Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Медведев, Сохранение гиперболических торов в системах Гамильтона, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 2, 227–233

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10124>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 17:57:58

Сохранение гиперболических торов в системах Гамильтона

А. Г. Медведев

В 2000 г. Болотин и Трещев дали инвариантное определение гиперболического тора, обобщающее традиционное координатное определение. Они же сформулировали гипотезу о том, что при стандартных предположениях о диофантовости, невырожденности и аналитичности гиперболический тор сохраняется при малых возмущениях. Эта гипотеза обобщает теорему Граффа. В данной статье показывается справедливость этой гипотезы.

Библиография: 7 названий.

DOI: 10.4213/mzm10124

В работе [1] дается инвариантное определение гиперболического тора, обобщающее традиционное координатное определение. Там же сформулирована гипотеза о том, что при стандартных предположениях о диофантовости, невырожденности и аналитичности гиперболический тор сохраняется при малых возмущениях. Эта гипотеза обобщает теорему Граффа [2]. В данной статье показывается справедливость этой гипотезы.

1. Гиперболический тор. Рассмотрим вещественно-аналитическую систему Гамильтона $(M, \omega, \mathcal{H})$ с гамильтонианом $\mathcal{H}$, где фазовое пространство (M, ω) – симплектическое многообразие размерности $2n$. Напомним некоторые определения из статьи [1]. Пусть $K \subset M$ – l -мерный инвариантный тор рассматриваемой системы, $l < n$. Фазовый поток g^t на K квазипериодичен с вектором частот ν .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Тор K называется *гиперболическим*, если существуют два гладких подрасслоения $E^{s,u}$ в $T_K M$ таких, что

- 1) размерность слоев каждого подрасслоения равна $n - l$;
- 2) $E^{s,u}$ инвариантны относительно линеаризованного фазового потока:

$$Dg^t(w)E_w^{s,u} = E_{g^t(w)}^{s,u}, \quad w \in K, \quad t \in \mathbb{R};$$

- 3) линеаризованный фазовый поток сжимает на E^s и растягивает на E^u , т.е. существуют положительные константы C и λ , для которых

$$\begin{aligned} \|Dg^t(w)|_{E_w^s}\| &\leq Ce^{-\lambda t}, & w \in K, \quad t \geq 0, \\ \|Dg^{-t}(w)|_{E_w^u}\| &\leq Ce^{-\lambda t}, & w \in K, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Подрасслоение E^s называется *устойчивым*, E^u – *неустойчивым*.

Здесь и далее $\|\cdot\|$ – стандартная норма линейного оператора или (в зависимости от контекста) стандартная евклидова норма в $\mathbb{R}^m$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Вектор частот ν и соответствующий ему тор K называются *нерезонансными*, если справедливо соотношение

$$\langle k, \nu \rangle \neq 0, \quad k \in \mathbb{Z}^l \setminus \{0\}.$$

Если для некоторых констант $c > 0$ и $\gamma > l - 1$ выполнено неравенство

$$|\langle k, \nu \rangle| \geq \frac{c}{\|k\|^\gamma}, \quad k \in \mathbb{Z}^l \setminus \{0\},$$

вектор ν и тор K называются *диофантовыми*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (см. [1]). Инвариантный тор K называется *невыврожденным*, если все ограниченные решения уравнений в вариациях лежат в касательном расслоении тора, иными словами, если из того, что для вектора $u \in T_w M$, $w \in K$, при всех t справедливо $\|Dg^t(w)u\| \leq C$, вытекает $u \in T_w K$.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что тор K диофантов, невыврожден и симплектическая структура ω точна в его окрестности. Тогда при малых вещественно-аналитических возмущениях функции Гамильтона $\mathcal{H}$ возмущенная система в малой окрестности K имеет гиперболический вещественно-аналитичный тор с вектором частот ν .*

Классическими текстами по вопросу сохранения гиперболических диофантовых торов являются работы Бибикова [3], Граффа [2] и Цендера [4]. Определение гиперболического тора, используемое нами, более общее по сравнению с координатными определениями из этих статей (подробности см. ниже). Задача о сохранении гиперболического тора в определении, близком по смыслу к определению 1, рассматривается в более общей постановке в статье [5]. В работе [5] доказывается общая теорема о существовании гиперболического тора, из которой несложно вывести теорему 1. Конструкции и доказательства, предлагаемые в [5], довольно громоздки. Цель данной заметки – показать, что для доказательства сохранения при малых возмущениях гиперболических диофантовых торов в смысле определения 1 достаточно лишь изменить и добавить некоторые леммы в классическом доказательстве Граффа [2].

2. Доказательство теоремы 1. Введем в окрестности тора K удобную систему координат, воспользовавшись техникой из [1], см. также [6]. Для дальнейших рассуждений нам понадобятся определения ν -положительной определенности для матриц и слабой приводимости гиперболических торов, введенные в работе [1]. Пусть задана вещественная квадратная матрица $\Omega = \Omega(x)$ порядка m , $x \in \mathbb{T}^l$, $\nu \in \mathbb{R}^l$ – постоянный вектор частот. Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = \nu, \quad \dot{u} = \Omega(x)u, \quad x \in \mathbb{T}^l, \quad u \in \mathbb{R}^m. \quad (2.1)$$

Пусть ϕ_t – фундаментальная матрица этой системы, т.е. $\phi_0 = I$ и решение системы с начальными условиями $x(0) = x_0$, $u(0) = u_0$ имеет вид $x(t) = x_0 + \nu t$, $u(t) = \phi_t(x_0)u_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Матричнозначная функция Ω называется ν -положительно определенной, если существуют положительные константы Λ , λ такие, что

$$\|\phi_{-t}(x)\| \leq \Lambda e^{-\lambda t} \quad \text{для всех } x \in \mathbb{T}^l, \quad t \geq 0. \quad (2.2)$$

Аналогично, функция Ω называется ν -отрицательно определенной, если

$$\|\phi_t(x)\| \leq \Lambda e^{-\lambda t} \quad \text{при } t \geq 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Матричнозначная функция Ω ν -положительно определена тогда и только тогда, когда $-\Omega^T$ ν -отрицательно определена.

Действительно, фундаментальная матрица системы

$$\dot{x} = \nu, \quad \dot{v} = -\Omega^T(x)v, \quad (2.3)$$

сопряженной к (2.1), имеет вид

$$\chi_t(x) = (\phi_t^T(x))^{-1} = \phi_{-t}^T(x + \nu t).$$

Последнее следует из группового свойства $\phi_\tau(x + \nu t)\phi_t(x) = \phi_{\tau+t}(x)$. Имеем оценки

$$\|\chi_t(x)\| \leq \Lambda e^{-\lambda t}, \quad \text{для всех } x \in \mathbb{T}^l, \quad t \geq 0, \quad (2.4)$$

что и требовалось доказать.

Проследим за изменением констант Λ и λ при малом изменении матрицы Ω .

ЛЕММА 1 [1], см. также [6]. Матрица $\Omega(x)$ ν -положительно определена тогда и только тогда, когда существует гладкое семейство положительно определенных симметрических матриц $G(x)$ таких, что матрица

$$\Phi(x) = \partial_\nu G + G\Omega + \Omega^T G, \quad \partial_\nu = \nu_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \nu_l \frac{\partial}{\partial x_l}$$

положительно определена (в обычном смысле) для любого $x \in \mathbb{T}^l$.

Иными словами, для некоторого положительного β справедливо неравенство

$$\langle \Phi(x)u, u \rangle \geq \beta \langle u, u \rangle, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{T}^l. \quad (2.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $G(x)$ удовлетворяет лемме 1, то в качестве констант из определения 4 можно взять

$$\Lambda = \Lambda_0 = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \quad \text{и} \quad \lambda = \lambda_0 = \frac{\beta}{2\alpha_2},$$

где

$$\alpha_1 = \min_{\|u\|=1} \min_{x \in \mathbb{T}^l} \langle G(x)u, u \rangle, \quad \alpha_2 = \max_{\|u\|=1} \max_{x \in \mathbb{T}^l} \langle G(x)u, u \rangle. \quad (2.6)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle G(x - \nu t)\phi_{-t}(x)u, \phi_{-t}(x)u \rangle &= -\langle \Phi(x - \nu t)\phi_{-t}(x)u, \phi_{-t}(x)u \rangle \\ &\leq -\frac{\beta}{\alpha_2} \langle G(x - \nu t)\phi_{-t}(x)u, \phi_{-t}(x)u \rangle. \end{aligned}$$

Справедливы оценки

$$\langle G(x - \nu t)\phi_{-t}(x)u, \phi_{-t}(x)u \rangle \leq \langle G(x)u, u \rangle e^{-\beta t/\alpha_2}, \quad t \geq 0.$$

Отсюда получаем

$$\|\phi_{-t}(x)\| \leq \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} e^{-\beta t/(2\alpha_2)}, \quad x \in \mathbb{T}^l. \quad (2.7)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Если взять $\Lambda(\Omega) = \Lambda_0$ и $\lambda(\Omega) = \lambda_0$, то при малом изменении матрицы $\tilde{\Omega} = \Omega + \Omega_\varepsilon$ свойство ν -положительной определенности сохраняется для $\tilde{\Omega}$. Константы $\Lambda(\tilde{\Omega})$ и $\lambda(\tilde{\Omega})$ удовлетворяют соотношениям

$$\Lambda(\tilde{\Omega}) = \Lambda_0, \quad |\lambda(\tilde{\Omega}) - \lambda_0| \leq \frac{1}{2\alpha_2} \|G\|(\|\Omega_\varepsilon\| + \|\Omega_\varepsilon^T\|). \quad (2.8)$$

Рассмотрим комплексную полосу Δ_ρ

$$\Delta_\rho = \{x \in \mathbb{C}^l : |\operatorname{Im} x_j| \leq \rho, j = 1, \dots, l\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Если ν -положительно определенная функция Ω продолжается в Δ_ρ до вещественно-аналитической функции, то при малых ρ свойство ν -положительной определенности сохраняется для комплексных $x \in \Delta_\rho$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 (см. [1]). Инвариантный гиперболический тор называется *слабо приводимым*, если в его окрестности существует каноническая система координат $(x, y, z_u, z_s) \in \mathbb{T}^l \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{n-l} \times \mathbb{R}^{n-l}$, в которой тор задается уравнениями $\{y = 0, z_u = z_s = 0\}$, а функция Гамильтона $\mathcal{H}$ имеет вид

$$\mathcal{H} = \langle \nu, y \rangle + \frac{\langle Ay, y \rangle}{2} + \langle z_s, \Omega(x)z_u \rangle + F(x, y, z_u, z_s), \quad (2.9)$$

где A – матрица порядка l , $\Omega(x)$ – ν -положительно определенная матрица порядка $n-l$, а функция F имеет третий порядок малости по y, z_u, z_s . Если Ω – постоянная матрица, тор называется *приводимым*.

Покажем, что тор K слабо приводим. Теорема Эрмана (см. [7]) утверждает, что если симплектическая структура ω точна в окрестности нерезонансного тора K , то тор является изотропным, т.е. $\omega|_K = 0$. Остается воспользоваться следующей теоремой из [1] (см. также [6]).

ТЕОРЕМА 2. Любой диофантовский изотропный гиперболический тор слабо приводим. Если $l = n-1$ или $l = 1$, то тор приводим. Если гамильтониан и симплектическое многообразие M вещественно-аналитичны, система координат тоже вещественно-аналитична.

В окрестности тора K имеем канонические координаты (x, y, z_u, z_s) , в которых $K = \{y = 0, z_s = z_u = 0\}$ и $\mathcal{H}$ имеет вид (2.9). Невырожденность тора равносильна условию $\det A \neq 0$.

Рассмотрим возмущенный гамильтониан

$$\mathcal{H} = \langle \nu, y \rangle + \frac{\langle Ay, y \rangle}{2} + \langle z_s, \Omega(x)z_u \rangle + H(x, y, z_u, z_s), \quad H = P + F, \quad (2.10)$$

где $P = P(x, y, z_u, z_s)$ – малая функция. Если бы матрица $\Omega(x)$ удовлетворяла условию положительной определенности из статьи [2], а именно, для любого ненулевого комплексного вектора γ и некоторого положительного μ было бы выполнено неравенство

$$\operatorname{Re}\langle \gamma, \Omega(x)\gamma \rangle \geq \mu|\gamma|^2, \quad (2.11)$$

то из теоремы Граффа (см. лемму 2 и последующие рассуждения о сходимости серий КАМ-преобразований в [2]) следовало бы, что возмущенная система имеет гиперболический тор, близкий к K . Условие (2.11) является достаточным для ν -положительной определенности Ω , но не необходимым. Покажем, что при соответствующем изменении вспомогательных лемм из рассуждения Граффа теорема о сохранении гиперболического тора останется справедливой для случая ν -положительно определенной матрицы Ω .

Не будем приводить полное доказательство из [2]. Остановимся только на тех моментах, где используются свойства матрицы Ω . Для доказательства теоремы необходимо провести бесконечную серию сходящихся КАМ-замен.

Рассмотрим один шаг КАМ-процедуры. Пусть $(\theta, \eta, \xi_u, \xi_s)$ – новая система координат. Запишем производящую функцию КАМ-замены:

$$\begin{aligned} S = & \langle x, \eta \rangle + \langle z_s, \xi_u \rangle + L(x, \eta) + B(x, \eta)z_s + C(x, \eta)\xi_u \\ & + \frac{1}{2}\langle z_s, D(x, \eta)z_s \rangle + \frac{1}{2}\langle \xi_u, Q(x, \eta)\xi_u \rangle, \end{aligned}$$

где D и Q – матрицы порядка $n - l$, а B и C – $(n - l)$ -мерные векторы. Пусть по-прежнему $\partial_\nu = \nu_1(\partial/\partial x_1) + \dots + \nu_l(\partial/\partial x_l)$. Подставив замену в гамильтониан, получим шесть гомологических уравнений (см. п. b § 3 из [2]):

$$\partial_\nu L(x, \eta) = -H^*(x, \eta, 0, 0), \quad (2.12)$$

$$\partial_\nu B(x, \eta) + B(x, \eta)\Omega(x) = -H_{z_s}^*(x, \eta, 0, 0), \quad (2.13)$$

$$\partial_\nu C(x, \eta) - C(x, \eta)\tilde{\Omega}^T(x, \eta) = -H_{z_u}^*(x, \eta, 0, 0), \quad (2.14)$$

$$\partial_\nu D(x, \eta) + D(x, \eta)\Omega(x) + \Omega^T(x)D(x, \eta) = -H_{z_s z_s}^*(x, \eta, 0, 0), \quad (2.15)$$

$$\partial_\nu Q(x, \eta) - Q(x, \eta)\tilde{\Omega}^T(x, \eta) - \tilde{\Omega}(x, \eta)Q(x, \eta) = -H_{z_u z_u}^*(x, \eta, 0, 0), \quad (2.16)$$

$$\Omega(x) - \tilde{\Omega}(x, \eta) = -H_{z_s z_u}^*(x, \eta, 0, 0). \quad (2.17)$$

Функции из правых частей уравнения являются коэффициентами разложения в ряд преобразованного возмущения H^* , подробнее см. п. а § 3 из [2]. Ключевым моментом доказательства является существование и малость решений гомологических уравнений. После каждого шага КАМ-процедуры матрица Ω изменяется. Эти преобразования отражены в уравнении (2.17). Согласно следствию 1 свойство ν -положительной определенности сохраняется при малом изменении матрицы. Докажем лемму, дающую описание решений уравнений (2.13) и (2.15).

Пусть $\|\cdot\|_\rho$ – стандартная C^0 -норма пространства матриц или векторов в полосе Δ_ρ .

ЛЕММА 2. Пусть матрица $\Omega(x)$ ν -положительно определена в полосе Δ_ρ , вектор $U(x)$ и матрица $R(x)$ периодичны и $\|U\|_\rho \leq M$, $\|R\|_\rho \leq M$. Тогда существуют

периодичные вектор $W(x)$ и матрица $Y(x)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\partial_\nu W(x) + W(x)\Omega(x) = -U(x), \quad (2.18)$$

$$\partial_\nu Y(x) + Y(x)\Omega(x) + \Omega^T(x)Y(x) = -R(x). \quad (2.19)$$

Выполнены неравенства

$$\|W\|_\rho \leq \frac{\Lambda}{\lambda} M \quad \text{и} \quad \|Y\|_\rho \leq \frac{\Lambda^2}{2\lambda} M,$$

где Λ и λ – константы из определения 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\chi_t(x)$ – фундаментальная матрица системы

$$\dot{v} = -\Omega^T(x)v, \quad \dot{x} = \nu.$$

Так как $-\Omega^T$ ν -отрицательно определена, то существуют положительные константы Λ , λ такие, что

$$\|\chi_t(x)\|_\rho \leq \Lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Уравнение (2.18) эквивалентно следующему:

$$\dot{W}^T(x + \nu t) + \Omega^T(x + \nu t)W^T(x + \nu t) = -U^T(x + \nu t). \quad (2.20)$$

Нужное нам решение уравнения (2.20) имеет вид

$$W^T(x + \nu t) = -\chi_t(x) \int_{-\infty}^t \chi_{-s}(x + \nu s) U^T(x + \nu s) ds. \quad (2.21)$$

Несложно проверить, что правая часть равенства (2.21), будучи формально функцией двух переменных x и t , действительно зависит лишь от комбинации $x + \nu t$. Учитывая оценку $\|U\|_\rho \leq M$, при $t = 0$ имеем

$$\left\| \int_{-\infty}^0 \chi_{-s}(x + \nu s) U^T(x + \nu s) ds \right\|_\rho \leq \frac{\Lambda M}{\lambda}.$$

Рассмотрим уравнение (2.19). Фундаментальная матрица системы уравнений

$$\dot{u} = \Omega(x)u, \quad \dot{x} = \nu$$

имеет вид $\phi_t(x) = \chi_{-t}^T(x + \nu t)$. Выполнено неравенство

$$\|\phi_{-t}(x)\|_\rho \leq \Lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Введем обозначение $V(x, t) = Y(x + \nu t)\phi_t(x)$ и запишем уравнение, эквивалентное (2.19) при $t = 0$:

$$\dot{V}(x, t) + \Omega^T(x + \nu t)V(x, t) = -R(x + \nu t)\phi_t(x). \quad (2.22)$$

Это уравнение имеет тот же вид, что и (2.20), с заменой $W^T(x + \nu t)$ на $V(x, t)$ и $U^T(x + \nu t)$ на $R(x + \nu t)\phi_t(x)$. Нужно нам решение уравнения (2.22) при $t = 0$ равно

$$Y(x) = V(x, 0) = - \int_{-\infty}^0 \chi_{-s}(x + \nu s) R(x + \nu s) \phi_s(x) ds.$$

Снова нетрудно проверить, что это решение согласуется с заявленным выше видом $V(x, t) = Y(x + \nu t)\phi_t(x)$ функции V . В полосе Δ_ρ имеем оценки

$$\|Y(x)\|_\rho = \left\| \int_{-\infty}^0 \chi_{-s}(x + \nu s) R(x + \nu s) \phi_s(x) ds \right\|_\rho \leq \frac{\Lambda^2 M}{2\lambda}.$$

Лемма доказана.

Добавив вещественно-аналитичную зависимость от η , получаем оценки на решения уравнений (2.13) и (2.15). Пусть в области $\Delta_\rho \times \{\|\eta\| \leq \delta\}$ выполнены неравенства $\|H_{z_s}^*(x, \eta, 0, 0)\| \leq M_1$ и $\|H_{z_s z_s}^*(x, \eta, 0, 0)\| \leq M_2$, тогда существуют периодические по x решения уравнений (2.13) и (2.15), удовлетворяющие в этой области оценкам

$$\|B(x, \eta)\| \leq \frac{\Lambda}{\lambda} M_1, \quad \|D(x, \eta)\| \leq \frac{\Lambda^2}{2\lambda} M_2. \quad (2.23)$$

Заметим, что неравенства (2.23) совпадают с оценками решений соответствующих уравнений п. б § 3 из [2]. Учитывая следствие 1, аналогичные оценки можно получить для решений гомологических уравнений (2.14) и (2.15).

Последнее показывает, что при добавлении соответствующих лемм доказательство из [2] остается справедливым для нашего случая.

Автор выражает благодарность Д. В. Трещеву за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. V. Bolotin, D. V. Treschev, “Remarks on the definition of hyperbolic tori of Hamiltonian systems”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **5**:4 (2000), 401–412.
- [2] S. M. Graff, “On the conservation of hyperbolic invariant tori for Hamiltonian systems”, *J. Differential Equations*, **15**:1 (1974), 1–69.
- [3] Ю. Н. Бибилов, “Усиление одной теоремы Мозера”, *Докл. АН СССР*, **213**:4 (1973), 766–769.
- [4] E. Zehnder, “Generalized implicit function theorems with applications to some small divisor problems. II”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **29**:1 (1976), 49–111.
- [5] E. Fontich, R. de la Llave, Y. Sire, “Construction of invariant whiskered tori by a parameterization method. I. Maps and flows in finite dimensions”, *J. Differential Equations*, **246**:8 (2009), 3136–3213.
- [6] D. Treschev, O. Zubelevich, *Introduction to the Perturbation Theory of Hamiltonian Systems*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [7] M. R. Herman, “Inégalités “a priori” pour des tores lagrangiens invariants par des difféomorphismes symplectiques”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **70** (1989), 47–101.

А. Г. Медведев

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: medvedev_ag@inbox.ru

Поступило

30.07.2012

Исправленный вариант

20.03.2013