—	+	—	3ε
$g \geq kl(s-1)$	+	+	+	—	ε

Покажем, что пары (a, b) , соответствующие “плюсам”, лежат в E и оценка (3.9) действительно выполняется.

В первом столбце имеем

$$\mu(T^{g_a - g_b + g} A \cap B) = \mu(T^g A \cap B).$$

При $g < kl$ из формулы (3.7) следует, что

$$\mu(T^g A \cap B) \stackrel{\varepsilon}{\sim} \mu(Q^g A \cap B),$$

а из $w(S, Q) \prec_q \varkappa$ — что

$$\mu(Q^g A \cap B) \stackrel{\varkappa}{\sim} \mu(S^g A \cap B).$$

По неравенству треугольника получаем

$$\mu(T^g A \cap B) \stackrel{\varepsilon + \varkappa}{\sim} \mu(S^g A \cap B).$$

При $g \geq kl(s-1)$ из (3.5) и (3.8) имеем

$$\begin{aligned} & |\mu(T^g A \cap B) - \mu(S^g A \cap B)| \\ & \leq |\mu(T^g A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| + |\mu(A)\mu(B) - \mu(S^g A \cap B)| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Во втором столбце

$$\mu(T^{g_a - g_b + g} A \cap B) = \mu(T^{g_a^- - g_b^- + g} A \cap B).$$

При $\varepsilon l \leq g < kl$ предположим для определенности, что $a < b$. В этом случае $|g - l(b-a)| \leq 2kl$ и из п. 2) леммы 5 имеем

$$\mu(T^{g_a^- - g_b^- + g} A \cap B) = \mu(T^{(b-a)(p-l)+g} A \cap B) \stackrel{\varepsilon}{\sim} (P_{b-a} T^{g-l(b-a)} \chi_A, \chi_B).$$

Так как P_{b-a} — $\varkappa$ -полином, то

$$(P_{b-a} T^{g-l(b-a)} \chi_A, \chi_B) \stackrel{\varkappa}{\sim} (\Theta \chi_A, \chi_B) = \mu(A)\mu(B).$$

¹Кроме того, в таблице 1 приведена оценка суммы ν . Вычисления, подтверждающие данные таблицы, приведены ниже.

Применяя неравенство треугольника и учитывая (3.5), получаем

$$\mu(T^{g_a - g_b + g} A \cap B) \stackrel{2\varepsilon + \varkappa}{\sim} \mu(S^g A \cap B).$$

При $g \geq kl(s-1)$ имеем $(l-p)(a-b) + g \geq kls - kp$. Значит, по формуле (3.8)

$$\mu(T^{(l-p)(a-b)+g} A \cap B) \stackrel{\varepsilon}{\sim} \mu(A)\mu(B).$$

Применяя (3.5) и неравенство треугольника, имеем

$$\mu(T^{(l-p)(a-b)+g} A \cap B) \stackrel{2\varepsilon}{\sim} \mu(S^g A \cap B).$$

В третьем столбце для всех пар (a, b) согласно лемме 2

$$\mu(T^{g_a - g_b + g} A \cap B) \stackrel{\varepsilon}{\sim} \mu(A)\mu(B).$$

Тогда при $g \geq l\varepsilon$ ввиду (3.5)

$$\mu(T^{g_a - g_b + g} A \cap B) \stackrel{2\varepsilon}{\sim} \mu(S^g A \cap B).$$

Таким образом, во всех случаях, помеченных в таблице плюсом, имеем $(a, b) \in E$.

Величина ν оценивается суммой $\sum_{(a,b)} \mu(R^g E_a \cap E_b)$, где суммирование ведется по всем парам (a, b) , соответствующим при выбранном g минусу в таблице.

В зависимости от расположения g имеем следующие случаи.

При $0 \leq g < \varepsilon l$

$$\nu \leq 1 - \sum_a \mu(R^g E_a \cap E_a).$$

Согласно свойствам раскроя (см. (3.1)) правая часть не превосходит $g/l + \varepsilon < 2\varepsilon$.

При $\varepsilon l \leq g < kl$ или при $g \geq kl(s-1)$ имеем

$$\nu \leq \sum_{(a,b): g_{\max\{a,b\}}^+ = g_*^+} \mu(R^g E_a \cap E_b) \leq 2 \sum_{a: g_{\max\{a,b\}}^+ = g_*^+} \mu(R^g E_a) = 2k\mu(E_a) = \frac{2}{s} < \varepsilon.$$

Далее, при $kl \leq g < kl(s-1)$ имеем

$$\nu \leq \sum_{(a,b): g_{\max\{a,b\}}^+ = g_*^+} \mu(R^g E_a \cap E_b) + \sum_{(a,b): g_a^+ = g_b^+} \mu(R^g E_a \cap E_b).$$

Согласно формуле (3.2) раскроя получаем $\nu < 2/s + 2\varepsilon < 3\varepsilon$.

Таким образом, ν во всех случаях меньше 3ε и

$$|\mu(S^g A \cap B) - \mu(Y^g A \cap B)| < 3\varepsilon + 2\varepsilon + \varkappa = 5\varepsilon + \varkappa.$$

Лемма 6 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2. Пусть $\Delta - m(S, Q) = \delta$. Возьмем такой набор множеств q , что для любого T имеем

$$m(T, S) \prec_q \left(\Delta - \frac{\delta}{2} \right) \implies m(T, S) < \Delta.$$

Пусть

$$\varkappa = \inf\{\lambda : w(S, Q) \prec_q \lambda\} + \frac{\delta}{20}.$$

Применяя лемму 6 с достаточно малым $\varepsilon < \delta/20$ и пустыми наборами $\mathbb{P}$ и r , получим в $(d, \delta/5)$ -окрестности Q перемешивание Y , удовлетворяющее условию

$$w(S, Y) \prec_q w(S, Q) + \frac{\delta}{4}.$$

Тогда

$$m(S, Y) = w(S, Y) + d(S, Y) \prec_q w(S, Q) + \frac{\delta}{4} + d(S, Q) + d(Y, Q) < \Delta - \frac{\delta}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $\mathbf{i}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ – функция, принимающая бесконечное число раз любое натуральное значение. Положим $r_n = \{A_1, \dots, A_n\}$. Зафиксируем любое положительное число $\delta < (\Delta - \varkappa)/8$. Найдем индукцией в (d, δ) -окрестности перемешивания S преобразование Y с нужными свойствами. Пусть q – такой набор множеств, что для всех $Y \in \mathcal{A}$

$$w(S, Y) \prec_q \frac{\Delta + \varkappa}{2} \quad \implies \quad w(S, Y) \leq \frac{3\Delta + \varkappa}{4}.$$

На первом шаге согласно лемме 6 найдем такое $l_1 \in K$ и преобразование Y_1 , что

$$D(Y_1, \mathbb{P}^{\mathbf{i}(1)}) \prec_{r_1, l_1} \frac{1}{2}, \quad w(S, Y_1) \prec_q \frac{\Delta + \varkappa}{2} - \frac{\Delta - \varkappa}{2}, \quad d(S, Y_1) < \frac{\delta}{2}.$$

На n -м шаге по лемме 6 найдутся $l_n > l_{n-1}$, $l_n \in K$, и преобразование Y_n такие, что

$$D(Y_n, \mathbb{P}^{\mathbf{i}(k)}) \prec_{r_k, l_k} \frac{1}{2^k} \quad \text{при } k \leq n, \\ w(S, Y_n) \prec_q \frac{\Delta + \varkappa}{2} - \frac{\Delta - \varkappa}{2^n}, \quad d(Y_{n-1}, Y_n) < \frac{\delta}{2^n}.$$

Последовательность $\{Y_n\}$ сходится в слабой топологии к некоторому преобразованию Y . Тогда Y обладает всеми $\mathbb{P}^s$ -пределами и $d(S, Y) < \delta$. Кроме того, так как $w(S, Y_n) \prec_q (\Delta + \varkappa)/2$ для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $w(S, Y_n) \leq (3\Delta + \varkappa)/4$ и по утверждению 1

$$m(S, Y) = w(S, Y) + d(S, Y) < \Delta.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. В. Тихонов, “Полная метрика на множестве перемешивающих преобразований”, *УМН*, **62**:1 (2007), 209–210.
- [2] A. del Junco, M. Lemańczyk, “Generic spectral properties of measure-preserving maps, and applications”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **115**:3 (1992), 725–736.
- [3] В. В. Рыжиков, “Слабые пределы степеней, простой спектр симметрических произведений и перемешивающие конструкции ранга 1”, *Матем. сб.*, **198**:5 (2007), 137–159.
- [4] V. V. Ryzhikov, *Simple Spectrum for Tensor Products of Mixing Map Powers*, 2011, [arXiv: 1107.4745](https://arxiv.org/abs/1107.4745).

- [5] A. I. Danilenko, A. V. Solomko, “Ergodic Abelian actions with homogeneous spectrum”, *Dynamical Numbers—Interplay Between Dynamical Systems and Number Theory*, Contemp. Math., **532**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, 137–148.
- [6] Д. В. Аносов, “О спектральных кратностях в эргодической теории”, Совр. пробл. матем., **3**, МИАН, М., 2003, 3–85.
- [7] O. Ageev, “The homogeneous spectrum problem in ergodic theory”, *Invent. Math.*, **160**:2 (2005), 417–446.
- [8] П. Р. Халмош, *Лекции по эргодической теории*, ИЛ, М., 1959.

С. В. Тихонов

Российский государственный
торгово-экономический университет, г. Москва
E-mail: tikhonovc@mail.ru

Поступило

02.07.2012

Исправленный вариант

06.03.2013