Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. С. Миненков, Асимптотики решений одномерной нелинейной системы уравнений мелкой воды с вырождающейся скоростью, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 5, 721–730

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10129>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 12:39:44

Асимптотики решений одномерной нелинейной системы уравнений мелкой воды с вырождающейся скоростью

Д. С. Миненков

Рассматривается система одномерных нелинейных уравнений мелкой воды с вырождающейся скоростью. Предложена замена переменных, которая переводит данную систему в нелинейную систему с малой нелинейностью. Получены формальные асимптотические решения вблизи точки вырождения.

Библиография: 9 названий.

1. Постановка задачи. В одномерном случае система нелинейных уравнений мелкой воды над неровным дном $D(x) = c^2(x)$ ($c(x)$ – скорость распространения волн) для уровня свободной поверхности $\eta = \eta(x, t)$ и скорости $u = u(x, t)$ имеет вид [1], [2]:

$$\eta_t + (D(x)u + \eta u)_x = 0, \quad u_t + \left(\eta + \frac{u^2}{2} \right)_x = 0, \quad x \geq x_{\min}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

где x – пространственная координата, t – время, $D(x)$ – заданная функция, предполагается гладкой по x . Считаем, что точка $x = 0$ соответствует берегу, а именно $\text{sign}(D(x)) = \text{sign}(x)$. Значения $D(x) < 0$ отвечают “отрицательной глубине”, т.е. высоте берега над уровнем водоема. Задача состоит в построении некоторых ограниченных решений уравнений (1.1) в области с переменной левой границей $x \in [x_{\min}(t), \infty)$, где $x_{\min}(t)$ определяется из условия $D(x_{\min}) + \eta(x_{\min}, t) = 0$.

Решения этой задачи в случае линейного дна, когда $D(x) = \gamma^2 x$, изучались в работах [1]–[6], причем, в работе [6] получено семейство точных решений, представленных в виде алгебраических функций.

Рассмотрим задачу Коши с начальным условием, удаленным от берега на расстояние порядка длины волны:

$$\eta|_{t=0} = \eta^0(x), \quad \eta^0(x) \equiv \nu V(x-1), \quad u|_{t=0} = 0. \quad (1.2)$$

Здесь $V(\xi)$ – гладкая финитная функция, $\text{supp } V \subset [-1/2, 1/2]$, $|V(\xi)| \leq 1$, параметр ν характеризует амплитуду в начальный момент времени. Мы будем рассматривать дно в виде $D(x) = \gamma^2 x f(\varepsilon x)$, $f(0) = 1$, $f^{(k)}(\xi) = O(1)$, где характерный размер

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00973).

“неровностей” дна $D(x)$ определяется малым параметром $\varepsilon \ll 1$. Изменением масштаба ($x \rightarrow x$, $t \rightarrow t/\gamma$, $\eta \rightarrow \gamma^2\eta$, $u \rightarrow \gamma u$) можно сделать $\gamma = 1$. Будем считать, что амплитуда волны в начальный момент достаточно мала по сравнению с глубиной $\nu \ll D(1)$, чтобы волна дошла до берега без опрокидывания. Это достаточно часто бывает для волн цунами [2], [5].

Основной результат работы заключается в том, что вблизи берега существует замена переменных

$$(x, t) \rightarrow (z, \tau), \quad (\eta(x, t), u(x, t)) \rightarrow (N(z, \tau), U(z, \tau)),$$

которая сведет исходную задачу к задаче Коши для нелинейной системы, представляющей собой слабозмущенную линейную систему:

$$N_\tau + (zU)_z = \varepsilon f_1(z, N, U)zU, \quad U_\tau + N_z = \varepsilon f_2(z, N, U)N, \quad (1.3)$$

$$N|_{\tau=0} = N^0(z), \quad U|_{\tau=0} = 0. \quad (1.4)$$

Для этой системы методом регулярной теории возмущений получено (формальное) асимптотическое решение в виде формального ряда:

$$N(z, \tau; \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k N_k(z, \tau), \quad U(z, \tau; \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k U_k(z, \tau). \quad (1.5)$$

Под *формальным асимптотическим решением* будем понимать пару функций

$$(\check{N}_n(z, \tau; \varepsilon), \check{U}_n(z, \tau; \varepsilon)), \quad n \geq 0,$$

норма которой имеет тот же порядок (по ε), что и норма начального возмущения: $\|(\check{N}_n, \check{U}_n)\| = O(1)$, $\|(N^0, U^0)\| = O(1)$, и которые при их подстановке в систему дают малую невязку r_n : $\|r_n\| = O(\varepsilon^{n+1})$.

Главный член асимптотики ($\check{N}_0 = N_0$, $\check{U}_0 = U_0$) и поправки (N_1, U_1) определяют из системы неоднородных линейных уравнений со скоростью $c = \gamma\sqrt{z}$ (линейным дном $D = \gamma^2 z$). Для корректной постановки задачи Коши для системы линейных уравнений необходимо наложить дополнительное условие на поведение решения при $x \rightarrow 0$, поскольку скорость $c(x)$ вырождается в точке $x = 0$. Как было сформулировано в [4] и доказано в [7], такая задача будет корректно поставлена, если потребовать $c(x)\eta_x(x) \in L^2(\mathbb{R}_+)$, что в сущности эквивалентно тому, что энергия решения должна быть конечна. Известны точное решение в интегральной форме задачи Коши для линейной системы с локализованными начальными условиями и достаточно эффективные асимптотические формулы для этого решения вне окрестности точки $z = 0$ [2], [5]–[7], которая, как показано в [6], [7], является фокальной точкой или точкой поворота.

2. Замена для выравнивания $c^2(x)$ (дна).

ЛЕММА 1. *Определим замену независимых переменных $y = y(x)$ как решение дифференциального уравнения*

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{D(x)}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y|_{x=0} = 0. \quad (2.1)$$

Для $D(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$: $\text{sign}(D(x)) = \text{sign}(x)$ эта замена является гладкой и регулярной на $\mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В задаче (2.1) разделяются переменные и для решения справедлива формула

$$y(x) = \text{sign}(D(x)) \left(\frac{1}{2} \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{|D(x')|}} \right)^2. \quad (2.2)$$

Поскольку $D(x)$ – гладкая функция и подынтегральное выражение положительно, то якобиан $J(x) \equiv dy/dx$ – положителен и ограничен на любом конечном интервале $(0, y^*)$ или $(-y^*, 0)$, $y^* > 0$. Раскладывая в ряд Маклорена, получаем для $|x| < 1$

$$D(x) = xf(x) = x \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k, \quad f_0 = 1, \quad |D(x)| = |x|f(x).$$

Это дает

$$\begin{aligned} y(x) &= \text{sign}(x) \frac{\left(\int_0^x |x|^{-1/2} f^{-1/2}(x) dx \right)^2}{4} = \text{sign}(x) \frac{\left(\int_0^x |x|^{-1/2} h(x) dx \right)^2}{4} \\ &= \text{sign}(x) \frac{\left(\int_0^x |x|^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} h_k x^k dx \right)^2}{4} \\ &= \text{sign}(x) \frac{\left(\int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} h_k \text{sign}(x)^{k+1} |x|^{k-1/2} d|x| \right)^2}{4} \\ &= \text{sign}(x) \frac{\left(\sum_{k=0}^{\infty} h_k \text{sign}(x)^{k+1} |x|^{k+1/2} / (k+1/2) \right)^2}{4} \\ &= x \frac{\left(\sum_{k=0}^{\infty} h_k x^k / (k+1/2) \right)^2}{4}, \quad h_0 = 1, \end{aligned}$$

и, таким образом, $y \in C^\infty(-1, 1)$ и $J(x) = 1 + O(x)$.

Вместе с заменой независимой переменной $y(x)$ произведем также замену зависимых переменных:

$$q(y, t) = J^2 \eta, \quad w(y, t) = Ju. \quad (2.3)$$

Тогда система (1.1) примет вид

$$\begin{aligned} q_t + (yw + qw)_y &= 3J^{-2} J_x \cdot (yw + qw), \\ w_t + \left(q + \frac{1}{2} w^2 \right)_y &= 2J^{-2} J_x \cdot \left(q + \frac{1}{2} w^2 \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Начальные условия следующие: $q^0(y) = J^2(x(y))\eta^0(x(y))$, $w^0(y) = 0$. Эту задачу нужно решать в области $y \geq y_{\min}(t)$, и переменный левый предел определяется из условия $y_{\min} + q(y_{\min}, t) = 0$, что равносильно $J^{-2}y + J^{-2}q = D + \eta = 0$. Члены, собранные в правой части системы, малы: $D(x) = xf(\varepsilon x) = x(1 + O(\varepsilon))$, откуда $y(x) = x(1 + O(\varepsilon))$, а значит, $J = 1 + O(\varepsilon)$, $J_x = O(\varepsilon)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В окончательных формулах переменную y и якобиан J удобно выразить через переменную x по формулам (2.2), что в конкретных задачах бывает легче (и эффективнее), чем перейти от переменной x к переменной y .

3. Линеаризация, основанная на преобразовании Кариера–Гринспена.

Теперь проведем линеаризацию системы (2.4) методом Кариера–Гринспена [3] (см. также [2]) в форме, представленной в [6]. Произведем замену $(y, t) \rightarrow (z, \tau)$, $(q, w) \rightarrow (N(z, \tau), U(z, \tau))$:

$$\begin{aligned} z &= y + q(y, t), & \tau &= t - w(y, t), \\ N(z, \tau) &= q + \frac{1}{2}w^2, & U(z, \tau) &= w. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Матрица Якоби замены имеет вид

$$\mathcal{J}_2 \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau}{\partial t} & \frac{\partial \tau}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = J_2^2 \begin{pmatrix} 1 - N_z + UU_z & -U_z \\ N_\tau - UU_\tau & 1 + U_\tau \end{pmatrix},$$

где $J_2 \equiv \det \mathcal{J}_2 = (1 + U_\tau - N_z - U_\tau N_z + UU_z + N_\tau U_z)^{-1}$. Левая часть системы преобразуется следующим образом:

$$q_t + (yw + qw)_y = J_2 \cdot (N_\tau + (zU)_z), \quad w_t + \left(q + \frac{1}{2}w^2\right)_y = J_2 \cdot (U_\tau + N_z).$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение

ЛЕММА 2. Если $J_2 \neq 0$, то система (2.4) равносильна системе

$$N_\tau + (zU)_z = 3J_2^{-1}J^{-2}J_x \cdot zU, \quad U_\tau + N_z = 2J_2^{-1}J^{-2}J_x \cdot N. \quad (3.2)$$

Поскольку $w^0 = u^0 = 0$, то $\tau|_{t=0} = 0$, $U|_{\tau=0} = U^0 = 0$, и начальная функция $N|_{\tau=0} = N^0(z)$ определяется в параметрической форме следующим образом:

$$z|_{t=0} = z^0(y), \quad z^0(y) = y + q^0(y), \quad N|_{\tau=0} = N^0(z), \quad N^0(z^0(y)) = q^0(y). \quad (3.3)$$

Преобразование Кариера–Гринспена переводит задачу (2.4) с переменным левым пределом $y_{\min}$: $y_{\min} + q = 0$, в задачу (3.2) с постоянной границей $z_{\min} = 0$, поскольку $z \equiv y + q(y, t)$. Если $J^{-2}(x)J_x(x) = O(\varepsilon)$ и $J_2 = O(1)$, то нелинейная система (3.2) получается слабым возмущением линейной системы.

4. Асимптотики по методу теории возмущений.

ТЕОРЕМА 1. Пусть скорость $c(x)$ (дно $D(x) = c(x)^2$) достаточно мало отклоняется от $\sqrt{x}$ (от линейного дна x), т.е. $J(x) = 1 + O(\varepsilon)$, и амплитуда начальной волны достаточно мала, так что $J_2 = O(1)$. Пусть, кроме того, начальные условия лежат в пространстве Шварца на полупрямой: $N^0(z), U^0(z) \in \mathcal{S}[0, \infty)$ ($N^0, U^0 \in C^\infty[0, \infty)$ и убывают на бесконечности быстрее любой степени). Тогда для задачи (3.2), (3.3) с границей $z = 0$ и дополнительными условиями на ограниченность решения можно построить формальное асимптотическое решение методом регулярной теории возмущений в виде ряда по малому параметру ε :

$$N(z, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k N_k(z, \tau), \quad U(z, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k U_k(z, \tau)$$

в классе $\mathcal{S}[0, \infty)$ по z на временах $\tau = O(1)$.

Замена координат, обратная замене (2.2), (2.3), (3.1), переводит его в формальное асимптотическое решение для исходной задачи (1.2) с переменной границей $x_{\min}(t)$ в классе $\mathcal{S}[x_{\min}(t), \infty)$ по x на временах $t = O(1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Имеем $J(x) = 1 + O(\varepsilon)$, $J_2(y) = O(1)$, откуда

$$J_2^{-1}(y)J^{-2}(x)J_x(x) = \varepsilon g(y), \quad g = O(1), \quad g^{(k)} = O(1), \quad k > 0.$$

Подставив ряд $N(z, \tau, \varepsilon)$, $U(z, \tau, \varepsilon)$ в задачу (3.2), (3.3), получим цепочку задач, из которой можно последовательно определить $N_k(z, \tau)$, $U_k(z, \tau)$:

$$N_{0\tau} + (zU_0)_z = 0, \quad U_{0\tau} + N_{0z} = 0, \quad N_0|_{\tau=0} = N^0(z), \quad U_0|_{\tau=0} = U^0(z), \quad (4.1)$$

$$N_{k\tau} + (zU_k)_z = R_k, \quad U_{k\tau} + N_{kz} = Q_k, \quad N_k|_{\tau=0} = U_k|_{\tau=0} = 0. \quad (4.2)$$

Правая часть $(R_k, Q_k) = (R_k, Q_k)(z, N_0, U_0, \dots, N_{k-1}, U_{k-1})$ имеет вид

$$R_k = 3 \sum_{j=0}^{k-1} P_{kj} z U_j, \quad Q_k = 2 \sum_{j=0}^{k-1} P_{kj} N_j,$$

где полиномы

$$P_{kj} = P_{kj} \left(g \left(z - N_0 + \frac{U_0^2}{2} \right), \dots, g^{(k-1)} \left(z - N_0 + \frac{U_0^2}{2} \right), N_0, \dots, N_{k-1}, U_0, \dots, U_{k-1} \right),$$

$$P_{kj}(\lambda g_0, \dots, \lambda g_{k-1}, N_0, \dots) = \lambda P_{kj}(g_0, \dots, g_{k-1}, N_0, \dots).$$

Для $k = 1, 2$

$$(R_1, Q_1) = g \left(z - N_0 + \frac{U_0^2}{2} \right) (3zU_0, 2N_0),$$

$$(R_2, Q_2) = g \left(z - N_0 + \frac{U_0^2}{2} \right) (3zU_1, 2N_1)$$

$$+ g' \left(z - N_0 + \frac{U_0^2}{2} \right) (-N_1 + U_0U_1) (3zU_0, 2N_0).$$

Используя интеграл Дюгамеля

$$N_k(z, \tau) = \int_0^\tau \tilde{N}_k(z, \tau; \theta) d\theta, \quad U_k(z, \tau) = \int_0^\tau \tilde{U}_k(z, \tau; \theta) d\theta,$$

решения (N_k, U_k) можно выразить через решения $(\tilde{N}_k(z, \tau; \theta), \tilde{U}_k(z, \tau; \theta))$ семейства задач Коши для однородной линейной системы (4.1):

$$\tilde{N}_{k\tau} + (z\tilde{U}_k)_z = 0, \quad \tilde{U}_{k\tau} + \tilde{N}_{kz} = 0$$

с начальными условиями

$$\tilde{N}_k(z, \tau; \theta)|_{\tau=\theta} = R_k(z, \theta), \quad \tilde{U}_k(z, \tau; \theta)|_{\tau=\theta} = Q_k(z, \theta).$$

ЛЕММА 3. Если начальные условия лежат в пространстве Шварца на полупрямой $N^0(z), U^0(z) \in \mathcal{S}[0, \infty)$, то существует единственное решение $N(z, \tau)$, $U(z, \tau) \in \mathcal{S}[0, \infty)$ задачи (4.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. 1) Решение задачи (4.1) в области $z \in [0, \infty)$ при условии конечности энергии дается интегральной формулой [6]

$$N(z, \tau) = \operatorname{Re} \frac{(-i)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_0^{\infty} dr \left(r(\tilde{\varphi}(r) + i\tilde{\psi}(r)) \frac{1}{p} e^{ir(1/p+\tau)} e^{iprz} \right) \quad (4.3)$$

$$= \operatorname{Re} \int_0^{\infty} r(\tilde{\varphi}(r) + i\tilde{\psi}(r)) e^{ir\tau} J_0(2r\sqrt{z}) dr, \quad (4.4)$$

$$U(z, \tau) = \operatorname{Re} \left\{ -i \int_0^{\infty} r(\tilde{\varphi}(r) + i\tilde{\psi}(r)) e^{ir\tau} \frac{J_1(2r\sqrt{z})}{\sqrt{z}} dr \right\}, \quad (4.5)$$

где функции $\tilde{\varphi}(r)$ и $\tilde{\psi}(r)$ определяются через преобразования Ханкеля от функций от начальных условий $N^0(z)$ и $U^0(z)$ соответственно:

$$\begin{aligned} N^0\left(\frac{\xi^2}{4}\right) &= \int_0^{\infty} r\tilde{\varphi}(r)J_0(r\xi) dr = \varphi(\xi), & \tilde{\varphi}(r) &= \int_0^{\infty} \xi N^0\left(\frac{\xi^2}{4}\right) J_0(r\xi) d\xi, \\ \frac{\xi}{2} U^0\left(\frac{\xi^2}{4}\right) &= \int_0^{\infty} r\tilde{\psi}(r)J_1(r\xi) dr = \psi(\xi), & \tilde{\psi}(r) &= \int_0^{\infty} \xi \frac{\xi}{2} U^0\left(\frac{\xi^2}{4}\right) J_1(r\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Функции $\varphi(\xi) = N^0(\xi^2/4)$, $\psi(\xi) = \xi U^0(\xi^2/4)/2$ убывают на бесконечности быстрее любой степени, поэтому производные их трансформант Ханкеля $\tilde{\varphi}(r)$, $\tilde{\psi}(r)$ существуют и определяются дифференцированием под знаком интеграла в (4.6):

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^{(k)}(r) &= \int_0^{\infty} \xi^{k+1} N^0\left(\frac{\xi^2}{4}\right) J_0^{(k)}(r\xi) d\xi < \infty, \\ \tilde{\psi}^{(k)}(r) &= \int_0^{\infty} \xi^{k+1} \left(\frac{\xi}{2}\right) U^0\left(\frac{\xi^2}{4}\right) J_1^{(k)}(r\xi) d\xi < \infty, \end{aligned}$$

и, таким образом, $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in C^\infty[0, \infty)$.

Поскольку функции $\varphi(\xi), \psi(\xi) \in C^\infty[0, \infty)$, их трансформанты Ханкеля $\tilde{\varphi}(r)$ и $\tilde{\psi}(r)$ убывают на бесконечности быстрее любой степени. Действительно, согласно теореме об обращении имеем

$$\varphi(\xi) = \int_0^{\infty} r\tilde{\varphi}(r)J_0(r\xi) dr, \quad \psi(\xi) = \int_0^{\infty} r\tilde{\psi}(r)J_1(r\xi) dr.$$

Дифференцируя, получим для $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \varphi^{(2k)}(0) &= \int_0^{\infty} r^{2k+1}\tilde{\varphi}(r)J_0^{(2k)}(0) dr = c_{2k} \int_0^{\infty} r^{2k+1}\tilde{\varphi}(r) dr < \infty, & c_{2k} &\neq 0, \\ \psi^{(2k+1)}(0) &= \int_0^{\infty} r^{2k+2}\tilde{\psi}(r)J_1^{(2k+1)}(0) dr = c_{2k+1} \int_0^{\infty} r^{2k+2}\tilde{\psi}(r) dr < \infty, & c_{2k+1} &\neq 0. \end{aligned}$$

Требование сходимости интегралов в нуле для произвольного k доказывает требуемую скорость убывания на бесконечности.

Аналогичным образом, из условия $r(\tilde{\varphi}(r) + i\tilde{\psi}(r)) \exp\{ir\tau\} \in C^\infty[0, \infty)$ следует, что для всех τ функции $N(\xi^2/4, \tau)$, $\xi U(\xi^2/4, \tau)$ убывают на бесконечности быстрее любой степени ξ , и, значит, $N(z, \tau)$, $U(z, \tau)$ убывают на бесконечности быстрее любой степени z .

Для доказательства существования производных функций $N(z, \tau)$, $U(z, \tau)$ проведем дифференцирование в (4.4), (4.5) и воспользуемся рекуррентным соотношением для производных от функций Бесселя (см. например [8]):

$$\left(\frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta}\right)^k \zeta^{-n} J_n(\zeta) = (-1)^k \zeta^{-n-k} J_{n+k}(\zeta).$$

Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k}{\partial z^k} N(z, \tau) &= \int_0^\infty r \tilde{n}(r) \frac{\partial^k}{\partial z^k} J_0(2r\sqrt{z}) dr \\ &= \int_0^\infty r \tilde{n}(r) 2^k r^{2k} \left(\frac{1}{2r\sqrt{z}} \frac{d}{d(2r\sqrt{z})}\right)^k J_0(2r\sqrt{z}) dr \\ &= \int_0^\infty r \tilde{n}(r) 2^k r^{2k} (2r\sqrt{z})^{-k} J_k(2r\sqrt{z}) dr. \end{aligned}$$

Поскольку $|\zeta^{-k} J_k(\zeta)| < \infty$, $\zeta \in [0, \infty)$, и функция $\tilde{n}(r) = \operatorname{Re}\{(\tilde{\varphi}(r) + i\tilde{\psi}(r)) \exp\{ir\tau\}\}$ убывает на бесконечности быстрее любой степени r , интеграл сходится абсолютно, равномерно по $x \in [0, \infty)$. Это доказывает, что $\forall \tau$ $N(z, \tau) \in C^\infty[0, \infty)$.

Аналогично для $U(z, \tau)$:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(r) &= \operatorname{Re}\{(-i)(\tilde{\varphi}(r) + i\tilde{\psi}(r)) \exp\{ir\tau\}\}, \\ \frac{\partial^k}{\partial z^k} U(z, \tau) &= \int_0^\infty r \tilde{u}(r) 2r^{2k} \left(\frac{1}{2r\sqrt{z}} \frac{d}{d(2r\sqrt{z})}\right)^k (2r\sqrt{z})^{-1} J_1(2r\sqrt{z}) dr \\ &= \int_0^\infty 2^{k+1} r^{2k+2} \tilde{u}(r) (2r\sqrt{z})^{-k-1} J_{k+1}(2r\sqrt{z}) dr, \end{aligned}$$

что доказывает свойство бесконечной дифференцируемости $U(z, \tau)$ по z . В итоге имеем, что для всех τ $N(z, \tau), U(z, \tau) \in \mathcal{S}[0, \infty)$.

2) Систему уравнений (4.1) можно переписать в виде абстрактного дифференциального уравнения для вектор-функции $V(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, $V(\tau) = (N, \sqrt{z}U)^T \in H = L^2[0, \infty) \oplus L^2[0, \infty)$ [9; с. 180]:

$$\frac{d}{d\tau} V(\tau) + iAV(\tau) = 0, \quad V|_{\tau=0} = \begin{pmatrix} N^0(z) \\ \sqrt{z}U^0(z) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \left(-\frac{i\partial}{\partial z}\right)\sqrt{z} \\ \sqrt{z}\left(-\frac{i\partial}{\partial z}\right) & 0 \end{pmatrix}.$$

Это уравнение Шрёдингера с самосопряженным оператором $A = A^*$, задача Коши для этого уравнения имеет единственное (сильное) решение $V(\tau) \in C^1(\mathbb{R}, H)$, и для решения справедлив “закон сохранения”: $\|V(\tau)\|_H = \|V(0)\|_H$, что равносильно

$$\|N(\tau)\|_{L^2}^2 + \|\sqrt{z}U(\tau)\|_{L^2}^2 = \|N^0\|_{L^2}^2 + \|\sqrt{z}U^0\|_{L^2}^2, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ. 2. Оценим норму поправок $V_k = (N_k, \sqrt{z}U_k)^T$ как решений гиперболической системы. По доказанной лемме функции $N_0(z, \tau), U_0(z, \tau) \in \mathcal{S}[0, \infty)$ по z . Предположим, что то же справедливо для

поправок $N_k, U_k \in \mathcal{S}[0, \infty)$, $k < n$; тогда правая часть в системе для n -й поправки $R_n(z, \tau), Q_n(z, \tau) \in \mathcal{S}[0, \infty)$ по z для всех τ , и согласно лемме функции $\tilde{N}_n(z, \tau, \theta)$, $\tilde{U}_n(z, \tau, \theta) \in \mathcal{S}[0, \infty)$, а, следовательно, и n -я поправка $N_n, U_n \in \mathcal{S}[0, \infty)$. Так, по принципу математической индукции заключаем, что для всех τ $N_n(z, \tau), U_n(z, \tau) \in \mathcal{S}[0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$.

Норма главного члена, как решения гиперболической системы равна

$$\|V_0(\tau)\|_H^2 \equiv \|N_0(z, \tau)\|_{L_z^2}^2 + \|U_0(z, \tau)\|_{L_z^2}^2 = \|N^0(z)\|_{L_z^2}^2.$$

Оценим норму k -й поправки $V_k = (N_k, \sqrt{z}U_k)^T$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \|V_k(\tau)\|_H^2 &= \|N_k(z, \tau)\|_{L_z^2}^2 + \|\sqrt{z}U_k(z, \tau)\|_{L_z^2}^2 \\ &\leq \int_0^\tau \|\tilde{N}_k(z, \tau, \theta)\|_{L_z^2}^2 + \|\sqrt{z}\tilde{U}_k(z, \tau, \theta)\|_{L_z^2}^2 d\theta \\ &= \int_0^\tau \|\tilde{V}_k(\tau, \theta)\|_H^2 d\theta \leq \tau \max_{\theta \in [0, \tau]} \|\tilde{V}_k(\theta, \theta)\|_H^2 \\ &= \tau \max_{\theta \in [0, \tau]} (\|R_k(z, \theta)\|_{L_z^2}^2 + \|\sqrt{z}Q_k(z, \theta)\|_{L_z^2}^2). \end{aligned}$$

Поскольку $R_k, Q_k \in \mathcal{S}[0, \infty)$, то $\|V_k(\tau)\|_H^2 \leq c_k$, где “константы” c_k зависят от функции $g(y)$ и времени τ и не зависят от параметра ε и, следовательно, разложение $N(z, \tau, \varepsilon)$, $U(z, \tau, \varepsilon)$ определяет формальное асимптотическое решение задачи (3.2), (3.3) на временах $\tau = O(1)$.

3. Зафиксируем n и рассмотрим частичные суммы $\check{N}(z, \tau, \varepsilon) \equiv \sum_{k=0}^n \varepsilon^k N_k(z, \tau)$, $\check{U}(z, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k U_k(z, \tau)$. Применяя замены, обратные (2.2), (2.3) и (3.1), получим функции $\check{q}(y, t, \varepsilon)$, $\check{w}(y, t, \varepsilon)$ и $\check{\eta}(x, t)$, $\check{y}(x, t)$. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} \check{\eta}_t + (D\check{y} + \check{\eta}\check{y})_x &= J^{-2}(\check{q}_t + (y\check{w} + \check{q}\check{w})_y - 3(y\check{w} + \check{q}\check{w})J^{-2}J_x) \\ &= J_2 J^{-2} \left(\check{N}_\tau + (z\check{U})_z - 3g \left(z - \check{N} + \frac{\check{U}^2}{2} \right) z\check{U} \right) = O(\varepsilon^{n+1}), \\ \check{y}_t + \left(\check{\eta} + \frac{\check{y}^2}{2} \right)_x &= J^{-1} \left(\check{w}_t + \left(\check{q} + \frac{\check{w}^2}{2} \right)_y - 2 \left(\check{q} + \frac{\check{w}^2}{2} \right) J^{-2}J_x \right) \\ &= J_2 J^{-1} \left(\check{U}_\tau + \check{N}_z - 2g \left(z - \check{N} + \frac{\check{U}^2}{2} \right) \check{N} \right) = O(\varepsilon^{n+1}), \end{aligned}$$

и, таким образом, мы получили формальное асимптотическое решение $\check{\eta}(x, t, \varepsilon)$, $\check{y}(x, t, \varepsilon)$ исходной задачи (1.1).

5. Пример. Для практических целей удобно использовать семейство решений линейной задачи специального вида (см. [6]):

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(z, \tau) &= \operatorname{Re} \frac{A(\tau + ib)}{(y - (\tau + ib)^2/4)^{3/2}}, & \mathcal{U}(z, \tau) &= 2 \operatorname{Re} \frac{A}{(y - (\tau + ib)^2/4)^{3/2}}, \\ A &= \frac{\alpha\mu^{3/2}(1+i)}{2\sqrt{a}}, & b &= -\frac{\beta\mu}{\sqrt{a} + 2i\sqrt{a}}, & \alpha, \beta, \mu, a &> 0, \end{aligned}$$

Рис. 1. Главный член $N_0(z, \tau)$ для линейной системы над линейным дном (штрих) и главный член $\eta_0(x, t)$ для нелинейной системы над нелинейным дном (сплошная) в окрестности фокальной точки: для времен $\tau, t = 1, 2, 3$.

где a определяет положение волны в начальный момент и μ определяет длину волны. Функции $\mathcal{P}(\partial/\partial\tau)\mathcal{N}(z, \tau)$, $\mathcal{P}(\partial/\partial\tau)\mathcal{U}(z, \tau)$ с произвольным полиномом $\mathcal{P}(p)$ также являются решением.

Для исследования поведения решения вблизи берега положим $a = 1$, $\mu = 1$, возьмем $\alpha = 0.05$, $\beta = 1$ (при этом амплитуда в начальный момент будет $N(1, 0) \approx 0.075$). Рассмотрим дно $D(x) = x(1 - 0.1 \sin(2\pi x))$ и возьмем функции $(\mathcal{N}(z, \tau), \mathcal{U}(z, \tau))$ с этими параметрами в качестве главного члена разложения $(N_0(z, \tau), U_0(z, \tau))$. Проведя обратные замены, получим главный член $\eta_0(x, t)$, $u_0(x, t)$ формального асимптотического решения задачи (1.1). На рис. 1 сравниваются функция $N_0(z, \tau)$ в моменты времени $\tau = 1, 2, 3$ и соответствующая ей функция $\eta_0(x, t)$ в моменты времени $t = 1, 2, 3$.

Автор благодарен С. Ю. Доброхотову и В. Е. Назайкинскому за постановку задачи и консультации.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. J. Stoker, *Water Waves. The Mathematical Theory with Applications*, Pure Appl. Math., **4**, Interscience Publ., London, 1957.
- [2] Е. Н. Пелиновский, *Гидродинамика волн цунами*, ИПФ РАН, Нижний Новгород, 1996.
- [3] G. F. Carrier, H. P. Greenspan, “Water waves of finite amplitude on a sloping beach”, *J. Fluid Mech.*, **4**:1 (1958), 97–109.
- [4] T. Vukašinac, P. Zhevandrov, “Geometric asymptotics for a degenerate hyperbolic equation”, *Russ. J. Math. Phys.*, **9**:3 (2002), 371–381.
- [5] E. N. Pelinovsky, R. Kh. Mazova, *Natural Hazards*, **6**:3 (1992), 227–249.
- [6] С. Ю. Доброхотов, Б. Тироцци, “Локализованные решения одномерной нелинейной системы уравнений мелкой воды со скоростью $c = \sqrt{x}$ ”, *УМН*, **65**:1 (2010), 185–186.
- [7] S. Yu. Dobrokhotov, V. E. Nazaikinskii, B. Tirozzi, “Asymptotic solution of the one-dimensional wave equation with localized initial data and with degenerating velocity: I”, *Russ. J. Math. Phys.*, **17**:4 (2010), 434–447.
- [8] *NIST Digital Library of Mathematical Functions*, <http://dlmf.nist.gov/10.51>.
- [9] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Ленинградск. ун-т, Л., 1980.

Д. С. Миненков

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,
г. Москва
E-mail: minenkov.ds@gmail.com

Поступило

20.02.2012