Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Г. Карпуз, А. С. Чевик, Базисы Грёбнера–Ширшова для расширенных модулярных групп, расширенных групп Гекке и групп Пикара, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 5, 699–706

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10128>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 13:25:34

Базисы Грёбнера–Ширшова для расширенных модулярных групп, расширенных групп Гекке и групп Пикара

Э. Г. Карпуз, А. С. Чевик

Рассматриваются (некоммутативные) базисы Грёбнера–Ширшова для расширенных модулярных групп, расширенных групп Гекке и групп Пикара. Предлагается новый алгоритм, который строит нормальные формы элементов и, тем самым, решает проблему равенства в этих группах.

Библиография: 23 названия.

1. Введение и предварительные сведения. Алгоритмические проблемы, такие как проблемы равенства, сопряженности и изоморфизма, играют важную роль в теории групп со времени появления работ М. Дена в самом начале прошлого века. Эти проблемы называются *проблемами разрешимости*; они требуют дать ответ “да” или “нет” на определенный вопрос. Среди таких проблем разрешимости наиболее интенсивно изучалась проблема равенства в группах и полугруппах (см. [1]). Хорошо известно, что проблема равенства для конечно представимых групп, вообще говоря, неразрешима; иными словами, для двух слов, составленных из порождающих элементов, может отсутствовать алгоритм, который отвечает на вопрос, являются ли эти слова записями одного и того же элемента группы.

Метод базисов Грёбнера–Ширшова, которому посвящена эта статья, дает новый алгоритм построения нормальных форм элементов некоторых групп и полугрупп и, тем самым, новый алгоритм для решения проблемы равенства в этих группах и полугруппах. Имея в виду это обстоятельство, в настоящей статье мы ставим перед собой задачу построения базисов Грёбнера–Ширшова для расширенных модулярных групп, расширенных групп Гекке и групп Пикара.

(а) *Базис Грёбнера–Ширшова.* Теорию базисов Грёбнера и Грёбнера–Ширшова независимо построили Ширшов [2] (для некоммутативных и неассоциативных алгебр), Хиронака [3] и Бухбергер [4] (для коммутативных алгебр). Техника базисов Грёбнера–Ширшова оказалась весьма полезной для изучения копредставлений ассоциативных алгебр, алгебр Ли, полугрупп, групп и Ω -алгебр, которое сводится к рассмотрению порождающих элементов и соотношений (см., например, книгу Бокутя и Кукина [5], а также обзоры [6], [7]).

Пусть X – множество, X^* – множество X -слов (мономов) и $<$ – мономиальный полный порядок на X^* (т.е. $<$ – отношение полного порядка, который выдерживает

умножение на слова слева и справа). Кроме того, пусть k – поле и $k\langle X \rangle$ – свободная алгебра над полем k с базисом X . Для $f \in k\langle X \rangle$ пусть $\bar{f}$ – максимальный (старший) моном в f . Тогда $\overline{fg} = \bar{f}\bar{g}$ для любых f и g . Полином f называется *унитарным*, если коэффициент при $\bar{f}$ в f равен 1. Для унитарных многочленов f и g и для мономов $a, b \in X^*$ базис Грёбнера–Ширшова можно определить следующим образом.

I) Пусть w – слово, которое можно записать в виде $w = \bar{f}b = a\bar{g}$, причем $\deg(\bar{f}) + \deg(\bar{g}) > \deg(w)$. Тогда многочлен $(f, g)_w = fb - ag$ называется *композицией пересечения* многочленов f и g относительно w .

II) Пусть $w = \bar{f} = a\bar{g}b$. Тогда многочлен $(f, g)_w = f - agb$ называется *композицией включения* многочленов f и g относительно w . В этом случае преобразование

$$f \mapsto (f, g)_w = f - agb$$

называется *исключением старшего слова* многочлена g из f .

Для композиций, определенных в I) и II), мы используем обозначения $f \wedge g$ и $f \vee g$ соответственно. Слово w называется *неоднозначностью* композиции $(f, g)_w$. Говорят, что композиция $(f, g)_w$ является *тривиальной по модулю (S, w)* , и пишут $(f, g)_w \equiv 0 \pmod{(S, w)}$, если

$$(f, g)_w = \sum \alpha_i a_i s_i b_i \quad \text{и} \quad a_i \bar{s}_i b_i < w,$$

где $s_i \in S$, $a_i, b_i \in X^*$ и $\alpha_i \in k$. В частности, если $(f, g)_w$ обращается в нуль при исключении старших слов многочленов из S , то $(f, g)_w \equiv 0 \pmod{(S, w)}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Унитарное подмножество S множества $k\langle X \rangle$ называется *базисом* (множеством) *Грёбнера–Ширшова*, если любая композиция многочленов из S тривиальна по модулю S и неоднозначности. В этом случае S называется также *базисом Грёбнера–Ширшова идеала $\text{Id}(S)$* , порожденного множеством S , и алгебры $k\langle X; S \rangle = k\langle X \rangle / \text{Id}(S)$, порожденной множеством X и определяющими соотношениями S .

Следующая лемма принадлежит Ширшову [2]. Она представляет собой аналог главной теоремы Бухбергера [4], [8].

ЛЕММА 1.2 (“Бриллиантовая” лемма о композициях). Пусть $S \subset k\langle X \rangle$ – унитарное множество и $<$ – мономальный порядок на X^* . Тогда следующие условия равносильны:

- 1) S является базисом Грёбнера–Ширшова относительно $<$;
- 2) если $f \in \text{Id}(S)$, то $\bar{f} = a\bar{s}b$ для некоторых $s \in S$ и $a, b \in X^*$;
- 3) $\text{Irr}(S) = \{u; u \neq a\bar{s}b, s \in S, a, b \in X^*\}$ является k -базисом алгебры $k\langle X; S \rangle$.

Если S не является базисом Грёбнера–Ширшова, то можно построить базис Грёбнера–Ширшова R идеала $\text{Id}(S)$ путем добавления на каждом шаге нетривиальных композиций многочленов, построенных на предыдущих шагах (и приведенных применением преобразования исключения старших слов предыдущих многочленов и делением на старший коэффициент). Эта процедура называется *алгоритмом Ширшова*. Вообще говоря, алгоритм Ширшова бесконечен.

Читатель может ознакомиться с другими важными результатами о базисах Грёбнера–Ширшова в [6], [9]–[14].

(b) *Расширенная модулярная группа, расширенная группа Гекке и группа Пикара.*

В [15] Гекке ввел бесконечный класс дискретных групп $H(\lambda_q)$ дробно-линейных преобразований, сохраняющих верхнюю полупрямую. *Группа Гекке* – это группа, порожденная преобразованиями

$$x(z) = -\frac{1}{z} \quad \text{и} \quad u(z) = z + \lambda_q,$$

где $\lambda_q = 2 \cos \pi/q$ для целого $q \geq 3$. Пусть

$$y = xu = -\frac{1}{z + \lambda_q}.$$

Тогда $H(\lambda_q)$ имеет копредставление $\mathcal{P}_{H(\lambda_q)} = \langle x, y; x^2, y^q \rangle$. Числу $q = 3$ соответствует группа Гекке $H(\lambda_3) = \mathbf{M}$ – это *модулярная группа* $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$. Дополняя образующие модулярной группы отражением $r(z) = 1/\bar{z}$, мы получаем расширенную модулярную группу $\bar{H}(\lambda_3) = \bar{\mathbf{M}}$; она была введена в [16]. В [17] была определена *расширенная группа Гекке*, обозначаемая через $\bar{H}(\lambda_q)$, которая получается включением отражения $r(z) = 1/\bar{z}$ в число образующих группы $H(\lambda_q)$, подобно тому как получается расширенная модулярная группа $\bar{\mathbf{M}}$. Группа Гекке $H(\lambda_q)$ является подгруппой индекса 2 в $\bar{H}(\lambda_q)$. Согласно [16] расширенная группа Гекке $\bar{H}(\lambda_q)$ изоморфна группе $D_2 *_{\mathbb{Z}_2} D_q$ (где D_q – группа диэдра с $2q$ элементами) и имеет копредставление

$$\mathcal{P}_{\bar{H}(\lambda_q)} = \langle x, y, r; x^2, y^q, r^2, (xr)^2, (yr)^2 \rangle. \quad (1)$$

Для $q = 3$ имеем *расширенную модулярную группу* $\bar{\mathbf{M}}$. Группы Гекке $H(\lambda_q)$, расширенные группы Гекке $\bar{H}(\lambda_q)$ и их нормальные подгруппы были подробно изучены с разных сторон (см. [18]–[20]). Группа Гекке $H(\lambda_3)$, модулярная группа $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ и ее нормальные подгруппы вызывают особенно большой интерес в разных областях математики, таких как теория чисел, теория автоморфизмов и теория групп. В [21] эти группы были рассмотрены с другой точки зрения; было показано, что расширенная группа Гекке $\bar{H}(\lambda_q)$ представляет собой полупрямое произведение (расщепляемое расширение) группы Гекке $H(\lambda_q)$ и циклической группы порядка 2. Кроме того, рассматривая копредставление (1), авторы работы [21] получили необходимые и достаточные условия его *эффективности* (это алгебраическое свойство) на минимальном числе образующих. (Определение эффективности и некоторые факты об этом понятии можно найти в [22].)

Группа Пикара $\mathbf{P}$ определяется как группа $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}[i])$ дробно-линейных преобразований с гауссовыми целыми коэффициентами. Группа $\mathbf{P}$ является свободным произведением с объединенной подгруппой вида $\mathbf{P} = G_1 *_{\mathbf{M}} G_2$, где $G_1 \cong S_3 *_{\mathbb{Z}_3} A_4$, $G_2 \cong S_3 *_{\mathbb{Z}_2} D_2$ (напомним, что D_2 – 4-группа Клейна) и $\mathbf{M}$ – модулярная группа $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$. Как известно [23], группа $\mathbf{P}$ имеет копредставление

$$\mathcal{P}_{\mathbf{P}} = \langle x, u, y, r; x^3, u^2, y^3, r^2, (xu)^2, (xy)^2, (ry)^2, (ru)^2 \rangle,$$

где

$$x(z) = \frac{i}{iz + 1}, \quad u(z) = -\frac{1}{z}, \quad y(z) = \frac{z + 1}{-z}, \quad r(z) = \frac{i}{iz}.$$

2. Базисы Грёбнера–Ширшова для $\overline{\mathbf{M}}$, $\overline{H}(\lambda_q)$ и $\mathbf{P}$. В этом разделе мы найдем базисы Грёбнера–Ширшова для расширенной модулярной группы $\overline{\mathbf{M}}$, расширенной группы Гекке $\overline{H}(\lambda_q)$ и группы Пикара $\mathbf{P}$. Стоит отметить, что поскольку модулярная группа и группа Гекке являются свободными произведениями двух циклических групп с копредставлениями

$$H(\lambda_3) = \mathbf{M} = \langle x, y; x^2 = y^3 = 1 \rangle \quad \text{и} \quad H(\lambda_q) = \langle x, y; x^2 = y^q = 1 \rangle,$$

их базисы Грёбнера–Ширшова включают только их собственные соотношения.

Рассмотрим моноидальные копредставления групп $\overline{\mathbf{M}}$, $\overline{H}(\lambda_q)$ и $\mathbf{P}$. Пусть X , Y , R и U – элементы, обратные к порождающим x , y , r и u соответственно. Лексикографически упорядочим множество $\{X, Y, R, x, y, r\}^*$ в группах $\overline{\mathbf{M}}$ и $\overline{H}(\lambda_q)$, считая, что

$$y < r < x < Y < R < X.$$

Рассмотрим многочлены

$$\begin{array}{lll} 1) & x^2 - 1, & 2) & y^3 - 1, & 3) & r^2 - 1, \\ 4) & xr - rx, & 5) & ry^2 - yr, & 6) & Xx - 1, \\ 7) & xX - 1, & 8) & Yy - 1, & 9) & yY - 1, \\ 10) & Rr - 1, & 11) & rR - 1 \end{array}$$

для расширенной модулярной группы $\overline{\mathbf{M}}$ и

$$\begin{array}{lll} 12) & x^2 - 1, & 13) & y^q - 1, & 14) & r^2 - 1, \\ 15) & xr - rx, & 16) & ry^{q-1} - yr, & 17) & Xx - 1, \\ 18) & xX - 1, & 19) & Yy - 1, & 20) & yY - 1, \\ 21) & Rr - 1, & 22) & rR - 1 \end{array}$$

для расширенной группы Гекке $\overline{H}(\lambda_q)$.

В группе Пикара $\mathbf{P}$ мы лексикографически упорядочим множество $\{X, Y, U, R, x, y, u, r\}^*$, считая, что

$$x < y < u < r < X < Y < U < R,$$

и рассмотрим многочлены

$$\begin{array}{llll} 23) & x^3 - 1, & 24) & u^2 - 1, & 25) & y^3 - 1, & 26) & r^2 - 1, \\ 27) & ux^2 - xu, & 28) & y^2x^2 - xy, & 29) & y^2r - ry, & 30) & ru - ur, \\ 31) & Xx - 1, & 32) & xX - 1, & 33) & Uu - 1, & 34) & uU - 1, \\ 35) & Yy - 1, & 36) & yY - 1, & 37) & Rr - 1, & 38) & rR - 1. \end{array}$$

Основной результат этой статьи – следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.1. *Базисы Грёбнера–Ширшова для расширенных модулярных групп, расширенных групп Гекке и групп Пикара состоят из многочленов 1)–11), 12)–22) и 23)–38) соответственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам нужно доказать, что все композиции многочленов 1)–11), 12)–22) и 23)–38) тривиальны. Рассматривая композиции включения этих многочленов, мы видим, что такие композиции отсутствуют. Остается рассмотреть композиции пересечения многочленов в каждой группе.

I) *Расширенные модулярные группы.* Рассмотрим композиции пересечения многочленов 1)–11). Возникают следующие неоднозначности:

$$\begin{array}{lll}
 1) \wedge 1): & w = x^3, & 1) \wedge 4): & w = x^2r, & 1) \wedge 7): & w = x^2X, \\
 2) \wedge 2): & w = y^4, & 2) \wedge 9): & w = y^3Y, & 3) \wedge 3): & w = r^3, \\
 3) \wedge 5): & w = r^2y^2, & 3) \wedge 11): & w = r^2R, & 4) \wedge 3): & w = xr^2, \\
 4) \wedge 5): & w = xry^2, & 4) \wedge 11): & w = xrR, & 5) \wedge 2): & w = ry^3, \\
 5) \wedge 9): & w = ry^2Y, & 6) \wedge 1): & w = Xx^2, & 6) \wedge 4): & w = Xxr, \\
 6) \wedge 7): & w = XxX, & 7) \wedge 6): & w = xXx, & 8) \wedge 2): & w = Yy^3, \\
 8) \wedge 9): & w = YyY, & 9) \wedge 8): & w = yYy, & 10) \wedge 3): & w = Rr^2, \\
 10) \wedge 5): & w = Rry^2, & 10) \wedge 11): & w = RrR, & 11) \wedge 10): & w = rRr.
 \end{array}$$

Все эти неоднозначности тривиальны. Ниже мы демонстрируем тривиальность некоторых из них:

$$\begin{array}{l}
 1) \wedge 4): \quad w = x^2r, \\
 (f, g)_w = (x^2 - 1)r - x(xr - rx) = x^2r - r - x^2r + xrx \\
 \quad = xrx - r \equiv 0 \quad (\text{по модулю многочленов 1) и 4)).} \\
 2) \wedge 9): \quad w = y^3Y, \\
 (f, g)_w = (y^3 - 1)Y - y^2(yY - 1) = y^3Y - Y - y^3Y + y^2 \\
 \quad = y^2 - Y \equiv 0 \quad (\text{по модулю многочленов 2) и 9)).} \\
 4) \wedge 5): \quad w = xry^2, \\
 (f, g)_w = (xr - rx)y^2 - x(ry^2 - yr) = xry^2 - rxy^2 - xry^2 + xyr \\
 \quad = xyr - rxy^2 \equiv 0 \quad (\text{по модулю многочленов 4) и 5)).}
 \end{array}$$

II) *Расширенные группы Гекке.* Рассмотрим композиции пересечения многочленов 12)–22). Возникают следующие неоднозначности:

$$\begin{array}{lll}
 12) \wedge 12): & w = x^3, & 12) \wedge 15): & w = x^2r, & 12) \wedge 18): & w = x^2X, \\
 13) \wedge 13): & w = y^{q+1}, & 13) \wedge 20): & w = y^qY, & 14) \wedge 14): & w = r^3, \\
 14) \wedge 16): & w = r^2y^{q-1}, & 14) \wedge 22): & w = r^2R, & 15) \wedge 14): & w = xr^2, \\
 15) \wedge 16): & w = xry^{q-1}, & 15) \wedge 22): & w = xrR, & 16) \wedge 13): & w = ry^q, \\
 16) \wedge 20): & w = ry^{q-1}Y, & 17) \wedge 12): & w = Xx^2, & 17) \wedge 15): & w = Xxr, \\
 17) \wedge 18): & w = XxX, & 18) \wedge 17): & w = xXx, & 19) \wedge 13): & w = Yy^q, \\
 19) \wedge 20): & w = YyY, & 20) \wedge 19): & w = yYy, & 21) \wedge 14): & w = Rr^2, \\
 21) \wedge 16): & w = Rry^{q-1}, & 21) \wedge 22): & w = RrR, & 22) \wedge 21): & w = rRr.
 \end{array}$$

Эти неоднозначности тривиальны. Ниже мы демонстрируем тривиальность двух из них:

$$\begin{aligned}
 16) \wedge 13): \quad w &= ry^q, \\
 (f, g)_w &= (ry^{q-1} - yr)y - r(y^q - 1) = ry^q - yry - ry^q + r \\
 &= r - yry \equiv 0 \quad (\text{по модулю многочленов } 13) \text{ и } 16)). \\
 17) \wedge 18): \quad w &= XxX, \\
 (f, g)_w &= (Xx - 1)X - X(xX - 1) = XxX - X - XxX + X \equiv 0.
 \end{aligned}$$

III) *Группы Пикара*. Рассмотрим композиции пересечения многочленов 23)–38). В этом случае возникают следующие неоднозначности:

$$\begin{aligned}
 23) \wedge 23): \quad w &= x^4, & 23) \wedge 32): \quad w &= x^3X, & 24) \wedge 24): \quad w &= u^3, \\
 24) \wedge 27): \quad w &= u^2x^2, & 24) \wedge 34): \quad w &= u^2U, & 25) \wedge 25): \quad w &= y^4, \\
 25) \wedge 28): \quad w &= y^3x^2, & 25) \wedge 29): \quad w &= y^3r, & 25) \wedge 36): \quad w &= y^3Y, \\
 26) \wedge 26): \quad w &= r^3, & 26) \wedge 30): \quad w &= r^2u, & 26) \wedge 38): \quad w &= r^2R, \\
 27) \wedge 23): \quad w &= ux^3, & 27) \wedge 32): \quad w &= ux^2X, & 28) \wedge 23): \quad w &= y^2x^3, \\
 28) \wedge 32): \quad w &= y^2x^2X, & 29) \wedge 26): \quad w &= y^2r^2, & 29) \wedge 30): \quad w &= y^2ru, \\
 29) \wedge 38): \quad w &= y^2rR, & 30) \wedge 24): \quad w &= ru^2, & 30) \wedge 27): \quad w &= ru^2x^2, \\
 30) \wedge 34): \quad w &= ruU, & 31) \wedge 23): \quad w &= Xx^3, & 31) \wedge 32): \quad w &= XxX, \\
 32) \wedge 31): \quad w &= xXx, & 33) \wedge 24): \quad w &= Uu^2, & 33) \wedge 27): \quad w &= Uux^2, \\
 33) \wedge 34): \quad w &= UuU, & 34) \wedge 33): \quad w &= uUu, & 35) \wedge 25): \quad w &= Yy^3, \\
 35) \wedge 28): \quad w &= Yy^2x^2, & 35) \wedge 29): \quad w &= Yy^2r, & 35) \wedge 36): \quad w &= YyY, \\
 36) \wedge 35): \quad w &= yYy, & 37) \wedge 26): \quad w &= Rr^2, & 37) \wedge 30): \quad w &= Rru, \\
 37) \wedge 38): \quad w &= RrR, & 38) \wedge 37): \quad w &= rRr.
 \end{aligned}$$

Эти неоднозначности тривиальны. Продемонстрируем это для некоторых из них:

$$\begin{aligned}
 24) \wedge 27): \quad w &= u^2x^2, \\
 (f, g)_w &= (u^2 - 1)x^2 - u(ux^2 - xu) = u^2x^2 - x^2 - u^2x^2 + uxu \\
 &= uxu - x^2 \equiv 0 \quad (\text{по модулю многочленов } 24) \text{ и } 27)). \\
 29) \wedge 30): \quad w &= y^2ru, \\
 (f, g)_w &= (y^2r - ry)u - y^2(ru - ur) = y^2ru - ryu - y^2ru + y^2ur \\
 &= y^2ur - ryu \equiv 0 \quad (\text{по модулю многочленов } 29) \text{ и } 30)).
 \end{aligned}$$

Отсюда вытекает доказываемое утверждение.

Проблема равенства для групп G сводится к следующему вопросу.

Пусть G – группа, заданная конечным копредставлением $\langle S; R \rangle$. Существует ли алгоритм, который решает, равно ли данное слово единице в G ?

В первом разделе мы уже отмечали, что базис Грёбнера–Ширшова в группе G дает множество нормальных форм элементов G ; иными словами, для каждого элемента этой группы единственным образом определяется слово, представляющее этот

элемент. Значит, рассматривая нормальные формы элементов группы G , мы можем решить проблему равенства для G . Таким образом, из теоремы 2.1 вытекают следующие утверждения.

Пусть $C(w_1)$, $C(w_2)$ и $C(w_3)$ – нормальные формы слов $w_1 \in \overline{M}$, $w_2 \in \overline{H}(\lambda_q)$ и $w_3 \in \mathbf{P}$.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Слова $C(w_1)$, $C(w_2)$ и $C(w_3)$ имеют вид

$$\begin{aligned} C(w_1) &= y^{i_1} r^{j_1} x^{k_1} y^{i_2} r^{j_2} x^{k_2} \dots y^{i_n} r^{j_n} x^{k_n}, \\ &\quad 0 \leq i_p \leq 2, \quad 0 \leq j_q, k_s \leq 1, \quad 1 \leq p, q, s \leq n; \\ C(w_2) &= y^{i_1} r^{j_1} x^{k_1} y^{i_2} r^{j_2} x^{k_2} \dots y^{i_n} r^{j_n} x^{k_n}, \\ &\quad 0 \leq i_p \leq q-1, \quad 0 \leq j_q, k_s \leq 1, \quad 1 \leq p, q, s \leq n; \\ C(w_3) &= x^{i_1} y^{j_1} u^{k_1} r^{l_1} x^{i_2} y^{j_2} u^{k_2} r^{l_2} \dots x^{i_n} y^{j_n} u^{k_n} r^{l_n}, \\ &\quad 0 \leq i_p, j_q \leq 2, \quad 0 \leq k_s, l_t \leq 1, \quad 1 \leq p, q, s, t \leq n. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 2.3. В расширенных модулярных группах, расширенных группах Гекке и группах Пикара проблема равенства разрешима.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. И. Адян, В. Г. Дурнев, “Алгоритмические проблемы для групп и полугрупп”, *УМН*, **55:2** (2000), 3–94.
- [2] А. И. Ширшов, “Некоторые алгоритмические проблемы для алгебр Ли”, *Сиб. матем. журн.*, **3** (1962), 292–296.
- [3] Н. Hironaka, “Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero: I”, *Ann. Math.*, **79:1** (1964), 109–203; “Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero: I”, *Ann. Math.*, **79:2** (1964), 205–326.
- [4] B. Buchberger, *Ein Algorithmus zum Auffinden der Basiselemente der Restklassenringe nach einem nulldimensionalen Polynomideal*, Dissertation, Universität Innsbruck, 1965.
- [5] L. A. Bokut', G. P. Kukin, *Algorithmic and Combinatorial Algebra*, Math. Appl., **255**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.
- [6] Л. А. Бокуть, П. С. Колесников, “Базисы Грёбнера–Ширшова: от зарождения до наших дней”, *Вопросы теории представлений алгебр и групп*. 7, Зап. научн. сем. ПОМИ, **272**, ПОМИ, СПб., 2000, 26–67.
- [7] L. A. Bokut, Y. Chen, “Gröbner–Shirshov bases: some new results”, *Advances in Algebra and Combinatorics*, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2008, 35–56.
- [8] B. Buchberger, “Ein algorithmisches Kriterium für die Lösbarkeit eines algebraischen Gleichungssystems”, *Aequationes Math.*, **4:3** (1970), 374–383.
- [9] F. Ateş, E. G. Karpuz, C. Kocapinar, A. S. Çevik, “Gröbner–Shirshov bases of some monoids”, *Discrete Math.*, **311:12** (2011), 1064–1071.
- [10] L. A. Bokut, Y. Chen, X. Zhao, “Gröbner–Shirshov bases for free inverse semigroups”, *Int. J. Algebra Comput.*, **19:2** (2009), 129–143.
- [11] L. Bokut, A. Vesnin, “Gröbner–Shirshov bases for some braid groups”, *J. Symbolic Comput.*, **41:3-4** (2006), 357–371.
- [12] Y. Chen, W. Chen, R. Luo, “Word problem for Novikov’s and Boone’s groups via Gröbner–Shirshov bases”, *Southeast Asian Bull. Math.*, **32:5** (2008), 863–877.
- [13] Y. Chen, “Gröbner–Shirshov bases for Schreier extensions of groups”, *Comm. Algebra*, **36:5** (2008), 1609–1625.
- [14] Y. Chen, C. Zhong, “Gröbner–Shirshov bases for HNN extensions of groups and for the alternating group”, *Comm. Algebra*, **36:1** (2008), 94–103.

- [15] E. Hecke, “Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung”, *Math. Ann.*, **112**:1 (1936), 664–699.
- [16] G. A. Jones, J. S. Thornton, “Automorphisms and congruence subgroups of the extended modular group”, *J. London Math. Soc.* (2), **34**:2 (1986), 26–40.
- [17] S. Huang, “Generalized Hecke groups and Hecke polygons”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, **24**:1 (1999), 187–214.
- [18] Ö. Koruoglu, R. Şahin, S. İcikardeş, “The normal subgroup structure of the extended Hecke groups”, *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, **38**:1 (2007), 51–65.
- [19] Ö. Koruoglu, R. Şahin, S. İcikardeş, I. N. Cangül, “Normal subgroups of Hecke groups $H(\lambda)$ ”, *Algebr. Represent. Theory*, **13**:2 (2010), 219–230.
- [20] R. Şahin, S. İcikardeş, Ö. Koruoglu, “On the power subgroups of the extended modular group $\bar{\Gamma}$ ”, *Turkish J. Math.*, **28**:2 (2004), 143–151.
- [21] A. S. Çevik, N. Y. Özgür, R. Şahin, “The extended Hecke groups as semi-direct products and related results”, *Int. J. Appl. Math. Stat.*, **13**:S08 (2008), 63–72.
- [22] A. S. Çevik, “The efficiency of standard wreath product”, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2), **43**:2 (2000), 415–423.
- [23] A. M. Brunner, “A two-generator presentation for the Picard group”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **115**:1 (1992), 45–46.

Э. Г. Карпуз

Karamanoğlu Mehmetbey University, Турция

E-mail: eylem.guzel@kmu.edu.tr

Поступило

26.12.2008

А. С. Чевик

Selçuk University, Турция

E-mail: sinan.cevik@selcuk.edu.tr