Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Чеботарев, Т. В. Тлячев, А. А. Радионов, Обобщенные сжатые состояния и многомерная формула факторизации, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 5, 762–777

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10127>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 15:07:32

Обобщенные сжатые состояния и многомерная формула факторизации

А. М. Чеботарев, Т. В. Тлячев, А. А. Радионов

В статье рассматривается многомерное обобщение формулы факторизации оператора сжатия, которая позволяет связать различные представления сжатых состояний, вычислять частичный след, средние значения наблюдаемых и их дисперсии. Основные результаты формулируются в терминах матриц канонических преобразований, представляющих удобный математический аппарат, обладающий устойчивостью при численных оценках. Вычисляется скалярное произведение и композиция обобщенных многомерных сжатых состояний. Обсуждаются примеры точно решаемых задач.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. В статье рассматривается многомерное обобщение формулы факторизации оператора сжатия, которая позволяет связать различные представления сжатых состояний, вычислять частичный след, средние значения наблюдаемых и их дисперсии. Основные результаты формулируются в терминах матриц канонических преобразований [1], представляющих удобный математический аппарат, обладающий устойчивостью при численных оценках.

Основной результат работы – теорема 1, связывающая матрицы коэффициентов квадратичных и билинейных форм, определяющих нормальную факторизацию обобщенного многомодового оператора сжатия с матрицами канонических преобразований операторов рождения-уничтожения. Метод канонических преобразований позволяет свести построение нормальной факторизации к решению линейной системы ОДУ, фактически, к нахождению спектра блочных $(2n \times 2n)$ -матриц вида

$$G = \begin{pmatrix} -iB & A \\ \overline{A} & i\overline{B} \end{pmatrix},$$

где n – число мод, A – симметричная, а B – эрмитова матрицы, задающие оператор многомодового сжатия. Преимущество метода состоит в том, что он не требует решать какие-либо задачи, кроме спектрального уравнения, а недостатком является то, что он позволяет найти решение задачи о факторизации с точностью до нормировочного скалярного множителя s_t (см. лемму 1).

Работа выполнена при поддержке ФНБИК (грант № 2.1.1/4540) и гранта DFG-ПАН 436 RUS 113/990/0-1.

Трудности, возникающие при прямом выводе уравнений для матричных коэффициентов, определяющих матричные элементы билинейной формы нормальной факторизации, связаны с необходимостью вычисления производных от экспонент неизвестных *некоммутирующих* операторов и решения нелинейного интегрального уравнения (см. п. 3). По-видимому, решение этой математической проблемы остается неизвестным до настоящего времени, однако трудности можно обойти, выразив коэффициенты квадратичных и билинейных форм нормальной факторизации через матрицы канонических преобразований Φ_t , Ψ_t , что и сделано в доказательстве теоремы 1. Преимущество этого подхода состоит в том, что он позволяет вывести простое уравнение для s_t , решение которого в ряде важных случаев явно выражается через Φ_t , Ψ_t и A , B .

В разделе 4 вычисляется скалярное произведение обобщенных сжатых состояний и нормальная форма композиции сжатий. В разделе 5 рассматриваются примеры точно решаемых задач, иллюстрирующих полученные результаты.

2. Канонические коммутационные соотношения и их следствия. Формулы распутывания операторных экспонент [2], [3] полезны для построения точных решений задач математической физики, вычисления композиции, скалярного произведения и ортогонализации базисов, образованных суперпозициями сжатых состояний. В этом разделе выводятся уравнения для матриц билинейных форм в формулах типа Бейкера–Хаусдорфа¹:

$$\begin{aligned} U_t &= e^{i\mathcal{H}t} = e^{-(1/2)(a^\dagger, R_t a^\dagger)} e^{(a^\dagger, C_t a)} e^{(1/2)(a, \bar{p}_t a)} e^{-(a^\dagger, f_t) + (a, \bar{f}_t)} e^{s_t} \\ &= e^{-(1/2)(a^\dagger, R_t a^\dagger)} : e^{(a^\dagger, (e^{C_t} - I)a)} : e^{(1/2)(a, \bar{p}_t a)} e^{-(a^\dagger, f_t) + (a, \bar{f}_t)} e^{s_t}, \\ \mathcal{H} &= \frac{i}{2}(a^\dagger, A a^\dagger) - \frac{i}{2}(a, \bar{A} a) + (a^\dagger, B a) + i(a^\dagger, h) - i(a, \bar{h}), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $A = A^T$ и $R_t = R_t^T$ – симметричные матрицы, $B = B^* = \bar{B}^T$ – эрмитова матрица, h и f_t – векторы из $\mathbb{C}^N$, а скобки $: \cdot :$ указывают на нормальный порядок многомодовых операторов рождения-уничтожения $a^\dagger = \{a_1^\dagger, \dots, a_n^\dagger\}$ и $a = \{a_1, \dots, a_n\}$.

В одномерном случае при $B = 0$ формулы для вычисления R_t и C_t хорошо известны (см. [3; (Б.9)–(Б.10)]). Многомодовый случай рассмотрен в [4], [5], где различными методами получены согласующиеся аналитические решения этой задачи при $B = 0$. Приводимый далее в этом разделе вывод уравнений для матриц R_t и C_t более сложен и дает необходимые условия на производные коэффициентов нормальной факторизации, при которых выполнено разложение (2.1).

Вопрос о единственности разложения (2.1) положительно решается путем сведения задачи к системе линейных ОДУ с постоянными коэффициентами. В классе задач с матрицами A такими, что $A\bar{A}$ имеет простой спектр и коммутирует с B , в разделе 5 построено глобальное аналитическое решение. В качестве примера далее рассматривается важный частный случай точно решаемой задачи (2.1) для движения квантовой частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях в представлении вторичного квантования.

Все составляющие факторизации (2.1), кроме s_t , получены далее двумя способами: с помощью канонических преобразований (это более простой способ) и более

¹Круглые скобки $(\cdot, \cdot)$ мы используем для билинейных форм в $\mathbb{C}^n$. Для полуторалинейных форм (скалярных произведений) в гильбертовых пространствах используются скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

сложным путем вычисления R_t из матричного уравнения Риккати (см. [5]) и решения дополнительных уравнений, позволяющих вычислить скалярный член s_t только после того, как найдены R_t и f_t .

Итак, пусть A – симметричная матрица, $\bar{A}$ – комплексно сопряженная матрица, B – эрмитова матрица. Предположим, что существуют симметричные матрицы R_t и ρ_t , а также матрица общего вида C_t и функция $f_t \in \mathbb{C}^n$ такие, что имеет место разложение (2.1), и рассмотрим связь между матрицами билинейных форм в (2.1) и матрицами канонического преобразования операторов рождения-уничтожения (см. [1]):

$$\begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_t \\ a_t^\dagger \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} U_t \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix} U_t^{-1} = e^{Gt} \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix} + \int_0^t e^{sG} ds \begin{pmatrix} h \\ \bar{h} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} -iB & A \\ \bar{A} & i\bar{B} \end{pmatrix}, \quad e^{Gt} = \begin{pmatrix} \Phi_t & \Psi_t \\ \bar{\Psi}_t & \bar{\Phi}_t \end{pmatrix}.$$

где $U_t = e^{i\mathcal{H}t}$, $\Phi_0 = I$, $\Psi_0 = 0$. Поскольку группа e^{Gt} коммутирует с генератором G , то

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -iB & A \\ \bar{A} & i\bar{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A\bar{\Psi} - iB\Phi & A\bar{\Phi} - iB\Psi \\ \bar{A}\Phi + i\bar{B}\bar{\Psi} & \bar{A}\Psi + i\bar{B}\bar{\Phi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Psi\bar{A} - i\Phi B & \Phi A + i\Psi\bar{B} \\ \bar{\Phi}\bar{A} - i\bar{\Psi}B & \bar{\Psi}A + i\bar{\Phi}\bar{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -iB & A \\ \bar{A} & i\bar{B} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В частности, уравнения эволюции матриц Φ и Ψ имеют следующие эквивалентные формы, которые можно взять, выбрав по одному уравнению из каждого столбца:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= A\bar{\Psi} - iB\Phi = \Psi\bar{A} - i\Phi B, & \dot{\Psi} &= A\bar{\Phi} - iB\Psi = \Phi A + i\Psi\bar{B}, \\ \dot{\bar{\Phi}} &= \bar{A}\Psi + i\bar{B}\bar{\Phi} = \bar{\Psi}A + i\bar{\Phi}\bar{B}, & \dot{\bar{\Psi}} &= \bar{A}\Phi + i\bar{B}\bar{\Psi} = \bar{\Phi}\bar{A} - i\bar{\Psi}B. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Покажем, что если известны a_t и $a^\dagger$, то операторные линейные, билинейные и квадратичные формы в разложении (2.1) выражаются через Φ_t и Ψ_t . Неопределенной останется только скалярная экспонента e^{s_t} , отвечающая за нормировку и сдвиг фазы, которая будет вычислена далее другим методом.

ЛЕММА 1. Матрицы Ψ_t и Φ_t , определенные уравнениями (2.2) и (2.3), удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} \Phi\Phi^* - \Psi\Psi^* &= \bar{\Phi}\Phi^T - \bar{\Psi}\Psi^T = \Phi^*\Phi - \Psi^T\bar{\Psi} = \Phi^T\bar{\Phi} - \Psi^*\Psi = I, \\ \Phi\Psi^T - \Psi\Phi^T &= \bar{\Phi}\Psi^* - \bar{\Psi}\Phi^* = \Phi^*\Psi - \Psi^T\bar{\Phi} = \Phi^T\bar{\Psi} - \Psi^*\Phi = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

и связаны с R_t , C_t и ρ_t из (2.1) следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \Psi_t &= e^{-C_t} R_t, & \Phi_t &= e^{-C_t}, & R_t &= \Phi_t^{-1} \Psi_t = R_t^T, \\ \rho_t &= e^{-C_t} R_t e^{\bar{C}_t} = \Psi_t \bar{\Phi}_t^{-1} = \rho_t^T, & \dot{f}_t &= \Phi_t h + \Psi_t \bar{h}, \\ U_t &= e^{-(1/2)(a^\dagger, \Phi_t^{-1} \Psi_t a^\dagger)} : e^{(a^\dagger, (\Phi_t^{-1} - I)a)} : e^{(1/2)(a, \Psi_t \bar{\Phi}_t^{-1} a)} e^{-(a^\dagger, f_t)} e^{(a, \bar{f}_t)} e^{s_t - |f_t|^2/2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая коммутационные соотношения для гамильтониана (2.1)

$$i[\mathcal{H}, a] = Aa^\dagger - iBa + h, \quad i[\mathcal{H}, a^\dagger] = \bar{A}a + i\bar{B}a^\dagger + \bar{h},$$

воспользуемся коммутацией матриц $A, B \in \mathcal{M}(n)$ и операторов $e^{i\mathcal{H}t} \in \mathcal{B}(\ell_2)$ и запишем уравнения для эволюции $a_t^\dagger, a$ в виде

$$\begin{pmatrix} \dot{a}_t \\ \dot{a}_t^\dagger \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} a_t \\ a_t^\dagger \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ \bar{h} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_t \\ a_t^\dagger \end{pmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix},$$

где $\dot{a}_t^\dagger = \dot{\bar{\Phi}}_t a^\dagger + \dot{\bar{\Psi}}_t a + \dot{\bar{f}}_t$, $\dot{a}_t = \dot{\Phi}_t a + \dot{\Psi}_t a^\dagger + \dot{f}_t$ в силу (2.2). Отсюда следует, что

$$\begin{pmatrix} \dot{a}_t \\ \dot{a}_t^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\Phi}_t & \dot{\Psi}_t \\ \dot{\bar{\Psi}}_t & \dot{\bar{\Phi}}_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{f}_t \\ \dot{\bar{f}}_t \end{pmatrix} = G \left\{ \begin{pmatrix} \Phi_t & \Psi_t \\ \bar{\Psi}_t & \bar{\Phi}_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_t \\ \bar{f}_t \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} h \\ \bar{h} \end{pmatrix}.$$

Приравнивая коэффициенты при операторах $a, a^\dagger$ в левой и правой частях этой системы, получаем (2.2) и выражение для векторов сдвига f_t :

$$\begin{pmatrix} \Phi_t & \Psi_t \\ \bar{\Psi}_t & \bar{\Phi}_t \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} -iB & A \\ A & iB \end{pmatrix} t}, \quad \begin{pmatrix} f_t \\ \bar{f}_t \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{pmatrix} \Phi_s & \Psi_s \\ \bar{\Psi}_s & \bar{\Phi}_s \end{pmatrix} ds \begin{pmatrix} h \\ \bar{h} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следуют равенства²

$$\begin{aligned} \int_\tau^t \begin{pmatrix} \Phi_s & \Psi_s \\ \bar{\Psi}_s & \bar{\Phi}_s \end{pmatrix} ds &= G^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} \Phi_t & \Psi_t \\ \bar{\Psi}_t & \bar{\Phi}_t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Phi_\tau & \Psi_\tau \\ \bar{\Psi}_\tau & \bar{\Phi}_\tau \end{pmatrix} \right\}, \\ \begin{pmatrix} f_t \\ \bar{f}_t \end{pmatrix} &= G^{-1} \left(\begin{pmatrix} h_t \\ \bar{h}_t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h \\ \bar{h} \end{pmatrix} \right), \quad \text{где} \quad \begin{pmatrix} h_t \\ \bar{h}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_t & \Psi_t \\ \bar{\Psi}_t & \bar{\Phi}_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ \bar{h} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Для вычисления матричных коэффициентов R_t и C_t квадратичных и билинейных форм в правой части (2.1) заметим, что

$$\begin{aligned} e^{-(1/2)(a^\dagger, R_t a^\dagger)} a e^{(1/2)(a^\dagger, R_t a^\dagger)} &= a + R_t a^\dagger, & e^{(a^\dagger, C_t a)} a e^{-(a^\dagger, C_t a)} &= e^{-C_t} a, \\ e^{(1/2)(a, \bar{\rho}_t a)} a^\dagger e^{-(1/2)(a, \bar{\rho}_t a)} &= a^\dagger + \bar{\rho}_t a, & e^{(a^\dagger, C_t a)} a^\dagger e^{-(a^\dagger, C_t a)} &= e^{C_t^T} a^\dagger. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Используя перестановочность скалярных операторов $e^{-(1/2)(a^\dagger, R_t a^\dagger)}$ и матриц вида e^{C_t} , нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} &e^{-(1/2)(a^\dagger, R_t a^\dagger)} e^{(a^\dagger, C_t a)} a e^{-(a^\dagger, C_t a)} e^{(1/2)(a^\dagger, R_t a^\dagger)} \\ &= e^{-C_t} (a + R_t a^\dagger) = \Phi_t a + \Psi_t a^\dagger, \\ &e^{-(1/2)(a^\dagger, R_t a^\dagger)} (e^{C_t^T} a^\dagger + \bar{\rho}_t e^{-C_t} a) e^{(1/2)(a^\dagger, R_t a^\dagger)} \\ &= e^{C_t^T} a^\dagger + \bar{\rho}_t e^{-C_t} (a + R_t a^\dagger) = \bar{\Phi}_t a^\dagger + \bar{\Psi}_t a. \end{aligned}$$

Приравнивая матричные коэффициенты при операторах $a^\dagger, a$, находим формулы эволюции (2.2) симметричных матриц R_t и ρ_t и матрицы C_t

$$\Psi_t = e^{-C_t} R_t, \quad \Phi_t = e^{-C_t}, \quad \bar{\Psi}_t = \bar{\rho}_t e^{-C_t}, \quad \bar{\Phi}_t = e^{C_t^T} + \bar{\rho}_t e^{-C_t} R_t. \quad (2.8)$$

Из первых двух соотношений (2.8) и симметричности R_t следует

$$\Phi_t^{-1} \Psi_t = R_t = R_t^T = \Psi_t^T (\Phi_t^{-1})^T. \quad (2.9)$$

²Корректная определенность матриц вида $M^{-1}(e^{Mz} - I)$, $z \in \mathbb{C}$, имеет место для любых M .

Поэтому из третьего и четвертого равенств (2.8) вытекает тождество

$$\bar{\Phi}_t = (\Phi_t^{-1})^T + \bar{\Psi}_t \Phi_t^{-1} \Psi_t = (\Phi_t^{-1})^T + \bar{\Psi}_t \Psi_t^T (\Phi_t^{-1})^T.$$

Действуя справа матрицей Φ_t^T на обе части этого тождества, получаем одно из соотношений (2.4):

$$\bar{\Phi}_t \Phi_t^T - \bar{\Psi}_t \Psi_t^T = I.$$

Комплексно сопряженное равенство дает первое каноническое коммутационное соотношение $\Phi_t \Phi_t^* - \Psi_t \Psi_t^* = I$. Поэтому $\Phi_t \Phi_t^* \geq I$ и операторы Φ_t и Φ_t^* обратимы.

Действуя на (2.9) слева оператором Φ_t и справа $(\Phi_t^{-1})^T$, получаем равенство

$$\Psi_t \Phi_t^T = \Phi_t \Psi_t^T \quad \text{или} \quad \bar{\Psi}_t \Phi_t^* = \bar{\Phi}_t \Psi_t^*.$$

Аналогичным образом можно показать, что выполнены все канонические коммутационные соотношения (2.4) (см. [5; формула (2.7)]).

Дифференцируя два представления экспоненты (2.1) и выпутывая члены первой степени по операторам рождения-уничтожения, получаем тождество

$$(a^\dagger, h) - (a, \bar{h}) = (e^{C_t} a^\dagger + \bar{\rho}_t e^{-C_t} (a + R_t a^\dagger), \dot{f}_t) - (e^{-C_t} (a + R_t a^\dagger), \dot{\bar{f}}_t).$$

Собирая коэффициенты при $a^\dagger$ и a , получаем систему уравнений

$$h = e^{C_t} \dot{f}_t - R^T e^{-C_t} (\dot{\bar{f}}_t - \bar{\rho}_t^T \dot{f}_t), \quad \bar{h} = e^{-C_t} (\dot{\bar{f}}_t - \bar{\rho}_t^T \dot{f}_t). \quad (2.10)$$

Исключая $\dot{\bar{f}}_t - \bar{\rho}_t^T \dot{f}_t$ и учитывая симметричность R_t и ρ_t , находим уравнение для $\dot{f}_t$ и $\dot{\bar{f}}_t$, которые согласуются с (2.6):

$$\dot{f}_t = e^{-C_t} (h + R_t \bar{h}) = \Phi_t h + \Psi_t \bar{h}, \quad \dot{\bar{f}}_t = \bar{\Phi}_t \bar{h} + \bar{\Psi}_t h, \quad f_0 = 0, \quad \dot{f}_0 = h.$$

Пара $\dot{f}_t, \dot{\bar{f}}_t$ удовлетворяет уравнениям (2.10).

В заключение этого раздела приведем формулу обращения матрицы канонического преобразования (см. [1; с. 79]), используемую далее для переходов между предингеровским и гейзенберговским представлениями с сохранением нормального порядка.

ЛЕММА 2. *Имеют место следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Phi_{-t} & \Psi_{-t} \\ \bar{\Psi}_{-t} & \bar{\Phi}_{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_t & \Psi_t \\ \bar{\Psi}_t & \bar{\Phi}_t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Phi_t^* & -\Psi_t^T \\ -\Psi_t^* & \Phi_t^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_t & \Psi_t \\ \bar{\Psi}_t & \bar{\Phi}_t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Phi_t & \Psi_t \\ \bar{\Psi}_t & \bar{\Phi}_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_t^* & -\Psi_t^T \\ -\Psi_t^* & \Phi_t^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$U_{-t} = U_t^* = e^{-i\mathcal{H}t}$$

$$= e^{(1/2)(a^\dagger, \Psi_t(\bar{\Phi}_t)^{-1} a^\dagger)} : e^{-(a^\dagger, ((\Phi_t^*)^{-1} - 1)a)} : e^{-(1/2)(a, \bar{R}_t a)} e^{(a^\dagger, g_t) - (a, \bar{g}_t)} e^{r_t}. \quad (2.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулы обращения канонического преобразования известны и проверяются прямой подстановкой с помощью ККС (2.4).

Учитывая только линейные однородные части канонического преобразования, порождаемого матрицами

$$\begin{pmatrix} \Phi_t^* & -\Psi_t^T \\ -\Psi_t^* & \Phi_t^T \end{pmatrix},$$

имеем

$$\begin{aligned} \Phi_t^* a - \Psi_t a^\dagger &= e^{\Lambda_t} (a - S_t a), & \Phi_t a^\dagger - \Psi_t^* a &= e^{-\Lambda_t^T} a^\dagger - \bar{Q}_t e^{\Lambda_t} (a - S_t a^\dagger), \\ (a^\dagger, h) - (a, \bar{h}) &= (e^{-\Lambda_t^T} a^\dagger - \bar{Q}_t e^{\Lambda_t} (a - S_t a^\dagger), \dot{g}_t) - (e^{\Lambda_t} (a - S_t a), \dot{\bar{g}}_t). \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \dot{g}_t &= \Phi_t^* h - \Psi_t^T \bar{h}, & g_0 &= 0 \in \mathbb{C}^n, \\ e^{\Lambda_t} &= \Phi_t^*, & S_t &= (\Phi_t^*)^{-1} \Psi_t^T = \Psi \bar{\Phi}_t^{-1} = \rho_t, & \bar{Q}_t &= \Psi_t^* (\Phi_t^*)^{-1} = \bar{\Phi}_t^{-1} \bar{\Psi}_t = \bar{R}_t. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Скалярная функция r_t остается неопределенной.

В заключение этого раздела заметим, что эрмитово сопряжение произведений (2.5) и (2.11) позволяют представить операторы U_t^* и U_t в антинормальном порядке.

3. Нестационарное матричное уравнение Риккати. Получим систему уравнений для R_t, ρ_t, C_t независимым способом, позволяющим проверить формулы (2.8) и вычислить остающийся неопределенным показатель экспоненты s_t в (2.5). Напомним, что для вычисления производной $\dot{C}_t$ операторозначной экспоненты e^{C_t} в случае $[C_t, \dot{C}_t] \neq 0$ Фейнман [2] использовал формулу, связывающую $\dot{C}_t$ с левой производной $\dot{C}_t^L$ этого семейства ($\dot{C}_t^L: \dot{C}_t^L e^{C_t} = d e^{C_t} / dt$; см. [6], а также обсуждение в [7; с. 275, формула (1.10)] и в [8]):

$$\dot{C}_t^L \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{d}{dt} e^{C_t} \right) e^{-C_t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_0^1 ds \frac{d}{ds} e^{s(C_t + \Delta t \dot{C}_t)} e^{-s C_t} = \int_0^1 ds e^{s C_t} \dot{C}_t e^{-s C_t}. \quad (3.1)$$

Так как $\text{Tr } ABC = \text{Tr } CAB$, эта формула, в частности, показывает, что $\text{Tr } \dot{C}_t^L = \text{Tr } \dot{C}_t$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $A = A^T$ – симметричная и $B = B^*$ – эрмитова матрицы. Необходимым условием факторизации (2.1) являются следующие уравнения для R_t , левой производной $\dot{C}_t^L$ матриц e^{C_t} , ρ_t и нормировки s_t :

$$\begin{aligned} \dot{R}_t &= A + i B R_t + i R_t \bar{B} - R_t \bar{A} R_t, & \dot{\rho}_t &= \bar{A} + i \bar{B} \bar{\rho}_t + i \bar{\rho}_t B - \bar{\rho}_t A \bar{\rho}_t, \\ R|_{t=0} &= \rho|_{t=0} = 0, \\ \dot{C}_t^L &= i B - R_t \bar{A}, & \bar{\rho}_t &= e^{C_t^T} \bar{A} e^{C_t}, & C_t^L|_{t=0} &= \bar{\rho}_t|_{t=0} = 0, \\ s_t &= \frac{1}{2} \left(\int_0^t ((\bar{f}_\tau, d f_\tau) - (f_\tau, d \bar{f}_\tau)) + \text{Tr}(C_t - i B t) \right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где матрицы $R_t, C_t, \dot{C}_t^L, \rho_t$, вектор f_t и скаляр s_t выражаются через матрицы канонических преобразований Φ_t и Ψ_t (2.2):

$$\begin{aligned} R_t &= \Phi_t^{-1} \Psi_t, & C_t &= -\ln \Phi_t, & \dot{C}_t^L &= -\Phi_t^{-1} \dot{\Phi}_t, & \bar{\rho}_t &= \bar{\Psi}_t \Phi_t^{-1}, \\ \dot{\Phi}_t &= \Psi_t A - i \Phi_t B, & \dot{\Psi}_t &= \Phi_t A + i \Psi_t \bar{B}, & \Phi_0 &= I, & \Psi_0 &= 0, \\ \dot{f}_t &= \Phi_t h + \Psi_t \bar{h}, & f_0 &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что правые части уравнений (3.2) обеспечивают симметричность операторов R_t . В многомерном случае при условии $B = 0$ (по терминологии [9; раздел 10.1.1] это случай идеального сжатого состояния) антиэрмитова компонента iB отсутствует (решение см. [4], [5]).

Будем искать матрицы C_t и симметричные матрицы R_t, ρ_t , дифференцируя (2.1) и приравнивая матричные элементы квадратичных и билинейных форм от операторов рождения-уничтожения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} U_t &= \left(-\frac{1}{2}(a^\dagger, Aa^\dagger) + i(a^\dagger, Ba) + \frac{1}{2}(a, \bar{A}a) - (a^\dagger, h) + (a, \bar{h}) \right) U_t \\ &= \frac{d}{dt} e^{-(1/2)(a^\dagger, R_t a^\dagger)} e^{(a^\dagger, C_t a)} e^{(1/2)(a, \bar{\rho}_t a)} e^{-(a^\dagger, f_t)} e^{(a, \bar{f}_t)} e^{s_t - |f_t|^2/2} \\ &= \left(\dot{s}_t - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |f_t|^2 + (\Phi_t a + \Psi_t a^\dagger - f_t, \bar{f}_t) - (\bar{\Phi}_t a^\dagger + \bar{\Psi}_t a, f_t) \right) U_t \\ &\quad - \frac{1}{2}(a^\dagger, \dot{R}_t a^\dagger) U_t + e^{-(1/2)(a^\dagger, R_t a^\dagger)} (a^\dagger, \dot{C}_t^L a) e^{-(1/2)(a^\dagger, R_t a^\dagger)} U_t \\ &\quad + e^{-(1/2)(a^\dagger, R_t a^\dagger)} e^{(a^\dagger, C_t a)} (a, \bar{\rho}_t a) e^{-(a^\dagger, C_t a)} e^{(1/2)(a^\dagger, R_t a^\dagger)} U_t, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где Φ_t, Ψ_t – матрицы канонического преобразования (2.2).

Заметим, что в пространстве матриц экспонента $e^{(a^\dagger, C_t a)}$ действует как умножение на скаляр, поэтому $e^{(a^\dagger, C_t a)} \bar{\rho}_t e^{-(a^\dagger, C_t a)} = \bar{\rho}_t$. Используя коммутационные соотношения (2.7) и то, что в значения квадратичной формы дает вклад лишь ее симметричная часть

$$\begin{aligned} e^{-s/2(a^\dagger, R_t a^\dagger)} a e^{s/2(a^\dagger, R_t a^\dagger)} &= a + s R_t a^\dagger, \quad a_t \stackrel{\text{def}}{=} e^{(a^\dagger, C_t a)} a e^{-(a^\dagger, C_t a)} = e^{-C_t} a, \\ [(a^\dagger, \dot{C}^L a), (a^\dagger, R a^\dagger)] &= \sum a_\alpha^\dagger a_j^\dagger \dot{C}_{\alpha\beta}^L (R_{\beta j} + R_{\beta j}^T) = (a^\dagger, \dot{C}^L R a^\dagger) + (a^\dagger, R(\dot{C}^L)^T a^\dagger), \\ [(a, \bar{\rho} a), (a^\dagger, C a)] &= \sum a_\alpha a_j (\bar{\rho}_{\alpha k} + \bar{\rho}_{\alpha k}^T) C_{kj} = (a, \bar{\rho} C a) + (a, C^T \bar{\rho} a), \\ [(a, \bar{\rho} a), (a^\dagger, R a^\dagger)] &= 2 \sum a_j^\dagger a_\alpha (R_{kj} + R_{kj}^T) \bar{\rho}_{\alpha k} + 2 \sum R_{kj} \bar{\rho}_{jk} \\ &= 4(a^\dagger, R \bar{\rho} a) + 2 \text{Tr } R \bar{\rho}, \end{aligned}$$

нетрудно получить явные выражения для действия унитарных обкладок на квадратичные и билинейные формы:

$$\begin{aligned} e^{(a^\dagger, C_t a)} (a, \bar{\rho}_t a) e^{-(a^\dagger, C_t a)} &= (a, e^{-C_t^T} \bar{\rho}_t e^{-C_t} a) \stackrel{\text{def}}{=} (a, \bar{\rho}_t^C a), \\ e^{-(1/2)(a^\dagger, R_t a^\dagger)} (a^\dagger, \dot{C}_t^L a) e^{(1/2)(a^\dagger, R_t a^\dagger)} &= (a^\dagger, \dot{C}_t^L a) + \frac{1}{2}(a^\dagger, (\dot{C}_t^L R_t + R_t (\dot{C}_t^L)^T) a^\dagger), \\ \frac{d}{ds} e^{-s/2(a^\dagger, R_t a^\dagger)} (a, \dot{\rho}_t^C a) e^{s/2(a^\dagger, R_t a^\dagger)} &= \frac{d}{ds} ((a + s R_t a^\dagger), \bar{\rho}_t^C (a + s R_t a^\dagger)) \\ &= 2s(a^\dagger, R_t \bar{\rho}_t^C R_t a^\dagger) + \text{Tr } R_t \bar{\rho}_t^C + 2(a^\dagger, R_t \bar{\rho}_t^C a), \\ e^{-(1/2)(a^\dagger, R_t a^\dagger)} (a, \bar{\rho}_t^C a) e^{(1/2)(a^\dagger, R_t a^\dagger)} &= (a, \bar{\rho}_t^C a) + \text{Tr } R_t \bar{\rho}_t^C \\ &\quad + 2(a^\dagger, R_t \bar{\rho}_t^C a) + (a^\dagger, R_t \bar{\rho}_t^C R_t a^\dagger). \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $\bar{\rho}_t^C = e^{-C_t^T} \bar{\rho}_t e^{-C_t} = (\bar{\rho}_t^C)^T$.

Подставляя в правую часть (3.4) коммутационные соотношения (3.5) и собирая коэффициенты билинейных форм операторов рождения-уничтожения одного и того же типа, получим систему уравнений относительно R_t , C_t , ρ_t и S_t :

$$\begin{aligned} \dot{R}_t - \dot{C}_t^L R_t - R_t(\dot{C}_t^L)^T - R_t \overline{\dot{\rho}_t^C} R_t &= A, & (\text{coef } a^\dagger \otimes a^\dagger), \\ \dot{C}_t^L + R_t \overline{\dot{\rho}_t^C} &= iB, & (\text{coef } a^\dagger \otimes a), \\ \dot{\rho}_t^C &= \bar{A}, & (\text{coef } a \otimes a), \\ \Phi_t^* \dot{f}_t - \Psi_t^T \overline{\dot{f}_t} &= h, & (\text{coef } a^\dagger), \\ \Phi_t^T \overline{\dot{f}_t} - \Psi_t^* \dot{f}_t &= \bar{h}, & (\text{coef } a), \\ \dot{s}_t + \frac{1}{2} \text{Tr } R_t \overline{\dot{\rho}_t^C} + \frac{1}{2} (f_t, \bar{f}_t) - \frac{d}{dt} |f_t|^2 &= 0, & (\text{coef } I), \end{aligned}$$

которая благодаря второму и третьему уравнениям, а также вытекающим из них соотношениям $\dot{C}_t^L = iB - R_t \bar{A}$ для симметричных A и R_t и ККС (2.4), приобретает вид разрешимой системы с нулевыми начальными условиями:

$$\begin{aligned} \dot{R}_t &= A + iBR_t + iR_t \bar{B} - R_t \bar{A} R_t, & \dot{C}_t^L &= iB - R_t \bar{A}, \\ \Phi_t &= e^{-C_t}, & \int_0^1 ds e^{sC_t} \dot{C}_t e^{-sC_t} &= \dot{C}_t^L, & \bar{\rho}_t &= e^{C_t^T} \bar{A} e^{C_t}, \\ f_t &= \Phi_t h + \Psi_t \bar{h}, & \dot{s}_t &= \frac{1}{2} ((\dot{f}_t, \bar{f}_t) - (f_t, \bar{\dot{f}}_t)) + \text{Tr}(\dot{C}_t - iB), \end{aligned} \quad (3.6)$$

поскольку $\text{Tr } \dot{C}_t^L = \text{Tr } \dot{C}_t$, причем векторы f_t с вещественными или чисто мнимыми компонентами не дают вклада в уравнение для s_t .

Покажем, что уравнения (3.6) или (3.2) для $\bar{\rho}_t$ с нулевым начальным условием действительно имеет решение (3.3) $\bar{\rho}_t$: $\bar{\rho}_t \Phi_t = \bar{\Psi}_t$, дифференцируя которое и учитывая (2.3), получаем

$$\bar{\Phi}_t \bar{A} - i \bar{\Psi}_t B = \dot{\bar{\Psi}}_t \stackrel{?}{=} \dot{\bar{\rho}}_t \Phi_t + \bar{\rho}_t \dot{\Phi}_t = (\Phi_t^{-1})^T \bar{A} + \bar{\Psi}_t \Phi_t^{-1} (\Psi_t \bar{A} - i \Phi_t B). \quad (3.7)$$

Сокращая слева и справа члены, содержащие матрицу B , действуя на оставшиеся члены слева матрицей Φ_t^T и учитывая тождество $\Phi^T \bar{\Psi} = \Psi^* \Phi$ (см. (2.4)), получаем равенство между левой и правой частью формулы (3.7) как следствие ССР (2.4):

$$\Phi_t^T \bar{\Phi}_t \bar{A} \stackrel{?}{=} (I + \Phi_t^T \bar{\Psi}_t \Phi_t^{-1} \Psi_t) \bar{A} \stackrel{!}{=} (I + \Psi_t^* \Psi_t) \bar{A}.$$

Убедимся, что матрицы Φ_t , Ψ_t , удовлетворяющие (2.3), корректно определяют решение уравнения Риккати $R_t = \Psi_t^{-1} \Phi_t = \Psi_t^T (\Phi_t^T)^{-1}$. Из уравнения (3.6) и формул коммутации (2.3) следует эквивалентное соотношение

$$\begin{aligned} \Phi \dot{R} \Phi^T &= -\dot{\Phi} \Psi^T + \dot{\Psi} \Phi^T = \Phi A \Phi^T + i \Phi B \Psi^T + i \Psi \bar{B} \Phi^T - \Psi \bar{A} \Psi^T \\ \implies (\dot{\Phi} - \Psi \bar{A} + i \Phi B) R - (\dot{\Psi} - \Phi A - i \Psi \bar{B}) &= 0. \end{aligned}$$

Достаточным условием последнего равенства являются соотношения (см. (2.3))

$$\dot{\Phi} = \Psi \bar{A} - i \Phi B = A \bar{\Psi} - i B \Phi, \quad \dot{\Psi} = \Phi A + i \Psi \bar{B} = A \bar{\Phi} - i B \Psi. \quad (3.8)$$

Таким образом, из уравнений (2.3) следует уравнение Риккати (3.6). Докажем обратное утверждение в ослабленной форме. Воспользуемся уравнением Риккати (3.6), формулами (3.8) для $\dot{\Phi}$ и связью $\Psi = \Phi R$:

$$\begin{aligned}\dot{\Psi} &= \frac{d}{dt} \Phi R = \dot{\Phi} R + \Phi(A + iBR + iR\bar{B} - R\bar{A}R) \\ &= \Psi\bar{A}R - i\Phi BR + \Phi A + i\Phi BR + i\Psi\bar{B} - \Psi\bar{A}R = \Phi A + i\Psi\bar{B}.\end{aligned}$$

Таким образом, из уравнения Риккати и первого уравнения (3.8) следует второе уравнение. Рассмотрим вывод первого уравнения, предполагая, что существует $Q = R^{-1}$, $\Psi Q = \Phi$ и

$$\begin{aligned}\dot{\Phi} &= \frac{d}{dt} \Phi Q = \dot{\Psi} Q - \Psi(QAQ + iQB + i\bar{B}Q - \bar{A}) \\ &= \Phi AQ + i\Psi\bar{B}Q - \Phi AQ - i\Phi B - i\Psi\bar{B}Q + \Psi\bar{A} = \Psi\bar{A} - i\Phi B.\end{aligned}$$

Следовательно, из уравнения Риккати и одного из уравнений линейной динамики (3.8) матриц канонического преобразования следует другое уравнение.

Используя связи между C_t и $\dot{C}_t^L$, e^{C_t} и Φ_t , можно преобразовать уравнение для C_t^L в одно из коммутационных соотношений (2.3) или проделать обратную процедуру:

$$\dot{C}_t^L = \left(\frac{d}{dt} e^{C_t} \right) e^{-C_t} = \left(\frac{d}{dt} \Phi_t^{-1} \right) \Phi_t = -\Phi_t^{-1} \dot{\Phi}_t = -\Phi_t^{-1} (\Psi_t A - i\Phi_t B) = iB - R_t A.$$

В заключение покажем, что уравнения

$$\bar{\rho}_t = e^{C_t^T} \bar{A} e^{C_t} \quad \text{и} \quad \dot{\bar{\rho}}_t = \bar{A} + i\bar{B}\bar{\rho}_t + i\bar{\rho}_t B - \bar{\rho}_t A \bar{\rho}_t$$

удивительным образом оказываются эквивалентными и имеют решение $\bar{\rho}_t = \bar{\Psi}_t \Phi_t^{-1}$. Дифференцируя последнее равенство и используя выражения (2.3) для производных, получаем уравнение Риккати:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\rho}}_t &= \bar{\Psi}_t \Phi_t^{-1} - \Psi_t \Phi_t^{-1} \dot{\Phi}_t \Phi_t^{-1} \\ &= \bar{A} + i\bar{B}\bar{\Psi}_t \Phi_t^{-1} + \bar{\Psi}_t \Phi_t^{-1} (iB\Phi_t - A\bar{\Psi}_t) \Phi_t^{-1} = \bar{A} + i\bar{B}\bar{\rho}_t + i\bar{\rho}_t B - \bar{\rho}_t A \bar{\rho}_t.\end{aligned}$$

Действуя слева и справа на разность уравнений для $\bar{\rho}_t$ операторами $e^{-C_t^T} = \Phi_t^T$ и $e^{-C_t} = \Phi_t$ и пользуясь тождествами (2.3), получаем соотношения

$$\begin{aligned}\Phi_t^T \bar{A} \Phi_t + i\Phi_t^T \bar{B} \bar{\Psi}_t + i\Psi_t^* B \Phi_t - \Psi_t^* A \bar{\Psi}_t - \bar{A} \\ = \Phi_t^T (\bar{A} \Phi_t + i\bar{B} \bar{\Psi}_t) + \Psi_t^* (iB\Phi_t - A\bar{\Psi}_t) - \bar{A} \\ = \Phi_t^T (\bar{\Phi}_t \bar{A} - i\bar{\Psi}_t B) + \Psi_t^* (i\Phi_t B - \Psi_t \bar{A}) - \bar{A} \\ = (\Phi_t^T \bar{\Phi}_t - \Psi_t^* \Psi_t) \bar{A} - i(\Phi_t^T \bar{\Psi}_t - \Psi_t^* \Phi_t) B - \bar{A} = \bar{A} - \bar{A} = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, $\bar{\rho}_t = \bar{\Psi}_t \Phi_t^{-1}$ — решение уравнений Риккати (см. (3.2)) и метод, использующий матрицы канонических преобразований Φ_t и Ψ_t , согласуется с методом, использующим уравнение Риккати.

4. Скалярное произведение обобщенных сжатых состояний. Обозначим через $|0\rangle$ вакуумное состояние и через $e^{(a^\dagger, g) - (a, \bar{g})} = |g\rangle$ – многомодовое когерентное состояние, $g \in \mathbb{C}^n$. Из теоремы 1 вытекают два следствия, позволяющие вычислить скалярное произведение обобщенных сжатых состояний $|A, B, h\rangle_t \stackrel{\text{def}}{=} e^{iHt} |0\rangle = U_t |0\rangle$. С этой целью удобно перейти к *приведенной форме* сжатого состояния (см. [5]), выражающей сжатое состояние только через операторы рождения. Обозначим $U_t^{(2)} = U_t e^{(a^\dagger, f_t) - (a, \bar{f}_t)}$.

ЛЕММА 3. *Приведенная форма обобщенного сжатого состояния имеет вид*

$$\begin{aligned} |A, B, h\rangle_t &\stackrel{\text{def}}{=} e^{iH_2 t} | - h \rangle = e^{\sigma_t - (1/2)(a^\dagger, R_t a^\dagger) - (a^\dagger, \Phi_t^{-1} f_t)} |0\rangle, \\ \sigma_t &= \sigma_t(A, B, h) = s_t + \frac{1}{2}(f_t, \bar{\rho}_t f_t) - \frac{1}{2}|f_t|^2, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $R_t = \Phi_t^{-1} \Psi_t$, $\bar{\rho}_t = (\Phi_t^T)^{-1} \Psi_t^*$, s_t определены в теореме 1 и $\dot{f}_t = \Phi_t h + \Psi_t \bar{h}$, $f_0 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\bar{g}_t: \bar{g}_t = (\Phi_t^T)^{-1} \Psi_t^* f_t = \bar{\rho}_t f_t$, воспользуемся разложением (2.5) и следствием тождества Бейкера–Хаусдорфа:

$$\begin{aligned} U_t |0\rangle &\equiv U_t^{(2)} e^{-(a^\dagger, f_t) + (a, \bar{g}_t) + (a, \bar{f}_t - \bar{g}_t)} |0\rangle \\ &= e^{-(\bar{\Phi}_t a^\dagger + \bar{\Psi}_t a, f_t) + (\Phi_t a + \Psi_t a^\dagger, \bar{g}_t) - (1/2)(f_t, \bar{f}_t - \bar{g}_t)} U_t^{(2)} e^{(a, \bar{f}_t - \bar{g}_t)} |0\rangle \\ &= e^{(f_t, (\bar{\rho}_t f_t - \bar{f}_t))/2 - (a^\dagger, \Phi_t^* - \Psi_t^T (\Phi_t^T)^{-1} \Psi_t^* f_t)} U_t^{(2)} |0\rangle \\ &= e^{(f_t, (\bar{\rho}_t f_t - \bar{f}_t))/2 - (a^\dagger, \Phi_t^{-1} (\Phi_t \Phi_t^* - \Psi_t \Psi_t^*) f_t)} U_t^{(2)} |0\rangle \\ &= e^{(f_t, \bar{\rho}_t f_t)/2 - |f_t|^2/2 - (a^\dagger, \Phi_t^{-1} f_t) - (a^\dagger, R_t a^\dagger)/2} |0\rangle, \end{aligned}$$

где $\Psi_t^T (\Phi_t^T)^{-1} = \Phi_t^{-1} \Psi_t$ согласно (2.4) и $\bar{\rho}_t = (\Phi_t^T)^{-1} \Psi_t^*$. Отсюда следует (4.1). К такому же результату приводит использование нормального разложения (2.1) с найденными выше выражениями для R_t , ρ_t , C_T .

Используя (4.1) и известный изоморфизм между ℓ_2^n и $L_2(\mathbb{R}^n)$, можно вычислить среднее значение и дисперсию гауссового распределения наблюдаемых $\hat{x} = (a + a^\dagger)/\sqrt{2}$ и $\hat{p} = (a - a^\dagger)/(i\sqrt{2})$, соответствующего состоянию (4.1), и построить координатное и импульсное представления обобщенного сжатого состояния, формулы соответствия между приведенной формой сжатого состояния и его x - и p -представлениями, которые позволяют свести вычисление скалярных произведений обобщенных сжатых состояний к вычислению гауссовых интегралов. Из леммы 3 и теоремы 2 из [5] (см. формулу (4.4) там же) следует изоморфизм между приведенными сжатыми состояниями (4.1) в ℓ_2^n и их представлениями в $L_2(\mathbb{R}^n)$. В обозначениях, использованных в лемме 3, имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 4. *Имеем*

$$|A, B, h\rangle \stackrel{\text{def}}{=} e^{iH_2 t} |0\rangle \iff \frac{e^{|x|^2/2 - (x - f_t/\sqrt{2}, (I - R_t)^{-1}(x - f_t/\sqrt{2})) + \sigma_t}}{\pi^{n/4} \sqrt{\det(I - R_t)}} \in L_2(\mathbb{R}^n). \quad (4.2)$$

С помощью этого изоморфизма нетрудно вычислить среднее значение и дисперсию оператора координаты

$$\langle \hat{x}_t \rangle = \sqrt{2} \operatorname{Re}(I + R_t)^{-1} f_t, \quad D_x^2 = \frac{I + R_t}{I - R_t}.$$

Аналогично вычисляются среднее и дисперсия оператора импульса (см. формулы (2.9) в [5]). Кроме того, изоморфизм (4.2) позволяет вычислить скалярное произведение обобщенных сжатых состояний. Обозначим

$$\begin{aligned} r_t^{A,B} &\stackrel{\text{def}}{=} (I - R_t(A, B))^{-1}, & \dot{f}_t &= \Phi_t^{A,B} h + \Psi_t^{A,B} \bar{h}, & \dot{e}_t &= \Phi_t^{\Lambda,V} g + \Psi_t^{\Lambda,V} \bar{g}, \\ \Omega_t &\stackrel{\text{def}}{=} (r_t^{A,B} (I - \bar{R}_t(\Lambda, V) R_t(A, B)) \bar{r}_t^{\Lambda,V})^{-1}, \\ Q_t &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} r_t^{A,B} - r_t^{A,B} \Omega_t r_t^{A,B} & r_t^{A,B} \Omega_t \bar{r}_t^{\Lambda,V} \\ \bar{r}_t^{\Lambda,V} \Omega_t r_t^{A,B} & \bar{r}_t^{\Lambda,V} - \bar{r}_t^{\Lambda,V} \Omega_t \bar{r}_t^{\Lambda,V} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда имеет место следующее представление для скалярного произведения обобщенных сжатых состояний, доказательство которого мы опускаем, поскольку оно сводится к интегрированию произведения гауссовых плотностей вида (4.2).

ТЕОРЕМА 2. *Имеем*

$$\langle \Lambda, V, g \mid A, B, h \rangle_t = \frac{e^{\sigma_t(A,B,h) + \overline{\sigma_t(\Lambda,V,g)} - (1/2) \left(\left(\frac{f_t}{\bar{e}_t} \right), Q_t \left(\frac{f_t}{\bar{e}_t} \right) \right)}}{\sqrt{\det(I - \bar{R}_t(\Lambda, V) R_t(A, B))}}. \quad (4.3)$$

Эта формула позволяет строить ортонормированные базисы сжатых состояний для численного решения задач и вычислять нормальные символы композиции обобщенных сжатий.

5. Примеры точно решаемых задач. В качестве примера рассмотрим гамильтониан $\imath H = a_1 a_2 e^{-2\imath\phi} - a_1^\dagger a_2^\dagger e^{2\imath\phi}$, изучавшийся в [10]. Используя теорему 1 и формулу факторизации (2.1), находим

$$\begin{aligned} \Phi_t &= \begin{pmatrix} \cosh t & 0 \\ 0 & \cosh t \end{pmatrix}, & \Psi_t &= \begin{pmatrix} 0 & e^{2\imath\phi} \sinh t \\ e^{2\imath\phi} \sinh t & 0 \end{pmatrix}, \\ U_t(\phi) &= (\cosh r)^{-1} e^{-a_1^\dagger a_2^\dagger e^{2\imath\phi} \tanh r} e^{-(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2) \ln(\cosh r)} e^{a_1 a_2 e^{-2\imath\phi} \tanh r}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть система с гамильтонианом (2.1) изначально находилась в вакуумном состоянии $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$. Тогда

$$\langle \psi(t) | a_i^\dagger a_j | \psi(t) \rangle = (\bar{\Psi} \Psi^T + \bar{g}_t * g_t^T)_{ij}. \quad (5.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $|\psi_t\rangle = U_t |0\rangle$, из канонических преобразований (5.1) следует

$$\begin{aligned} \langle \psi(t) | a_i^\dagger a_j | \psi(t) \rangle &= \langle 0 | U^\dagger a_i^\dagger a_j U | 0 \rangle = \langle 0 | U^\dagger a_i^\dagger U U^\dagger a_j U | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | (\bar{\Psi} a^\dagger)_i (\Psi a)_j + (\bar{g}_t)_i (g_t)_j | 0 \rangle = (\bar{\Psi} \Psi^T + \bar{g}_t g_t^T)_{ij}, \end{aligned}$$

где нижние индексы являются индексами компонент векторов и матричных элементов. Более трудоемким алгебраическим путем этот результат был получен в работе [10].

Система (3.6) и уравнения для матриц канонического преобразования Φ_t, Ψ_t имеют аналитическое решение в случае $B = 0$, которое удобно выразить в терминах полярного разложения оператора $A = U_A |A|$ (см. [4; section 8], [5; раздел 3]):

$$\begin{aligned} R_t &= U_A \operatorname{th} |A|t, & C_t &= -U_A \ln \cosh |A|t U_A^*, & \bar{\rho}_t &= \operatorname{th} |A|t U_A^*, \\ \Phi_t &= U_A \cosh |A|t U_A^*, & \Psi_t &= U_A \sinh |A|t, & s_t &= -\frac{1}{2} \operatorname{Tr} \ln \cosh |A|t. \end{aligned} \quad (5.3)$$

В этом случае решение обладает свойствами коммутативности: $[R_t \bar{A}, R_s \bar{A}] = 0$, $[C_t, C_s] = [C_t, \dot{C}_s] = 0$ и поэтому $C_t \equiv C_t^L$. Рассмотрим два новых случая, в которых существует аналитическое решение задачи (3.6) при $B \neq 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $A\bar{A}$ и B коммутируют, а матрица A обратима и имеет простой спектр, то система (3.6) имеет единственное решение, обладающее следующими свойствами:

- 1) $[B, R_t \bar{A}] = 0$, $[R_s \bar{A}, R_t \bar{A}] = 0$, $[C_t, R_s \bar{A}] = 0$ для любых s, t и $C_t^L = C_t$;
- 2) $R_t = \sum_k x_t(\alpha_k, \beta_k) \hat{\pi}_k \bar{A}^{-1}$, где $\{\hat{\pi}_k\}$ – общая система спектральных ортопроекторов эрмитовых матриц $A\bar{A}$ и B , $\{\alpha_k^2\} = \operatorname{spectr} A\bar{A} \in \mathbb{R}_+$, $\{\beta_k\} = \operatorname{spectr} B \in \mathbb{R}$,

$$x_t(a, b) = ib - \sqrt{b^2 - a^2} \operatorname{tg} S(a, b, t), \quad (5.4)$$

где

$$S(a, b, t) = t\sqrt{b^2 - a^2} + i \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}} \right);$$

- 3) имеем

$$C_t = iBt - \sum_k (i\beta_k t + q_t(\alpha_k, \beta_k)) \hat{\pi}_k = - \sum_k q_t(\alpha_k, \beta_k) \hat{\pi}_k,$$

где $q_t(a, b) = \ln \cos S(a, b, t)$;

- 4) имеем

$$s_t = -\frac{1}{2} \operatorname{Tr}(iBt + \sum_k q_t(\alpha_k, \beta_k)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если матрица A обратима и имеет простой спектр, а $A\bar{A}$ и B коммутируют, то $A\bar{A}$ и B имеют общую систему спектральных проекторов $\{\hat{\pi}_n\}$ такую, что

$$A\bar{A} = \sum_n \alpha_n^2 \hat{\pi}_n, \quad B = \sum_n \beta_n \hat{\pi}_n,$$

где α_n^2 неотрицательны, отличны от нуля и различны, а β_n – вещественные числа. Следовательно, существует единственный набор вещественных чисел $\{z_n\}$ такой, что $\beta_n = z_n \alpha_n$. Поэтому композиция оператора $Z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_n z_n \hat{\pi}_n$ с оператором $A\bar{A}$ равна

$$\sum_n \alpha_n z_n \hat{\pi}_n = f(A\bar{A}) = B,$$

причем $f(A\bar{A})$ – линейное отображение множества эрмитовых матриц в себя. Аналогично, $f(\bar{A}A) = \bar{B}$, причем для любой аналитической функции f выполнено равенство $f(\bar{A}A)\bar{A} = \bar{A}f(A\bar{A})$, так что $\bar{B}\bar{A} = \bar{A}B$.

Отсюда следует уравнение для $X_t = R_t \bar{A}$ с нулевыми начальными условиями, эквивалентное уравнению (3.6):

$$\begin{aligned} \dot{X}_t &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} R_t \bar{A} = A \bar{A} + i B R_t \bar{A} + i R_t \bar{B} A - (R_t \bar{A})^2 \\ &= A \bar{A} + i B R_t \bar{A} + i R_t \bar{A} B - (R_t \bar{A})^2 \\ &= A \bar{A} + i X_t B + i B X_t - X_t^2, \quad X|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Решение неоднородной системы (5.5) с постоянными коэффициентами, начинающееся в нуле, существует и единственно, по крайней мере, в малом. Его нетрудно построить, предположив, что X_t коммутирует с матрицей $A \bar{A}$; так система (5.5) диагонализуется в базисе собственных векторов этой матрицы. Поэтому эрмитовы матрицы $R_t \bar{A}$, $\dot{C}_t^L$, C_t^L , удовлетворяющие (3.6) при всех t , имеют общий фиксированный набор спектральных проекторов и отличаются только собственными значениями α_k , поэтому уравнения расцепляются в базисе собственных векторов. Первое утверждение теоремы доказано. Из него следует, что $C_t^L = C_t$.

Уравнения диагонализированной системы записываются в виде $\dot{x}_t = a^2 + 2ibx_t - x_t^2$ и имеют глобальное решение (5.4) с начальным условием $x_0 = 0$, которое проверяется подстановкой в уравнение, что позволяет вычислить C_t и след s_t , и может быть выражено через решения линейной системы (2.3), существующие глобально: $x_t = \Phi_t^{-1} \Psi_t^{-1} \bar{A}$ (см. (2.9)). При $B = 0$ решение, описываемое в предложении 2, переходит в (5.3) и совпадает с (3.5) из статьи [5].

Следующий пример связан с задачей об эволюции заряженных частиц в скрещенных электрическом и магнитном полях. Рассмотрим гамильтониан частицы в представлении (x, p) и представлении вторичного квантования:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &= \frac{1}{2}((p_1 + Hx_2)^2 + (p_2 - Hx_1)^2) + (E, x) + V(x) \\ &= \frac{i}{2}(a^\dagger, A(H)a^\dagger) - \frac{i}{2}(a, \bar{A}(H)a) + (a^\dagger, B(H)a) + \frac{(E, (a^\dagger + a))}{\sqrt{2}} + \kappa, \\ A(H) &= \frac{i(1 - H^2)}{2} \sigma_0, \quad B(H) = \frac{1 + H^2}{2} \sigma_0 - \frac{H}{2} \sigma_2, \\ \sigma_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где

$$a = \{a_1, a_2\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{x_1 + ip_1, x_2 + ip_2\}, \quad a^\dagger = \{a_1^\dagger, a_2^\dagger\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{x_1 - ip_1, x_2 - ip_2\},$$

$$E = \{E_1, E_2\}.$$

Матрицы $A(H)$ имеют кратный спектр, и леммой 2 воспользоваться нельзя. Однако в этом случае $[A(H), B(H)] = [B(H), \bar{B}(H)] = 0$, так как матрицы $A(H)$, $B(H)$ и $\bar{B}(H)$ имеют общую систему спектральных проекторов $\{\hat{\pi}_{1,2}\}$:

$$\hat{\pi}_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_0 \pm \sigma_2), \quad \text{Tr } \hat{\pi}_{1,2} = 1, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2}(\hat{\pi}_1 + \hat{\pi}_2), \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}(\hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_2).$$

Собственные значения матриц A и B равны

$$\lambda_{1,2}(A) = \frac{i(1-H^2)}{2}, \quad \lambda_{1,2}(B) = 1 \pm H + H^2/2.$$

Матрицы канонических преобразований Φ_t и Ψ_t в этом случае вычисляются явно из решения уравнений Гейзенберга для эволюции операторов рождения-уничтожения

$$a_t = e^{i\hat{\mathcal{H}}t} a e^{-i\hat{\mathcal{H}}t} = \Psi_t a^\dagger + \Phi_t a + f_t, \quad a_t^\dagger = e^{i\hat{\mathcal{H}}t} a^\dagger e^{-i\hat{\mathcal{H}}t} = \bar{\Psi}_t a + \bar{\Phi}_t a^\dagger + \bar{f}_t, \quad \dot{f}_0 = iE;$$

имеем

$$\begin{aligned} f_t &= \bar{f}_t = \begin{pmatrix} -E_2 \\ E_1 \end{pmatrix} S(t) - \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} C(t), \\ C(t) &= \frac{1 - \cos 2Ht}{4H^2}, \quad S(t) = \frac{t}{2H} \left(1 - \frac{\sin 2Ht}{2Ht} \right), \\ e^{\pm iHt\sigma_2} &= \sigma_0 \cos Ht \pm i\sigma_2 \sin Ht, \quad (\Phi_t)^{\pm 1} = \phi(t)^{\pm 1} (\hat{\pi}_1 e^{\pm iHt} + \hat{\pi}_2 e^{\mp iHt}), \\ \Phi_t &= \phi(t) e^{iHt\sigma_2}, \quad \Psi_t = \psi(t) e^{iHt\sigma_2}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \hat{\pi}_2 - \hat{\pi}_1, \\ \phi(t) &= \cos Ht - i \frac{1+H^2}{2H} \sin Ht, \quad \psi(t) = i \frac{1-H^2}{2H} \sin Ht, \quad R_t = \phi_t^{-1} \psi_t \sigma_0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

причем Φ_t и Ψ_t удовлетворяют коммутационным соотношениям (2.4). Нетрудно видеть, что $|\phi(t, H)| \geq 1$.

Из (2.8) и последнего равенства в (5.7) получаем

$$\begin{aligned} C_t &= \ln \Phi_t^{-1} = \hat{\pi}_1 \ln \phi^{-1}(t) e^{-iHt} + \hat{\pi}_2 \ln \phi^{-1}(t) e^{iHt}, \\ e^{C_t} &= \phi^{-1}(t), \quad \text{Tr } C_t = 2 \ln \phi_t^{-1}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Учитывая, что $\text{Tr } B = 1 + H^2$, находим $s_t = \frac{1}{2} \text{Tr}(C_t - iBt) = -\ln \phi(t) - \frac{it}{2} (1 + H^2)$ и

$$e^{s_t} = \frac{1}{\phi(t)} e^{-\frac{it}{2} (1+H^2)}. \quad (5.9)$$

Очевидно, что для векторов f_t с вещественными компонентами интегральный член в формуле (3.6) для s_t равен нулю.

Используя разложения операторов (2.8), (5.7) и правило нормального упорядочения операторов рождения-уничтожения $e^{(a^\dagger, Ca)} = : e^{(a^\dagger, (e^C - I)a)} :$, получаем выражение для действия оператора числа частиц:

$$\begin{aligned} e^{(a^\dagger, C_t a)} &= : e^{(a^\dagger, (e^{C_t} - I)a)} : = : e^{(a^\dagger, (\Phi_t^{-1} - I)a)} : \\ &= : \exp \left(a^\dagger, \left(\frac{\sigma_0 \cos Ht - i\sigma_2 \sin Ht}{\phi(t)} - I \right) a \right) : \\ &= : \exp \left(a^\dagger, \left(\frac{\hat{\pi}_1 e^{-iHt} + \hat{\pi}_2 e^{iHt}}{\phi(t)} - I \right) a \right) : \end{aligned} \quad (5.10)$$

Соответствующее уравнение Риккати (3.6) для $R_t = \sum_n r_n(t) \hat{\pi}_n$ в базисе собственных векторов диагоналізується, причем оба уравнения полученной системы совпадают,

$$\begin{aligned}\dot{r}_1(t) &= \lambda(A) + i(\lambda_1(B) + \bar{\lambda}_2(B))r_1(t) - \bar{\lambda}(A)r_1^2(t), \\ \dot{r}_2(t) &= \lambda(A) + i(\bar{\lambda}_1(B) + \lambda_2(B))r_2(t) - \bar{\lambda}(A)r_2^2(t),\end{aligned}$$

за счет того, что

$$\lambda(A) = \lambda_{1,2}(A), \quad \lambda_1(B) + \bar{\lambda}_2(B) = \bar{\lambda}_1(B) + \lambda_2(B) = 1 + H^2.$$

Решение скалярного уравнения Риккати строится с помощью сдвига на константу $r_t \rightarrow q_t = r_t + c$, выбираемую так, чтобы скомпенсировать неоднородный член $i(1 - H^2)/2$, а затем линеаризуется переходом к новой функции $q_t \rightarrow p_t = (q_t)^{-1}$:

$$\begin{aligned}\dot{r}_t &= \frac{i(1 - H^2)}{2} + i(1 + H^2)r_t + \frac{i(1 - H^2)}{2}r_t^2, \quad r_0 = 0, \\ r_t &= \frac{(H^2 - 1)\sin Ht}{(H^2 + 1)\sin Ht + 2iH \cos Ht} = \frac{\psi(t)}{\phi(t)}, \quad R_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} r_t.\end{aligned}\tag{5.11}$$

В результате получаем явное выражение $R_t = \Psi_t^{-1} \Phi_t$ для матриц (5.7). Следовательно, R_t коммутирует с $e^{\pm \bar{C}t}$, и поэтому из формул (5.7) и (5.11) имеем

$$\rho_t = e^{-Ct} R_t e^{\bar{C}t} = R_t \Phi_t \bar{\Phi}_t^{-1} = -R_{-t} = \bar{R}_t, \quad \bar{\Phi}_t = \Phi_{-t}, \quad \bar{\Psi}_t = \Psi_{-t}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Существует глобальная нормальная факторизация унитарной группы $U_t = e^{iHt}$ с гамильтонианом (5.6):

$$e^{iHt} = e^{-(1/2)r(t)(a^\dagger, a^\dagger)} : e^{i(a^\dagger, (\Phi_t^{-1} - I)a)} : e^{(1/2)\bar{r}(t)(a^\dagger, a^\dagger)} e^{((a^\dagger - a), f_t)} e^{st}, \tag{5.12}$$

где нормировка e^{st} , Φ_t и f_t задаются явным образом формулами (5.7)–(5.9).

Важно отметить периодическую зависимость от времени матриц R_t , ρ_t и e^{Ct} , что позволяет описывать квантовую динамику в постоянном магнитном и периодическом электрическом полях с помощью сжатий, лежащих на компактных периодических орбитах, и множества случайных сдвигов, имеющих известное распределение.

Авторы выражают благодарность профессорам D. S. Agarwal и В. В. Додонову.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ф. А. Березин, *Метод вторичного квантования*, Наука, М., 1986.
- [2] R. P. Feynman, "An operator calculus having applications in quantum electrodynamics", *Phys. Rev.* (2), **84**:1 (1951), 108–128.
- [3] Д. А. Киржниц, *Полевые методы теории многих частиц*, Госатомиздат, М., 1963.
- [4] H.-Y. Fan, "Operator ordering in quantum optics theory and the development of Dirac's symbolic method", *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, **5**:4 (2003), R147–R163.
- [5] А. М. Чеботарев, Т. В. Тлячев, А. А. Радионов, "Сжатые состояния и их применение в задачах квантовой эволюции", *Матем. заметки*, **89**:4 (2011), 614–634.
- [6] R. M. Wilcox, "Exponential operators and parameter differentiation in quantum physics", *J. Math. Phys.*, **8**:4 (1967), 962–982.

- [7] М. В. Карасев, В. П. Маслов, *Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование*, Наука, М., 1991.
- [8] I. Najfeld, T. H. Havel, *Derivatives of the matrix exponential and their computation*, TR-33-94, Harvard University, Cambridge, Massachusetts, 1994.
- [9] C. W. Gardiner, P. Zoller, *Quantum Noise. A Handbook of Markovian and Non-Markovian Quantum Stochastic Methods with Applications to Quantum Optics*, Springer Ser. Synergetics, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [10] C. M. Caves, B. L. Schumaker, “New formalism for two-photon quantum optics. II. Mathematical foundation and compact notation”, *Phys. Rev. A* (3), **31**:5 (1985), 3093–3111.

А. М. Чеботарев

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: chebotarev@phys.msu.ru

Поступило

21.06.2012

Т. В. Тлячев

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: timattv@gmail.com

А. А. Радионов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: alex.radionov89@gmail.com